

О СХОДИМОСТИ СПОСОБА КАСАТЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ УСЛОВИЯХ ТИПА КОШИ

С. УЛЬМ

1. И. П. Мысовских^[1] показал, что в теореме типа Коши для вещественного уравнения можно значительно расширить условия сходимости способа Ньютона (по сравнению с общими операторными уравнениями). Здесь покажем, что при таких условиях возможны уточнения и в теореме сходимости касательных парабол (ср. ^[2], теорема 4 при $\alpha = 0$). Пусть

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

вещественное уравнение. Для его приближенного решения будем применять способ касательных парабол

$$x_{n+1} = x_n - [1 + R(x_n)] \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \quad (2)$$

где

$$R(x) = \frac{1}{2} \frac{P''(x)P(x)}{[P'(x)]^2} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия

- 1° $P(x_0)P'(x_0) > 0$ ($P(x_0)P'(x_0) < 0$);
- 2° уравнение (1) имеет решение x^* на отрезке $[x_0 - z^*, x_0]$ $([x_0, x_0 + z^*])$, где z^* — некоторое положительное число;
- 3° на отрезке $[x_0 - (1 + 2k^2 + k^3 + l)z^*, x_0]$ $([x_0, x_0 + (1 + 2k^2 + k^3 + l)z^*])$

справедливы оценки

$$\frac{1}{|P'(x)|} \leq B, \quad \frac{1}{2!} |P''(x)| \leq K, \quad \frac{1}{3!} |P'''(x)| \leq L;$$

- 4° $2k^2 + k^3 + l < 1$, где $k = BKz^*$, $l = BLz^{*2}$.

Тогда последовательность (2) сходится* к единственному на отрезке (3) решению x^* уравнения (1).

* Погрешность можно оценить таким же путем, как и в соответствующей теореме для случая операторных уравнений (^[2], теорема 3 при $\alpha = 0$).

Доказательство основывается на соответствующей теореме для операторного случая ([2], теорема 3 при $\alpha = 0$). Очевидно, что при наших условиях последовательность $\{x_n\}$ принадлежит к отрезку (3). Так как по условию 3^0 $P'(x)$ сохраняет знак на отрезке (3), то решение уравнения (1) на отрезке (3) единственно.

З а м е ч а н и е 1. Если $P(x_0)P'(x_0) > 0$ ($P(x_0)P'(x_0) < 0$), то рассмотрение случая, где решение находится на отрезке $[x_0, x_0 + z^*]$ ($[x_0 - z^*, x_0]$), при наших условиях отпадает, так как $\frac{1}{P'(x)}$ не может быть ограничена на отрезке $[x_0, x_0 + z^*]$ ($[x_0 - z^*, x_0]$).

2. На основе теоремы 1 имеет место

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия

$$1^0 P(x_0)P'(x_0) > 0 \quad (P(x_0)P'(x_0) < 0);$$

$$2^0 |P(x_0)| \leq \eta;$$

$$3^0 \text{ на отрезке } [x_0 - (1 + \kappa)B\eta, x_0]$$

$$([x_0, x_0 + (1 + \kappa)B\eta]) \quad (4)$$

справедливы оценки

$$\frac{1}{|P'(x)|} \leq B, \quad \frac{1}{2!} |P''(x)| \leq K, \quad \frac{1}{3!} |P'''(x)| \leq L;$$

$$4^0 (1 + \kappa)^2 [4\kappa^2 + \kappa^3(1 + \kappa) + 2\lambda] < 8,$$

$$\text{где } \kappa = B^2 K \eta, \quad \lambda = B^3 L \eta^2.$$

Тогда уравнение (1) имеет на отрезке (4) единственное решение x^* , к которому сходится последовательность (2).

Доказательство по идее аналогично с доказательством соответствующей теоремы И. П. Мысовских ([1], теорема 2).

Пусть $P(x_0) > 0$ и $P'(x_0) > 0$ (рассмотрение остальных случаев аналогично). Уравнение (1) имеет решение x^* на отрезке $[x_0 - B\eta, x_0]$. При этом

$$|x_0 - x_1| = |[1 + R(x_0)] \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}| \leq (1 + \kappa)B\eta \quad (5)$$

Так как $|R(x_0)| \leq \kappa < 1$, то $x_0 > x_1$. На основе оценки (5) x_1 принадлежит к отрезку (4).

Предположим сначала, что $x_1 < x^* < x_0$.

Здесь возможны два случая:

$$\text{а) } x_0 - x^* \leq \frac{1}{2}(x_0 - x_1) \leq \frac{1}{2}(1 + \kappa)B\eta$$

$$\text{б) } x^* - x_1 \leq \frac{1}{2}(x_0 - x_1) \leq \frac{1}{2}(1 + \kappa)B\eta$$

Легко увидеть, что в случае а) выполнены все условия теоремы 1, если взять $z^* = \frac{1}{2}(1 + \kappa)B\eta$; например, условие 4^0 выполнено, так как $2k^2 + k^3 + l = (1 + \kappa)^2 [\frac{1}{2}\kappa^2 + \frac{1}{8}\kappa^3(1 + \kappa) + \frac{1}{4}\lambda] < 1$, если учесть условие 4^0 рассматриваемой теоремы. Итак, на основе теоремы 1 последовательность (2) сходится.

В случае б) заключение о сходимости последовательности (2) делается также на основе теоремы 1, если в качестве начального приближения взять x_1 .

В общем случае

$$x_{n+1} - x_n = -[1 + R(x_n)] \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \leq 0$$

при $P(x_n) \geq 0$, так как $|R(x_n)| \leq \kappa < 1$, а $P'(x)$ сохраняет знак. Если $P(x_n) \geq 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то последовательность (2) убывает и, так как она ограничена снизу, имеет предел, равный x^* .

Пусть имеются такие n , при которых $P(x_n) < 0$. Обозначим наименьший из таких индексов через N .

Тогда $x_N < x^* < x_{N-1}$, и мы имеем

условия рассмотренного выше

случая. Остается только

показать, что x_N

принадлежит к

отрезку (4)

(см. рис. 1).

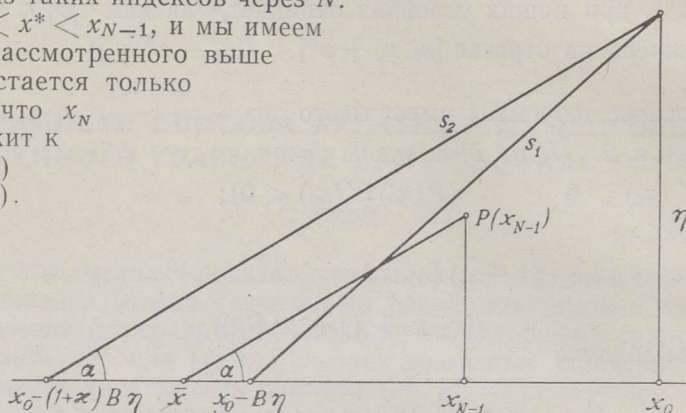


Рис. 1

Точка $(x_{N-1}, P(x_{N-1}))$ лежит ниже прямой $s_1 \equiv y - \frac{1}{B}(x - x_0) - \eta = 0$ и тем более ниже прямой $s_2 \equiv y - \frac{1}{(1+\kappa)B}(x - x_0) - \eta = 0$. Так как

$$x_{N-1} - x_N = [1 + R(x_{N-1})] \frac{P(x_{N-1})}{P'(x_{N-1})} \leq$$

$$\leq P(x_{N-1}) \cdot (1 + \kappa)B = P(x_{N-1}) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = x_{N-1} - \bar{x}, \text{ то } x_N \geq \bar{x}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 дает для вещественного уравнения более точные результаты, чем теорема 4 работы [2]. Из последней получим требование: $\kappa < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618$, а из теоремы 2 настоящей работы: $\kappa < \frac{1}{2}(\sqrt{4\sqrt{5} - 3} - 1) \approx 0,719$ (при этом взято $\lambda = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Мысовских, О сходимости метода Ньютона для вещественного уравнения при условиях типа Коши, Прикл. мат. и мех., т. XVI, вып. 6, 1952.
2. С. Ульм, К теории сходимости итерационных способов, Изв. АН ЭССР. Серия техн. и физ.-мат. наук, т. VIII, № 3, 1959.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
4 IX 1959

**PUUTUVATE PARABOOLIDE MENETLUSE KOONDUVUSEST REAALSE VÖRRANDI
PUHUL CAUCHY TÜÜPI TINGIMUSTEL**

S. Ulm

Resümee

Näidatakse, et reaalse võrrandi puhul on puutuvate paraboolide menetlus koonduv mõnevõrra vabamatel tingimustel kui üldisel operaatorjuhul.

Tallinna Polütehniline Instituut

Saabus toimetusse
4. IX 1959

**ÜBER DIE KONVERGENZ DES VERFAHRENS BERÜHRENDER PARABELN IM
FALLE EINER REELLEN GLEICHUNG UNTER DEN BEDINGUNGEN
CAUCHYSCHEN TYPUS**

S. Ulm

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass für reelle Gleichungen das Verfahren berührender Parabeln unter etwas freieren Bedingungen konvergiert als für allgemeine Operatorgleichungen.

Polytechnisches Institut zu Tallinn

Eingegangen
am 4. Sept. 1959