EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VIII KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1959, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VIII
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1959, № 4

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1959.4.08

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ СПОСОБОВ В ОБОБЩЕННО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. УЛЬМ

1. Пусть X — линейное пространство, нормированное посредством полуупорядоченного пространства Z.[1, 2] Обобщенную норму элемента $x \in X$ обозначим через $|x| \in Z$. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$x = U(x) \tag{1}$$

где U переводит X в X. Для приближенного решения уравнения (1) будем применять итерационный способ

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

Сопоставим уравнение (1) с мажорантным уравнением

$$z = V(z) \tag{3}$$

и способ (2) со способом

$$z_{n+1} = V(z_n) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

где V переводит Z в Z. Пусть U и V непрерывные и дифференцируемые операторы. Предположим, что факт существования решений уравнений (1) и (3) установлен, т. е. $x^* = U(x^*)$ и $z^* = V(z^*)$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть*

1^0 $|x^* - x_0| \leqslant z^* - z_0$;

2^0 $|U'(x)| \leqslant V'(z)$, *если* $|x^* - x| \leqslant z^* - z \leqslant z^* - z_0$;*

3^0 *уравнение* $z = V(z)$ *не имеет решений в промежутке* $z_0 < z < z^*$;

4^0 $z_1 > z_0$.

Тогда последовательность (2) *сходится к решению* x^* *уравнения* (1), *причем* $|x^* - x_n| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Замечание 1. Теорема 1 остается в силе, если условие 2^0 заменить более слабым условием

$2^{0\prime}$ $|U(x^*) - U(x)| \leqslant z^* - V(z)$, если $|x^* - x| \leqslant z^* - z \leqslant z^* - z_0$.

При этом не предполагается дифференцируемость U и V. Дополни-

* Условие 2^0 надо понимать так:
$|U'(x)\,\Delta x| \leqslant V'(z)\Delta z$, если $|x^* - x| \leqslant z^* - z \leqslant z^* - z_0$ для каждого $|\Delta x| \leqslant \Delta z$ $(\Delta x \in X,\ \Delta z \in Z)$.

тельно требуется, чтобы оператор V был монотонно возрастающим на отрезке $z_0 \leqslant z \leqslant z^*$ (т. е. $V(z_2) \geqslant V(z_1)$ для каждой пары точек z_1 и z_2 из рассматриваемого отрезка).

2. На основе теоремы 1 и ее модификации (см. замечание 1) можно получить ряд теорем о сходимости различных итерационных способов. В качестве примера рассмотрим операторное уравнение

$$P(x) = 0 \tag{5}$$

где оператор P переводит линейное пространство X в пространство Y такого же типа. Для приближенного решения уравнения (5) будем применять модифицированный способ Ньютона

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

где $U(x) = x - \Gamma_0 P(x)$, $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$.

Пусть $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ являются при фиксированном $z \in Z$ линейными операторами, переводящими пространство Z в себя: $\varphi(z), \Phi(z) \in (Z \to Z)$, $\varphi(z)\Delta z, \Phi(z)\Delta z \in Z$, $(\Delta z \in Z)$. Предположим, что в интересующих нас областях $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ положительны и монотонно возрастают, т. е., например, $\varphi(z_2)\Delta z \geqslant \varphi(z_1)\Delta z \geqslant \Theta_Z$ для каждого $z_2 \geqslant z_1$ и $\Delta z \geqslant \Theta_Z$, где Θ_Z — нуль пространства Z. При таких предположениях справедлива

Теорема 2. *Пусть*

1° *уравнения* $P(x) = 0$ *и* $z = V(z)$ *имеют соответственно решения* x^* *и* z^*, *причем* $|x^* - x_0| \leqslant z^*$;

2° *оператор* P *непрерывен и дифференцируем в области* $|x - x_0| \leqslant 2z^* - z_1$;

3° а) $|E - \Gamma_0 P'(x)| \leqslant \varphi(|x - x_0|)$, *если* $|x - x_0| \leqslant z^*$;

б) $|E - \Gamma_0 P'(x)| \leqslant \Phi(|x - x_0|)$, *если* $|x - x_0| \leqslant 2z^* - z_1$, *где* E — *тождественный оператор пространства* X;

4° $V'(z) \geqslant \Phi(2z^* - z)$, *если* $z_1 \leqslant z \leqslant z^*$;*

5° *уравнение* $z = V(z)$ *не имеет решений в промежутке* $z_1 < z < z^*$;

6° $z_2 > z_1$.

Тогда последовательность (6) *сходится к единственному в области* $|x - x_0| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (5), *и справедливы оценки* $|x^* - x_n| \leqslant z^* - z_n (n = 1, 2, \ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$z_1 = z^* - \int_{\Theta_Z}^{z^*} \varphi(z)\,dz.$$

Замечание 2. Доказательства теорем 1 и 2 аналогичны доказательствам соответствующих теорем при численных нормах.[3]

3. Приведем простой пример составления мажорантного оператора на основе теоремы 2. Рассмотрим нелинейную систему двух уравнений

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = 0 \\ v(\xi, \eta) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Систему (7) можно рассматривать как операторное уравнение

* То есть $V'(z)\Delta z_1 \geqslant \Phi(2z^* - z)\Delta z_2$, если $\Delta z_1 \geqslant \Delta z_2 \geqslant \Theta_Z$.

$$P(x) = 0$$

где $x = (\xi,\eta)$ $P(x) = (u(x), v(x))$.

Обобщенную норму в пространстве $X = R_2$ определим формулой $|x| = (|\xi|, |\eta|)$, т. е. $Z = R_2$. Пусть известна оценка $|x^* - x_0| \leqslant z^* = (s^*, t^*)$. Введем обозначения:

$$u_{10} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{x=x_0} \qquad u_{01} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{x=x_0}$$

$$v_{10} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_{x=x_0} \qquad v_{01} = \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{x=x_0} \qquad D = \begin{vmatrix} u_{10} & u_{01} \\ v_{10} & v_{01} \end{vmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{1}{D}\left[v_{01}\left(u_{10} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - u_{01}\left(v_{10} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right]$$

$$F_{12} = \frac{1}{D}\left[v_{01}\left(u_{01} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - u_{01}\left(v_{01} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right]$$

$$F_{21} = \frac{1}{D}\left[-v_{10}\left(u_{10} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + u_{10}\left(v_{10} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right]$$

$$F_{22} = \frac{1}{D}\left[-v_{10}\left(u_{01} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + u_{10}\left(v_{01} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right]$$

Тогда

$$E - \Gamma_0 P'(x) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

Пусть, например, справедливы оценки

$$|F_{ij}| \leqslant a_{ij}^1 |\xi - \xi_0| + a_{ij}^2 |\eta - \eta_0| \qquad (i,j = 1, 2) \tag{8}$$

в области $|x - x_0| \leqslant z^*$, где a_{ij}^k $(i, j, k = 1,2)$ — положительные постоянные. Тогда

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 s + a_{11}^2 t & a_{12}^1 s + a_{12}^2 t \\ a_{21}^1 s + a_{21}^2 t & a_{22}^1 s + a_{22}^2 t \end{pmatrix}$$

где $z = (s, t)$, и мы получим

$$z^* - z_1 = \tfrac{1}{2}\left(a_{11}^1 s^{*2} + \left(a_{11}^2 + a_{12}^1\right) s^* t^* + a_{12}^2 t^{*2},\right.$$
$$\left. a_{21}^1 s^{*2} + \left(a_{21}^2 + a_{22}^1\right) s^* t^* + a_{22}^2 t^{*2}\right)$$

Если оценки (8) осуществлены в области $|x - x_0| \leqslant 2z^* - z_1$ и соответствующие постоянные обозначены через β_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$, то

$$\Phi(2z^* - z) = \begin{pmatrix} \beta_{11}^1\left(2s^* - s\right) + \beta_{11}^2\left(2t^* - t\right) & \beta_{12}^1\left(2s^* - s\right) + \beta_{12}^2\left(2t^* - t\right) \\ \beta_{21}^1\left(2s^* - s\right) + \beta_{21}^2\left(2t^* - t\right) & \beta_{22}^1\left(2s^* - s\right) + \beta_{22}^2\left(2t^* - t\right) \end{pmatrix}$$

Выберем $\beta_1 = \max\left(\beta_{11}^2, \beta_{12}^1\right)$, $\beta_2 = \max\left(\beta_{21}^2, \beta_{22}^1\right)$.

В качестве мажорантной системы $z = V(z)$ получим:

$$\begin{cases} s = s^* - \frac{1}{2}\beta_{11}^1\left(s^2 - 4s^*s + 3s^{*2}\right) - \frac{1}{2}\beta_{12}^2\left(t^2 - 4t^*t + 3t^{*2}\right) - \\ \qquad - \beta_1\left(st - 2t^*s - 2s^*t + 3s^*t^*\right) \\ t = t^* - \frac{1}{2}\beta_{21}^1\left(s^2 - 4s^*s + 3s^{*2}\right) - \frac{1}{2}\beta_{22}^2\left(t^2 - 4t^*t + 3t^{*2}\right) - \\ \qquad - \beta_2\left(st - 2t^*s - 2s^*t + 3s^*t^*\right) \end{cases}$$

В случае системы из n нелинейных уравнений мажорантная система составляется совершенно аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950.
2. Л. В. Канторович, Принцип мажорант и метод Ньютона, ДАН СССР, т. 76, № 1, 1951.
3. С. Ю. Ульм, К теории сходимости итерационных способов, Изв. АН ЭССР. Серия техн. и физ.-мат. наук, т. VIII, № 3, 1959.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
4 IX 1959

ITERATSIOONMENETLUSTE KOONDUVUSEST ÜLDISTATUD NORMIGA RUUMIDES

S. Ulm

Resümee

Artikkel sisaldab näiteid autori eelnevate resultaatide [3] ülekandmisest üldistatud normiga ruumidesse. Käsitletakse ka teooria rakendamist mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele.

Tallinna Polütehniline Instituut

Saabus toimetusse
4. IX 1959

ÜBER DIE KONVERGENZ EINIGER ITERATIONSVERFAHREN IN RÄUMEN VON VERALLGEMEINERTER NORM

S. Ulm

Zusammenfassung

Der Aufsatz enthält einige Biespiele der Übertragung früherer Ergebnisse [3] des Verfassers auf Räume von verallgemeinerter Norm. Es wird auch die Anwendung der Theorie in bezug auf nichtlineare Gleichungssysteme behandelt. .

Polytechnisches Institut zu Tallinn

Eingegangen
am 4. Sept. 1959