EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VII KÖIDE.
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1958, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VII
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1958, № 4

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1958.4.03

К ТЕОРИИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОПУСКАНИЯ СВЕТА ТОНКИМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ

П. Г. КАРД,
кандидат физико-математических наук

В статье [1] А. Вашичек, рассматривая отражение и пропускание света тонким металлическим слоем, приходит к выводу, что употребляемые обычно формулы для коэффициентов отражения и пропускания неверны, так как не удовлетворяют закону сохранения энергии и являются лишь механическим обобщением формул, выведенных для прозрачного слоя. Поэтому Вашичек предлагает для металлических слоев новые формулы, существенно отличающиеся от старых и приводящие к иным численным результатам.

Цель настоящей статьи состоит в опровержении выводов Вашичека с конкретным указанием допущенных им ошибок. Вместе с тем будут приведены дополнительные соображения в пользу правильности обычных формул, отвергаемых Вашичеком. Критика теории Вашичека была уже ранее дана Книттлом в [2]; однако, она, судя по статье [3], оказалась недостаточной. Это и понятно, так как Книттл в своей критике не вполне последователен. Поскольку, однако, ошибочная теория Вашичека вошла также в его книгу [4], автор настоящей статьи полагает, что подробная и исчерпывающая критика этой теории является совершенно необходимой.

Сохраняя в основном обозначения статьи [1], напомним вкратце сущность разногласия. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания света прозрачным тонким слоем, расположенным между двумя прозрачными полубесконечными средами, выражаются общеизвестными формулами:

$$re^{i\delta}=\frac{r'+r''e^{-ix}}{1+r'r''e^{-ix}}, \tag{1}$$

$$te^{i\partial}=\frac{t't''e^{-\frac{ix}{2}}}{1+r'r''e^{-ix}}. \tag{2}$$

Здесь r' и r'' — амплитудные коэффициенты отражения на первой и второй границе раздела, t' и t'' — соответствующие коэффициенты пропускания. Все эти четыре величины определяются известными формулами Френеля. Далее,

$$x=\frac{4\pi n_1 d_1 \cos\varphi_1}{\lambda}, \tag{3}$$

где n_1 и d_1 — показатель преломления и толщина слоя, φ_1 — угол преломления в слое, λ — длина волны в вакууме. В дальнейшем n_0 и n будут обозначать показатели преломления первой и третьей сред, φ_0 — угол падения и φ — угол преломления в третьей среде.

Формулы (1) и (2) выводятся обычно путем рассмотрения многократных отражений плоской волны («луча») внутри слоя. Это значит, что вывод предполагает не только прозрачность слоя, т. е. вещественность n_1, но и условие $n_0 \sin\varphi_0 < n_1$, т. е. вещественность угла преломления φ_1. А тогда величины r', r'', t', t'' и x тоже вещественны.

Нужно заметить, что вышеупомянутый способ вывода формул (1) и (2) дает сначала более сложные формулы:

$$r_R e^{i\delta_R} = \frac{r'_R + r''_R (t'_R t'_L - r'_R r'_L) e^{-ix}}{1 - r'_L r''_R e^{-ix}}, \tag{4}$$

$$t_R e^{i\delta_R} = \frac{t'_R t''_R e^{-\frac{ix}{2}}}{1 - r'_L r''_R e^{-ix}}, \tag{5}$$

(см. формулы (4) и (7) в [1]), где индексы R и L указывают направление (справа или слева) падения света. Однако, так как, согласно формулам Френеля, для простой границы раздела

$$r_L = -r_R, \tag{6}$$

$$r_R^2 + t_R t_L = 1, \tag{7}$$

формулы (4) и (5) сразу приводятся к виду (1) и (2).

Все вышесказанное общепризнано. Разногласия начинаются при обобщении формул (1)—(2) и (4)—(5) на случай поглощающего (металлического) слоя. Много общего с этим случаем имеет также случай, когда слой прозрачен, но угол преломления φ_1 комплексный, т. е. когда вещество слоя является полноотражающим ($n_0 \sin\varphi_0 > n_1$). Наконец, возможен и такой случай, когда и третья среда является поглощающей или полноотражающей. Все эти случаи характеризуются тем, что некоторые (или все) из величин n_1, n, φ_1 и φ комплексны. Вместе с тем комплексна, согласно (3), также величина x.

Подставляя в формулы Френеля упомянутые комплексные значения, получим и для величин r_R, r_L, t_R и t_L комплексные значения, причем соотношения (6) и (7) останутся в силе, поскольку они на основании формул Френеля выполняются тождественно.

Возникает вопрос: если мы подставим эти новые комплексные значения в формулы (4) — (5) или, что равносильно, в формулы (1) — (2), то получим ли мы правильные значения для коэффициентов отражения и пропускания слоя?

Автор настоящей статьи считает правильным утвердительный ответ на этот вопрос *, Вашичек — отрицательный. Попробуем выяснить, в чем корень этого расхождения.

Доказательство своей точки зрения автор видит в следующем рассуждении (см. статью автора [5], а также, например, статью [6]). Хотя формулы (1) и (2) выведены путем рассмотрения многократного распространения и отражения плоской волны в слое с последующим суммированием амплитуд, окончательный вид этих формул не зависит от

* При этом, однако, в случае, если n и φ комплексны, формула для пропускания получает особый условный смысл (об этом подробнее ниже). Но та же формула для вещественных n и φ применима в обычном смысле при любых n_1 и φ_1. Формула же для отражения имеет обычный смысл во всех случаях, т. е. независимо от того, являются ли величины n и φ вещественными или комплексными.

способа вывода. Те же формулы нетрудно было бы вывести другим путем, именно, путем учета граничных условий для векторов поля на двух границах раздела согласно уравнениям Максвелла. Но хорошо известно, что уравнения Максвелла имеют совершенно одинаковый вид, независимо от того, вещественны ли величины n_1, n, φ_1, φ или комплексны. Поэтому и формулы (1) и (2) тоже должны иметь один и тот же вид, независимо от вещественности или комплексности величин n_1, n, φ_1, φ и зависящих от них r', r'', t', t'', x. Конечно, в случае комплексности этих величин тот ход мыслей, которым обычно пользуются для вывода формул (1) и (2) (учет многократных отражений), неприменим, поскольку тогда в слое или в третьей среде уже нет обычной плоской волны и «лучи» искривляются. Однако, неприменимость этого вывода вовсе не означает неправильности самих формул в этом случае; наоборот, как объяснено выше, вид формул независим от этого вывода и должен сохраняться при любых значениях n_1, n, φ_1, φ.

Обратимся теперь к точке зрения Вашичека. Он считает, прежде всего, что в случае металлического слоя формулы (6) и (7) не могут быть верны, поскольку формула (7), если r_R, t_R, t_L комплексны, противоречила бы закону сохранения энергии. Но так как все-таки эти формулы удовлетворяются теми значениями r_R, r_L, t_R, t_L, которые получаются из формул Френеля путем подстановки комплексных значений показателей преломления и углов преломления, то Вашичек определяет величины r_L', r_R'', t_L', t_R'' в формулах (4) и (5) другим способом, который, по его мнению, удовлетворяет закону сохранения энергии. Определяемые Вашичеком величины формулам (6) и (7) не удовлетворяют, поэтому он считает формулы (1) и (2) неприменимыми. Он думает, что нужно пользоваться формулами (4) и (5), где r_L', r_R'', t_L', t_R'' должны определяться не по формулам Френеля, а по его специальному рецепту.

По поводу этой точки зрения следует заметить следующее. В случае вещественных значений r_R, t_R, t_L соотношение (7) действительно выражает закон сохранения энергии, но это не значит, что тот же смысл этого соотношения должен сохраниться и для комплексных значений этих величин. Поэтому нет никакого основания отказываться от этого соотношения (и от соотношения (6)) и искать какие-то новые выражения для r_L', t_L' и т. д. вместо тех, которые даются непосредственно формулами Френеля. В самом деле, если плоская волна падает справа из прозрачной среды на границу раздела с поглощающей средой, или хотя бы прозрачной, но полноотражающей, то только коэффициент отражения r_R сохраняет свой обычный смысл, согласно которому $|r_R|^2$ есть энергетический коэффициент отражения. Величины же r_L, t_R, t_L утрачивают аналогичный смысл, так как поле не представляет собой во второй среде плоскую волну. Это стоит в связи с упомянутой выше невозможностью применять для вывода формул (1)—(2) или (4)—(5) многократные отражения и суммирование амплитуд. Притом здесь важно то, что не только те значения r_L, t_R, t_L, которые получаются по формулам Френеля, не имеют того смысла, который присущ этим величинам в случае наличия плоской волны во второй среде, но и никакое иное определение этих величин не может вернуть им этого смысла. А Вашичек, определяя заново эти величины, преследует, по-видимому, именно эту недостижимую цель — дать для них такие выражения, которые можно было бы считать амплитудными коэффициентами отражения и пропускания в том же смысле, какой применим в случае плоских волн. Ясно, что его результаты должны быть иллюзорны.

Итак, нет никакой необходимости стремиться к тому, чтобы соотношения (6) и (7) выражали закон сохранения энергии, как не нужно и формулы (4) и (5) выводить непременно методом суммирования амплитуд многократно отраженных лучей. Верность формул (4) и (5) и вытекающих из них формул (1) и (2) обеспечивается их независимостью от этого метода, если только придерживаться определения величин r_R, r_L, t_R, t_L через обычные формулы Френеля. То обстоятельство, что эти величины, кроме r_R, теряют при этом тот смысл, который они имеют для плоских волн, не аннулирует формул (1) и (2). Ведь эти формулы в этом смысле не нуждаются.

Приведем пример. Пусть на границе двух прозрачных сред происходит полное отражение, так что, полагая $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \beta i$, имеем $\mathrm{ch}\beta = \frac{n_0 \sin\varphi_0}{n_1}$. Тогда, ограничиваясь здесь случаем перпендикулярной поляризации, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} r_R &= e^{i\psi}, \\ r_L &= -e^{i\psi}, \\ t_R &= 2\cos\frac{\psi}{2}\, e^{\frac{i\psi}{2}}, \\ t_L &= -2i\sin\frac{\psi}{2}\, e^{\frac{i\psi}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\text{где} \qquad \mathrm{tg}\frac{\psi}{2} = \mathrm{tg}\varphi_0 \mathrm{th}\beta. \tag{9}$$

Соотношения (6) и (7), очевидно, удовлетворяются. Не следует думать, что если $t_R \neq 0$, то и энергетический коэффициент пропускания отличен от нуля. Так как во второй среде линии тока энергии («лучи») являются кривыми (см. [7]), то энергетический коэффициент пропускания не выражается через квадрат абсолютной величины амплитудного коэффициента пропускания. Первый равен нулю, а второй отличен от нуля. Неравенство $t_R \neq 0$, очевидно, описывает факт проникновения поля во вторую среду при полном отражении. А именно это явление играет первостепенную роль при рассмотрении отражения от тонкого полноотражающего слоя, когда отражение перестает быть полным. Аналогичное положение имеет место и в случае металлического слоя. А по теории Вашичека получается, что если первая граница раздела слоя является полноотражающей, то коэффициент пропускания слоя равен нулю. Но это противоречит давно известным теоретическим и опытным выводам из электромагнитной теории света. Уже давно «просачивание» света сквозь тонкий полноотражающий слой было рассмотрено как теоретически, так и экспериментально (см. [8, 9]).

Рассмотрим теперь подробно отражение света тонким металлическим слоем (при нормальном падении). Хотя ошибочность воззрений Вашичека по этому вопросу уже достаточно ясно показана выше, мы сможем здесь указать на один конкретный вывод из его теории, явная несостоятельность которого еще раз продемонстрирует, что эта теория покоится на ложных основах.

$$\text{Обозначая} \quad \left.\begin{aligned} r' &\to r' e^{i\delta'}, \\ r'' &\to r'' e^{i\delta''}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

имеем согласно формуле (1):

$$r^2 = \frac{r'^2 + r''^2 e^{-2x'} + 2r'r''e^{-x'}\cos(x + \delta' - \delta'')}{1 + r'^2 r''^2 e^{-2x'} + 2r'r''e^{-x'}\cos(x - \delta' - \delta'')}, \tag{11}$$

где

$$x = \frac{4\pi n_1 d_1}{\lambda}, \quad x' = \frac{4\pi\varkappa d_1}{\lambda}, \tag{12}$$

и $n_1 - i\varkappa \equiv \mathfrak{n}_1$ есть комплексный показатель преломления слоя. Вашичек же, пользуясь формулой (4), находит вместо (11) такую формулу:

$$r^2 = \left| \frac{r'e^{i\delta'} + r''e^{-x'}e^{-i(x-\delta'')}}{1 + r'r''e^{-x'}e^{-i(x+\delta'-\delta'')}} \right|^2 =$$

$$= \frac{r'^2 + r''^2 e^{-2x'} + 2r'r''e^{-x'}\cos(x + \delta' - \delta'')}{1 + r'^2 r''^2 e^{-2x'} + 2r'r''e^{-x'}\cos(x + \delta' - \delta'')}. \tag{13}$$

Эта формула сходна с (11), но отличается от нее тем, что аргумент косинуса в знаменателе совпадает с аргументом в числителе. Кроме того, $r''e^{i\delta''}$ имеет в (13) иное значение, чем в (11).

Независимо от вывода своей формулы Вашичек усматривает дополнительно ее правильность и неправильность формулы (11) в следующем рассуждении. В частном случае $r' = 1$ (это — гипотетический случай полноотражающего металла, имеющего $n_1 = 0$) формула (11) дает $r^2 < 1$, а формула (13) — $r^2 = 1$. Почему-то Вашичек считает, что $r^2 = 1$ вытекает из закона сохранения энергии. Поэтому он заключает, что формула (11) противоречит этому закону.

Однако, противоречия с законом сохранения энергии здесь нет, так как, согласно формуле (2), мы нашли бы для этого гипотетического случая, что $r^2 + \frac{n}{n_0}t^2 = 1$, что означало бы всего лишь отсутствие поглощения. А то, что на первой границе раздела отражение полно, вовсе не означает, что оно должно быть полным и для слоя. Наоборот, поскольку проникновение поля в слой должно иметь место в любом случае, часть света «просачивается» сквозь слой и $r^2 < 1$.

Вашичек требует, чтобы при $r' = 1$ было $r^2 = 1$ тождественно, независимо от толщины слоя. Но именно отсюда явствует, что это требование невыполнимо. Что будет, если толщина слоя устремится к нулю? Согласно Вашичеку, должно остаться $r^2 = 1$. Но это невозможно, так как, если слой исчезнет, то будет

$$r^2 = \left(\frac{n_0 - n}{n_0 + n}\right)^2. \tag{14}$$

Когда же и как происходит подобный скачок от значения 1 к значению $\left(\frac{n_0 - n}{n_0 + n}\right)^2$?

Интересно, что Вашичек сам пользуется условием (14) при $d_1 = 0$ для определения значения величины $r''e^{i\delta''}$ в (13) (см. формулы (42) и (43) и далее в [1]). Тем самым он впадает в противоречие с самим собой. Нетрудно обнаружить результирующую ошибку. Вашичек находит (формула (45) в [1]):

$$r''e^{i\delta''} = \frac{n - \mathfrak{n}_1}{n + \overset{*}{\mathfrak{n}}_1} \cdot \frac{\overset{*}{\mathfrak{n}}_1 + n_0}{\mathfrak{n}_1 + n_0}. \tag{15}$$

Если подставим в (13) это выражение вместо $r''e^{i\delta''}$ и $\dfrac{\mathfrak{n}_1 - n_0}{\mathfrak{n}_1 + n_0}$ вместо $r'e^{i\delta'}$, то получим:

$$r^2 = \left| \frac{(n + \mathfrak{n}_1^*)(\mathfrak{n}_1 - n_0) + (n - \mathfrak{n}_1)(\mathfrak{n}_1^* + n_0)\, e^{-x'}e^{-ix}}{(\mathfrak{n}_1 + n_0)(n + \mathfrak{n}_1^*) + (n - \mathfrak{n}_1)(\mathfrak{n}_1^* - n_0)e^{-x'}e^{-ix}} \right|^2. \qquad (16)$$

Но эта формула противоречива. Если примем в ней сначала $r' = 1$, т. е. $x = 0$ и $\mathfrak{n}_1^* = -\mathfrak{n}_1$, то после сокращения на $1 - e^{-x'}$ получим:

$$r^2 = \left| \frac{\mathfrak{n}_1 - n_0}{\mathfrak{n}_1 + n_0} \right|^2 = 1,$$

как и должно быть, поскольку формула (13) при $r' = 1$ дает $r^2 = 1$ тождественно. Но если сначала примем в (16) $d_1 = 0$, т. е. $x = 0$, $x' = 0$, то после сокращения на $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_1^*$ получим:

$$r^2 = \left(\frac{n - n_0}{n + n_0} \right)^2 \neq 1.$$

Это противоречит предыдущему результату. Наконец, если положим n_1 и d_1 одновременно малыми первого порядка, так что $x = 0$ (как малая второго порядка), то из (16) будем иметь:

$$r^2 = \left| \frac{2\,(n - n_0)n_1 - (n_0 + i\varkappa)(n + i\varkappa)x'}{2(n + n_0)n_1 + (n_0 - i\varkappa)(n + i\varkappa)x'} \right|^2. \qquad (17)$$

Отсюда видно, что r^2 зависит от отношения x'/n_1, т. е. от пути подхода к предельной точке $d_1 = 0$, $n_1 = 0$. Но это физически лишено смысла, так как бесконечно малые изменения не могут произвести конечного эффекта. Такой противоречивый результат неудивителен: он неизбежно вытекает из ошибочной формулы (13).

Наконец, подчеркнем еще раз, что теория Вашичека приводит к отказу от общепринятых граничных условий для векторов поля в теории Максвелла. Ведь формула (11), которую он отвергает, легко выводится не только по формуле (1), но и на основе граничных условий. Именно этим способом она получена, например, в работе [10], на которую Вашичек ссылается как якобы ошибочную. Между тем очень хорошо известно, что теория Максвелла полностью согласуется с законом сохранения энергии. Поэтому никак нельзя оправдать точку зрения Вашичека необходимостью «спасти» этот закон. Во всяком случае, будучи последователен, Вашичек должен был бы начать с ревизии самых элементарных положений теории Максвелла и показать, что именно они противоречат закону сохранения энергии. Но он этого не делает и не сделает, ибо это невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Vašíček, Zu den Formeln für das reflektierte und von einer dünnen Metall schicht durchgelassene Licht, Чехосл. физ. журнал, 7, 417, 1957.
2. Z. Knittl, Critical remarks on Vašíček's revision of the theory of the reflection of light from a thin metallic film, Чехосл. физ. журнал, 8, 131, 1958.
3. A. Vašíček, Answer to Knittl's critical remarks, Чехосл. физ. журнал, 8, 134, 1958.
4. A. Vašíček, Optika tenkych vrstev, Praha, 1956. Цитируется по [1—3].
5. П. Г. Кард, Графический метод расчета многослойных покрытий, ДАН СССР, **108**, 60, 1956.
6. F. Abelès, Recherches sur la propagation des ondes electromagnétiques sinusoïdales dans les milieux stratifiés. Application aux couches minces (2me partie), Ann. d. physique, **5**, **706**, 1950.

7. А. А. Эйхенвальд, О движении энергии при полном внутреннем отражении света, Журнал Русск. физ.-хим. общества, **41**, физ. отдел, 131, 1909.
8. E. E. Hall, The penetration of totally reflected light into the rarer medium, Phys. Rev., 15, 73, 1902.
9. C. Schaefer, G. Gross, Untersuchungen über die Totalreflexion, Ann. d. Physik, 32, 648, 1910.
10. H. Murmann, Die optischen Konstanten durchsichtigen Silbers, Zs. f. Phys., **80**, 161, 1933.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
22 VII 1958

VALGUSE ÕHUKESELT METALLIKIHILT PEEGELDUMISE JA SELLEST KIHIST LÄBIMINEKU TEOORIAST

P. Kard,
füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Resümee

Vašíček arendas [1,4] uue valguse peegeldumise ja läbimineku teooria selleks juhuks, kui valgus langeb õhukesele metallikihile. Tavaliselt kasutatavast teooriast (vt. näiteks [6]) erineb see teooria oluliselt mitme eelduse poolest, mille eesmärgiks on kindlustada energia jäävuse seaduse kehtivus. Hüpoteetilisel erijuhul, kui metall on täielikult peegeldav (sel juhul on tema murdumisnäitaja reaalosa n_1 võrdne nulliga), nõuab Vašíček, et peegeldumine kihilt oleks täielik, sõltumata kihi paksusest d_1. Käesolevas töös kritiseeritakse Vašíčeki teooriat. Esiteks näidatakse, et tavaliselt kasutatav teooria on juba kooskõlas energia jäävuse seadusega. Seega on Vašíčeki poolt teooriasse toodud muudatused vähemalt tarbetud. Teiseks — need muudatused on ka ebaõiged, sest nad on vastuolus Maxwelli elektromagnetilise välja teooriaga, mis omakorda on täiel määral kooskõlas energia jäävuse seadusega. Lõpuks — Vašíčeki poolt tuletatud peegeldumiskoefitsiendi valem on sisemiselt vastuoluline, sest juhul, kui $d_1 \to 0$, $n_1 \to 0$, oleneb selle valemi järgi arvutatav peegeldumiskoefitsiendi väärtus suhtest d_1/n_1, s. o. sellest viisist, kuidas lähenetakse nimetatud piirile. Kuid see järeldus ilmselt ei oma füüsikalist mõtet.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
22. VII 1958

ON THE THEORY OF THE REFLEXION AND THE TRANSMISSION OF LIGHT BY A THIN METALLIC FILM

P. Kard

Summary

Vašíček has proposed [1,4] a new theory of the reflexion and the transmission of light by a thin metallic film. This theory differs essentially from the customary one (see e. g. [6]) in several assumptions which aim at ensuring the law of conservation of energy. Particularly, in the hypothetical case of a total-reflecting metal (with the vanishing real part n_1 of its refractive index) Vašíček claims the totality of reflexion irrespective of the thickness d_1 of the film. This paper contains a criticism of Vašíček's theory. Firstly, it is shown that the familiar theory is already well in accordance with the law of conservation of energy. Thus, Vašíček's revision is at least unnecessary. Further, Vašíček's theory is also incorrect because there is a discrepancy between it and Maxwell's electromagnetic theory, which in its turn, is in full agreement with the law of conservation of energy. Finally, Vašíček's formula for the reflexion of a thin metallic film displays an intrinsic ambiguity, for in the case of $d_1 \to 0, n_1 \to 0$ its value depends on the ratio d_1/n_1, i. e. on the way or approximation to this limit. This result has obviously no physical sense.

Tartu State University

Received
July 22, 1958