EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VI KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1957, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VI
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1957, № 4

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1957.4.06

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

П. В. МЮРСЕПП

Целью настоящей работы является определение критического давления защемленной на контуре цилиндрической оболочки вращения. Рассматриваются два вида цилиндрической оболочки: а) оболочка средней длины и б) короткая оболочка.

Порядок допустимой асимптотической погрешности принимается $h^{0,5}$, где $h = \delta/R$ (δ — толщина оболочки, R — радиус кривизны оболочки), т. е. в уравнениях отбрасываем члены, порядок асимптотической величины которых меньше порядка главного члена в соотношении $h^{0,5}:1$.

1. Основные соотношения. Отнесем срединную поверхность оболочки к безразмерным координатам ξ и Θ, причем линии $\xi = \text{const}$ пусть будут направляющие, а линии $\Theta = \text{const}$ — образующие цилиндрической поверхности. Частные производные по ξ обозначим штрихом и частные производные по Θ точкой.

Нахождение критического давления сводится к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений

$$F^{\text{IV}} + 2F''^{\cdot\cdot} + F^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - W'' = 0, \tag{1.1}$$

$$q(W'' + 2W^{\cdot\cdot}) + F'' + \lambda^2(W^{\text{IV}} + 2W''^{\cdot\cdot} + W^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) = 0, \tag{1.2}$$

где $q = \dfrac{p}{2Et}$, $\lambda^2 = \dfrac{t^2}{12(1-\nu^2)}$, причем W — прогиб, F — функция напряжения, p — внешнее гидростатическое давление, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $t = h = \dfrac{\delta}{R}$. Уравнение (1.1) является условием совместности деформации, а уравнение (1.2) — условием равновесия. Выбираем решение системы (1.1), (1.2) в виде

$$F(\xi, \Theta) = f(\xi)\cos s\Theta,\ W(\xi, \Theta) = w(\xi)\cos s\Theta. \tag{1.3}$$

Для определения функций f, w и параметра q получим систему

$$\begin{gathered} f^{\text{IV}} - 2s^2f'' + s^4 f - w'' = 0, \\ q(w'' - 2s^2 w) + f'' + \lambda^2(w^{\text{IV}} - 2s^2 w'' + s^4 w) = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

В соответствии с формой решения (1.3) тангенциальные компоненты U, V вектора перемещения представим в виде

$$U(\xi, \Theta) = u(\xi)\cos s\Theta,\ V(\xi, \Theta) = v(\xi)\sin s\Theta. \tag{1.5}$$

Функции $u(\xi)$, $v(\xi)$ определяются из уравнений

$$u' = -s^2 f - \nu f'',\ sv + w = f'' + \nu s^2 f,\ -su + v' = 2(1+\nu)sf'. \tag{1.6}$$

При решении задачи рассмотрим такой вариант краевых условий, который, после исключения угловой координаты Θ, примет следующий вид:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0. \tag{1.7}$$

Дифференцируя второе уравнение (1.6) по ξ и подставляя его в третье, получим

$$f''' - (2 + \nu) s^2 f' = s^2 u + w'. \tag{1.8}$$

Обозначив $D = \dfrac{\partial}{\partial \xi}$, можем придать первому уравнению (1.4) форму

$$(D^2 - s^2)^2 f = D^2 w, \text{ откуда } f = \frac{D^2}{(D^2 - s^2)^2} w. \tag{1.9}$$

Подставляя полученное для f выражение в уравнение (1.8) и во второе уравнение (1.6), получим краевые условия выраженными через w:

$$\frac{D^5 - (2 + \nu) s^2 D^3}{(D^2 - s^2)^2} w - Dw = s^2 u, \quad \frac{D^4 + \nu s^2 D^2}{(D^2 - s^2)^2} w - w = sv \tag{1.10}$$

или после упрощения

$$-\frac{\nu D^2 + s^2}{(D^2 - s^2)^2} Dw = u, \quad \frac{(2 + \nu) D^2 - s^2}{(D^2 - s^2)^2} w = \frac{v}{s}. \tag{1.11}$$

Учитывая условия (1.7), получим краевые условия на обоих краях оболочки в виде системы уравнений

$$w = 0, \quad Dw = 0, \quad \frac{(2 + \nu) D^2 - s^2}{(D^2 - s^2)^2} w = 0, \quad \frac{\nu D^2 + s^2}{(D^2 - s^2)^2} Dw = 0. \tag{1.12}$$

Подставляя выражение (1.9) во второе уравнение (1.4), получим

$$[\lambda^2 (D^2 - s^2)^4 + q (D^2 - s^2)^2 (D^2 - 2s^2) + D^4] w = 0. \tag{1.13}$$

Здесь целесообразно ввести переменную $\xi_1 = s\left(\xi - \dfrac{l}{2}\right)$. Эта замена переменных соответствует соотношению между дифференциальными операторами $D_\xi = s D_{\xi_1}$ или упрощенно $D = s D_1$. Кроме того, обозначим для краткости $\alpha = q s^2$ и $\beta = \lambda s^2$. После указанной замены переменных можем уравнение (1.13) выразить в виде

$$[\beta^2 (D_1^2 - 1)^4 + \alpha (D_1^2 - 1)^2 (D_1^2 - 2) + D_1^4] w = 0. \tag{1.14}$$

К этому уравнению относятся краевые условия (1.12), которые после замены $D = s D_1$ примут вид

$$w = 0, \ D_1 w = 0, \ \frac{(2 + \nu) D_1^2 - 1}{(D_1^2 - s^2)^2} w = 0, \ \frac{1 + \nu D_1^2}{(D_1^2 - 1)^2} D_1 w = 0. \tag{1.15}$$

Предположим, что некоторые интегралы дифференциального уравнения имеют свойство увеличиваться при дифференцировании по ξ в h^{-m} раз, а при дифференцировании по Θ в h^{-n} раз, причем m и $n < 0{,}5$. Назовем такие интегралы основными интегралами. Таким образом

$$f' \sim h^{-m} f, \ f^{\cdot} \sim h^{-n} f, \ w' \sim h^{-m} w, \ w^{\cdot} \sim h^{-n} w. \tag{1.16}$$

Здесь m и n пока неизвестные числа, которые следует найти из условия минимума критической нагрузки q. Из работы Мизеса [1] уже известно, что минимальное значение q будем иметь в случаях $m < n$.*

Обозначим далее $w = w_0 + \overline{w}_0$, где w_0 — основной интеграл, а $\overline{w}_0$ — интеграл, описывающий краевой эффект.

Рассматривая только симметричную форму потери устойчивости, получим следующее решение для w:

$$w = A\cos u\,\xi_1 + B\,\mathrm{ch}\,v\,\xi_1 + C\,\mathrm{ch}\,\omega\,\xi_1 + \tilde{C}\,\mathrm{ch}\,\tilde{\omega}\,\xi_1. \qquad (1.17)$$

Здесь iu, v, ω, $\tilde{\omega}$ являются корнями κ характеристического уравнения

$$\beta^2(\kappa^2-1)^4 + \alpha(\kappa^2-1)^2(\kappa^2-2) + \kappa^4 = 0. \qquad (1.18)$$

Два первых интеграла

$$w_0 = A\cos u\xi_1 + B\,\mathrm{ch}\,v\xi_1$$

являются основными интегралами, соответствующими малым корням уравнения (1.18), а последние два интеграла представляют собой интегралы краевого эффекта

$$\overline{w}_0 = C\,\mathrm{ch}\,\omega\xi_1 \tilde{C}\,\mathrm{ch}\,\tilde{\omega}\xi_1.$$

Здесь ω и $\tilde{\omega}$ наибольшие по модулю корни характеристического уравнения.

2. Цилиндр средней длины. У цилиндра средней приведенной длины $m = 0$, т. е. порядок величины компонента перемещения w при дифференцировании по ξ не увеличивается. Имея в виду, что $D_1 = \frac{1}{s}D$ и $D \sim h^{-m}$, имеем $D_1 \sim h^n$. Дальше найдем $\alpha \sim h^{1,5-2n}$ и $\beta \sim h^{1-2n}$. Так как в данном случае $n = 0{,}25$, то $D_1 \sim h^{0,25}$, $\alpha \sim h$, $\beta \sim h^{0,5}$ и $\beta^2 \sim h$. На основе этих оценок уравнение (1.14) принимает вид

$$[D_1{}^4 - (2\alpha - \beta^2)]\,w = 0. \qquad (2.1)$$

Соответственно упрощаются краевые условия (1.15), принимая следующие значения:

$$w = 0,\ D_1 w = 0. \qquad (2.2)$$

Решением уравнения (2.1) при краевых условиях (2.2) является

$$w = A\cos u\xi_1 + B\,\mathrm{ch}\,u\xi_1, \qquad (2.3)$$

где u определяется уравнениями

$$u^4 - (2\alpha - \beta^2) = 0,\quad \mathrm{tg}\,ul_1 + \mathrm{th}\,ul_1 = 0, \qquad (2.4)$$

(здесь $l_1 = \frac{ls}{2}$).

---

* Кроме этих основных интегралов, существуют еще интегралы типа краевого эффекта, которые при дифференцировании по ξ возрастают в $h^{0,5}$ раз.

По формулам (2.4), учитывая, что $\alpha = qs^2$, получим для минимальной критической нагрузки выражение

$$q_{\min} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0 \lambda \sqrt{\lambda}}{l}. \tag{2.5}$$

Этому значению соответствуют

$$s^2 = \sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0}{l\sqrt{\lambda}}, \quad \alpha = \frac{2}{3}\beta^2, \quad \beta^2 = \sqrt{3}\,\varkappa_0^2\,\frac{\lambda}{l^2}, \quad B = 0{,}7260\,A. \tag{2.6}$$

3. Короткий цилиндр. Коротким цилиндром называем случай, при котором $m = 0{,}25$ и $n = 0{,}375$. Отсюда следует, что $D_1 \sim h^{0{,}125}$, $\alpha \sim h^{0{,}5}$, $\beta^2 \sim h^{0{,}5}$ и уравнение (1.14) для основных интегралов получает вид

$$[D_1^4 + (5\alpha - 4\beta^2)D_1^2 - (2\alpha - \beta^2)]w_0 = 0. \tag{3.1}$$

Приближенные значения интегралов краевого эффекта найдем, отбросив в дифференциальном уравнении (1.14) [а также в характеристическом уравнении (1.18)] все низшие производные, оставив лишь высшие производные, учитывая при этом порядок величины множителей дифференциального уравнения (в данном случае $m = 0{,}5$, $n = 0{,}375$ и $D_1 \sim h^{-0{,}125}$).

Для нахождения интегралов краевого эффекта ω и $\tilde{\omega}$ следует решить приближенное уравнение

$$\beta^2\kappa^4 + (\alpha - 4\beta^2)\kappa^2 + 1 = 0. \tag{3.2}$$

решением которого будет

$$\kappa^2 = \frac{4\beta^2 - \alpha \pm \sqrt{16\beta^4 - 8\beta^2\alpha + \alpha^2 - 4\beta^2}}{2\beta^2}. \tag{3.3}$$

Ввиду того, что краевой эффект имеет существенное значение лишь при более коротких оболочках, можем полученное выражение (3.3) упростить, взяв на основании (2.6) в первом приближении $\alpha = \frac{2}{3}\beta^2$. В таком случае получим

$$\kappa^2 = \frac{5}{3} \pm \frac{i}{\beta} = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1}{\beta^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{5\beta}.$$

Исходя из условий (1.15), имеем

$$\overline{w}_0 = -w_0, \quad D_1\overline{w}_0 = -D_1 w_0 \tag{3.4}$$

или

$$C\,\mathrm{ch}\,\omega l_1 + \tilde{C}\,\mathrm{ch}\,\tilde{\omega} l_1 = -(A\cos u l_1 + B\,\mathrm{ch}\,v l_1),$$

$$C\omega\,\mathrm{sh}\,\omega l_1 + \tilde{C}\tilde{\omega}\,\mathrm{sh}\,\tilde{\omega} l_1 = Au\sin u l_1 - Bv\,\mathrm{sh}\,v l_1. \tag{3.5}$$

Отсюда для постоянной C найдем выражение

$$C = \frac{-A(\tilde{\omega}\,\mathrm{sh}\,\tilde{\omega}l_1 \cdot \cos ul_1 + u \sin ul_1 \cdot \mathrm{ch}\,\tilde{\omega}l_1) - B(\tilde{\omega}\,\mathrm{sh}\,\tilde{\omega}l_1 \cdot \mathrm{ch}\,vl_1 - v\,\mathrm{sh}\,vl_1 \cdot \mathrm{ch}\,\tilde{\omega}l_1)}{\tilde{\omega}\,\mathrm{ch}\,\omega l_1\,\mathrm{sh}\,\tilde{\omega}l_1 - \omega\,\mathrm{ch}\,\tilde{\omega}l_1 \cdot \mathrm{sh}\,\omega l_1}. \tag{3.6}$$

Подставим выражения C и $\tilde{C}$ в краевые условия (1.15), которые в случае не очень короткого цилиндра упрощаются в следующие:

$$(-1 + \nu D_1^2)w_0 + \frac{2+\nu}{D_1{}^2}\,\overline{w}_0 = 0, \quad [1 + (2+\nu)D_1^2]D_1 w_0 + \frac{\nu}{D_1}\,\overline{w}_0 = 0. \tag{3.7}$$

Тогда получим отношение

$$\frac{u[1-(2+\nu)u^2]\,\mathrm{tg}\,ul_1 + \frac{\nu}{\varrho}\left[2\sqrt{\varrho}\cos\frac{\varphi}{2} + u\,\mathrm{tg}\,ul_1\right]}{(1+\nu u^2) + \frac{2+\nu}{\varrho^2}\left[\varrho(1+2\cos\varphi) + 2u\sqrt{\varrho}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\,ul_1\right]} =$$

$$= \frac{v[1+(2+\nu)v^2]\,\mathrm{th}\,vl_1 - \frac{\nu}{\varrho}\left[2\sqrt{\varrho}\cos\frac{\varphi}{2} - v\,\mathrm{th}\,vl_1\right]}{(1-\nu v^2) + \frac{2+\nu}{\varrho^2}\left[\varrho(1+2\cos\varphi) - 2v\sqrt{\varrho}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{th}\,vl_1\right]}, \tag{3.8}$$

которое можем упростить в следующее:

$$-[1-2(1+\nu)u^2]u\,\mathrm{tg}\,ul_1 + \frac{2\nu^2}{\sqrt{\varrho}}u^2\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{\nu u}{\varrho}\,\mathrm{tg}\,ul_1 =$$

$$= [1+2(1+\nu)v^2]v\,\mathrm{th}\,vl_1 - \frac{2\nu^2}{\sqrt{\varrho}}v^2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\nu v}{\varrho}\,\mathrm{th}\,vl_1. \tag{3.9}$$

С точностью $h^{0.5}$ можем придать этому уравнению следующий вид:

$$[2(1+\nu)u^2 - 1]u\,\mathrm{tg}\,ul_1 + \frac{2\nu^2}{\sqrt{\varrho}}u^2\cos\frac{\varphi}{2} = [2(1+\nu)v^2 + 1]v\,\mathrm{th}\,vl_1 -$$

$$-\frac{2\nu^2}{\sqrt{\varrho}}v^2\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{3.10}$$

Учитывая, что ν^2 мало́, можем полученное уравнение еще более упростить:

$$[2(1+\nu)u^2 - 1]u\,\mathrm{tg}\,ul_1 = [2(1+\nu)v^2 + 1]v\,\mathrm{th}\,vl_1. \tag{3.11}$$

Оценка величины членов, содержащих ν^2, дается в следующем разделе работы.

Тот же самый результат получим из уравнения (3.1), принимая краевые условия равными

$$(-1 + \nu D_1^2)w_0 = 0, \quad [1 + (2+\nu)D_1^2]D_1 w_0 = 0, \tag{3.12}$$

т. е. не учитывая краевой эффект.

Входящие в (3.11) значения u и v выражаются через α и β формулами

$$u=\sqrt{\sqrt{2\alpha-\beta^2+\left(\frac{5}{2}\alpha-2\beta^2\right)^2}+\frac{5}{2}\alpha-2\beta^2},$$
$$v=\sqrt{\sqrt{2\alpha-\beta^2+\left(\frac{5}{2}\alpha-2\beta^2\right)^2}-\left(\frac{5}{2}\alpha-2\beta^2\right)}. \tag{3.13}$$

Для получения уравнения, соответствующего условию $\frac{dq}{ds}=0$, определим из первого уравнения (3.11) производную по s. Тогда будем иметь

$$\left\{\left[\frac{6(1+\nu)x^2}{l_1{}^2}-1\right]\operatorname{tg}x+\left[\frac{2(1+\nu)x^3}{l_1{}^2}-x\right]\frac{1}{\cos^2 x}\right\}x'-\frac{4(1+\nu)x^3}{sl_1{}^2}\operatorname{tg}x=$$
$$=\left\{\left[\frac{6(1+\nu)y^2}{l_1{}^2}+1\right]\operatorname{th}y+\left[\frac{2(1+\nu)y^2}{l_1{}^2}+y\right]\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}\right\}y'-\frac{4(1+\nu)y^3}{sl_1{}^2}\operatorname{tg}y, \tag{3.14}$$

причем $x=ul_1,\ y=vl_1,$ (3.15)

$$x'=\frac{l_1}{s}\,\frac{(3\alpha-2\beta^2)+(5\alpha-6\beta^2)u^2}{u\sqrt{2\alpha-\beta^2+\left(\frac{5}{2}\alpha-2\beta^2\right)^2}},\quad y'=\frac{l_1}{s}\,\frac{(3\alpha-2\beta^2)-(5\alpha-6\beta^2)v^2}{v\sqrt{2\alpha-\beta^2+\left(\frac{5}{2}\alpha-2\beta^2\right)^2}}.$$

Из выражений (3.13) найдем, что

$$\alpha=\frac{1}{3}[4u^2v^2+(v^2-u^2)],\quad \beta^2=\frac{2}{3}\left[\frac{5}{2}u^2v^2+(v^2-u^2)\right]. \tag{3.16}$$

Подставив найденные для α и β^2 выражения в уравнения (3.15) и полученные таким путем выражения для x' и y' в свою очередь в уравнение (3.14), найдем

$$\frac{[6(1+\nu)u^2-1]\frac{\operatorname{tg}ul_1}{ul_1}+[2(1+\nu)u^2-1]\frac{1}{\cos^2 ul_1}}{u^2+v^2}[(2-10u^2)u^2v^2+(1+7u^2)(u^2-$$
$$-v^2)]-\frac{3u}{l_1}\operatorname{tg}ul_1=\frac{[6(1+\nu)v^2+1]\frac{\operatorname{th}vl_1}{vl_1}+[2(1+\nu)v^2+1]\frac{1}{\operatorname{ch}^2 vl_1}}{u^2+v^2}[(2+$$
$$+10v^2)u^2v^2+(1-7v^2)(u^2-v^2)]+\frac{3v}{l_1}\operatorname{th}vl_1. \tag{3.17}$$

Давая величине l_1 ряд конкретных значений и решая совместно уравнения (3.11) и (3.17), получим для u и v значения, на основании которых при помощи выражений (3.16) найдем соответствующие значения q, s и l, а вместе с тем можем выразить и искомую зависимость $q=q(l)$. В табл. 1 представлены значения u, v, α, β^2, соответствующие длине оболочки l.

Таблица 1

$l_1 = \frac{ls}{2}$	l	u	v	α	β^2
3	0,297	0,565	0,510	0,0910	0,0990
6	0,790	0,345	0,358	0,0235	0,0316
9	1,61	0,245	0,254	0,00661	0,00935
12	2,72	0,189	0,194	0,00244	0,00355
15	4,18	0,153	0,156	0,00107	0,00157

В вычислениях принято $\nu = 0{,}3$, $\lambda = \frac{1}{36^2}$.

4. Приближенные способы нахождения критической нагрузки в случае короткого цилиндра. Ввиду того, что определение минимальной критической нагрузки короткой цилиндрической оболочки вышеизложенным точным методом сопряжено с весьма громоздкими вычислениями, представляет интерес найти подходящие приближенные способы.

Решим задачу при помощи разложения в ряд по малому параметру. Исходя из первого выражения (3.16), получим

$$q = \frac{\alpha}{s^2} = \frac{1}{3s^2 l_1{}^4}[4x^2y^2 + l_1^2(\nu^2 - x^2)]. \tag{4.1}$$

Пусть в случае короткого цилиндра

$$q = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0 \lambda^{3/2}}{l}\,\psi, \quad s^2 = \sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0}{l\sqrt{\lambda}}\,\sigma^2, \tag{4.2}$$

тогда

$$l_1^2 = \frac{1}{4}\sqrt[4]{3}\,\varkappa_0\frac{l}{\sqrt{\lambda}}\,\sigma^2,$$

и, обозначая $x_0 = \frac{\varkappa_0}{2}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda}}{l}$, получим на основании (3.16) систему уравнений

$$\begin{gathered} 12\,x_0^4\,\sigma^6\psi = 8x^2y^2 + \sqrt[4]{3}\,\frac{x_0}{\varepsilon}\,\sigma^2(y^2 - x^2), \\ 9\,x_0{}^4\,\sigma^8 = 5x^2y^2 + \sqrt[4]{3}\,\frac{x_0}{\varepsilon}\,\sigma^2(y^2 - x^2). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Воспользуемся следующими разложениями в ряд

$$\begin{gathered} \sigma = 1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \ldots \qquad \psi = 1 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots \\ x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \qquad y = x_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots \end{gathered} \tag{4.4}$$

Тогда, решая систему (4.3), получим

$$\psi_1 = \frac{x_1 + y_1}{2x_0}. \tag{4.5}$$

На основании краевых условий (3.10) можем написать

$$x\left[2(1+x)\frac{x^2}{l_1^2} - 1\right]\operatorname{tg} x + \frac{2\nu^2}{\sqrt{\varrho}}\frac{x^2}{l_1}\cos\frac{\varphi}{2} = y\left[2(1+\nu)\frac{y^2}{l_1^2} + 1\right]\operatorname{th} y - \tag{4.6}$$
$$- \frac{2\nu^2}{\sqrt{\varrho}}\frac{y^2}{l_1}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Разлагая полученное выражение в ряд и учитывая только члены до порядка ε (включительно), получим

$$x_1 + y_1 = -\frac{2x_0 \operatorname{th} x_0}{\sqrt[4]{3}}(5 + 4\nu - x_0 \operatorname{th} x_0) + 4\sqrt{2}\,\nu^2 x_0. \tag{4.7}$$

При $\nu = 0{,}3$ получим $\psi_1 = -2{,}65$. Отбрасывая в уравнении (4.7) член, содержащий ν^2, имеем $\psi_1 = -2{,}90$. Минимальной критической нагрузке

$$q = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0 \lambda^{3/2}}{l}(1 - 2{,}65\,\varepsilon) \tag{4.8}$$

соответствует (исходя из условия $\alpha = \frac{2}{3}\beta^2$) $\psi = \sigma^2$, или

$$s^2 = \sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0}{l\sqrt{\lambda}}(1 - 2{,}65\varepsilon), \quad \alpha = \frac{2}{3}\beta^2, \quad \beta^2 = \lambda^2 s^4. \tag{4.9}$$

Недостатком изложенного метода является плохая сходимость рядов, что сказывается при больших значениях ε ($\varepsilon > 0{,}05$).

Уравнение (3.1) можно точно решить, если исключить из него средний член. Проведенные вычисления показывают, что около точки минимума критической нагрузки в промежутке безразмерных длин оболочки $\frac{1}{3} \leqslant l \leqslant 1$ при обычных относительных толщинах с достаточной точностью выполнено условие $u \sim v$. Но это условие равносильно условию $5\alpha - 4\beta^2 \sim 0$. На основании этого вместо выражения (3.1) получим уравнение (2.1), к которому относятся краевые условия (3.12). Согласно формуле (2.4) из краевых условий получаем

$$u^2 = \frac{1}{2(1+\nu)}\;\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{th} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{th} x} \tag{4.10}$$

или в других обозначениях

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{th} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{th} x}\cdot\frac{\sigma^2}{x^2} - \frac{4(1+\nu)}{\sqrt[4]{3}\,x_0}\varepsilon = 0. \tag{4.11}$$

Минимальную критическую нагрузку найдем следующим образом:

$$q = \frac{\alpha}{s^2} = \frac{1}{2s^2}(\beta^2 + u^4) = \frac{1}{2s^2}(\lambda^2 s^4 + x^4 l_1^4).$$

С другой стороны,

$$q=\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0\lambda^{3/2}}{l}\,\psi=\frac{1}{2}\sqrt[4]{3}\,\frac{\varkappa_0\lambda^{3/2}}{l}\left(\sigma^2+\frac{1}{3\sigma^6}\,\frac{x^4}{x_0{}^4}\right).$$

Таким образом,

$$\psi=\frac{3}{4}\left(\sigma^2+\frac{1}{3\sigma^6}\,\frac{x^4}{x_0{}^4}\right). \tag{4.12}$$

Задача состоит теперь в том, чтобы определить минимум выражения

$$\sigma^2+\frac{1}{3\sigma^6}\,\frac{x^4}{x_0{}^4},$$

если x и σ^2 удовлетворяют условие (4.11).

Решив эту задачу по методу Лагранжа путем введения неопределенных множителей, получим уравнения

$$1-\frac{x^4}{\sigma^8 x_0{}^4}+\Lambda\frac{1}{x^2}\,\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{th}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{th}x}=0, \tag{4.13}$$

$$\frac{4}{3\sigma^6}\,\frac{x^3}{x_0{}^4}+\Lambda\sigma^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\,\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{th}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{th}x}\right)=0. \tag{4.14}$$

После исключения Λ получим

$$\sigma^8=\frac{x^4}{x_0{}^4}\left[1-\frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{th}^2x}{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{th}^2x+x\left(\dfrac{\operatorname{th}x}{\cos^2x}-\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{ch}^2x}\right)}\right]. \tag{4.15}$$

Это уравнение дает нам возможность легко найти в параметрическом виде $\psi=\psi(x)$ и $\varepsilon=\varepsilon(x)$.

Имеется еще простой приближенный способ для решения уравнения (2.1) и для нахождения минимальной критической нагрузки.

Из условий $2\alpha-\beta^2=u^4$ и $5\alpha-4\beta^2=0$ вытекает, что $\frac{\beta^2}{u^4}=\frac{5}{3}$.

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\frac{u^2}{l_1{}^2}=4\sqrt{\frac{3}{5}}\,\varepsilon^2,\quad \frac{u}{l_1}=2\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\,\varepsilon.$$

Далее находим

$$u^2=\frac{u}{l_1}\,ul_1=2\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\,\varepsilon x,$$

на основании чего можно (4.10) переписать в виде

$$\varepsilon=\frac{1}{4(1+\nu)x}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\,\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{th}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{th}x}. \tag{4.16}$$

Из условия $5\alpha-4\beta^2=0$ получим для Ψ следующее выражение:

$$\Psi=\frac{12}{5}\sqrt[4]{\frac{5}{9}}\,\frac{x}{\varkappa_0}. \tag{4.17}$$

Описанный приближенный способ приводит к несколько завышенным результатам по сравнению с точным способом, причем при $\varepsilon \to 0$ разница составляет 3,6%. Таким образом погрешность приближенного способа находится в пределах нашей допустимой погрешности. Этот способ решения оказывается также целесообразным при решении вопроса об устойчивости конической оболочки.

Результаты, полученные различными способами, представлены на рис. 1.

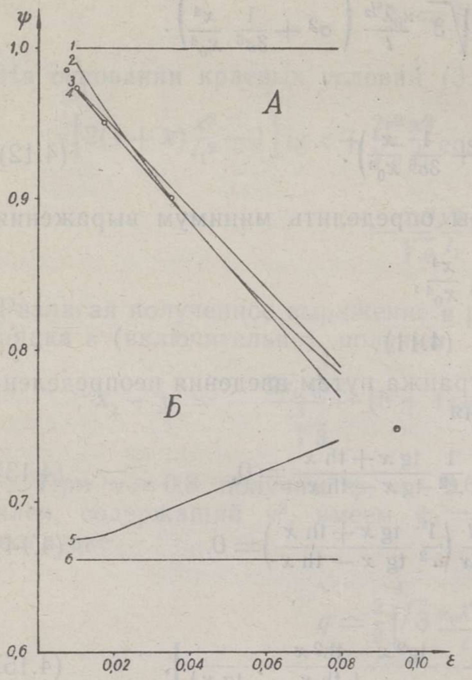

Рис. 1. *А*. Случай защемленных краев: *1* — цилиндр средней длины; *2* — короткий цилиндр по приближенному (последнему) способу; *3* — короткий цилиндр в случае $\psi = 1 - 2{,}65\,\varepsilon$; *4* — короткий цилиндр в случае $\psi = 1 - 2{,}90\,\varepsilon$; ооо — короткий цилиндр по разделу 3.

Б. Случай шарнирной опоры: *5* — короткий цилиндр согласно результатам Х. М. Муштари и А. В. Саченкова [2]; *6* — цилиндр средней длины.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Mises, Zeitschrift VDI, B. 58, 1914, S. 750. [С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М. ГИТТЛ, 1955].
2. Х. М. Муштари, А. В. Саченков, Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления, Прикладная математика и механика, т. XVIII, вып. 6, 1954.

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
31 V 1957

ÜHTLASELT JAOTATUD VÄLISRÕHU ALL OLEVA RINGSILINDRILISE KOORIKU STABIILSUSEST

P. Müürsepp

Resümee

Töös vaadeldakse kinnitatud äärtega silindrilise kooriku kahte põhijuhtu: keskmise pikkusega ja lühikest koorikut. Saadud tulemusi võrreldakse omavahel.

Võrrandite tuletamisel on silmas peetud asümptootilise täpsuse nõuet $h^{0,5}$, s. t. avaldistest on välja jäetud kõik liikmed, mille asümptootiline suurusjärk on võrrandisse jäänud suurima liikmega võrreldes väiksemas suhtes $h^{0,5}$:1.

Lühikese silindri puhul on peale § 3 esitatud täpse lahendusviisi antud veel rida ligikaudseid meetodeid minimaalse kriitilise koormise leidmiseks.

Tulemused on kujutatud joonisel 1:

A. Kinnitatud äärte puhul: *1* — keskmise pikkusega silinder; *2* — lühike silinder ligikaudse (viimase) meetodi järgi; *3* — lühike silinder, kus $\psi = 1 - 2{,}65\varepsilon$; *4* — lühike silinder, kus $\psi = 1 - 2{,}90\varepsilon$; ооо — lühike silinder § 3 järgi.

Б. Šarniirsete äärte puhul: *5* — lühike silinder H. Muštari ja A. Satšenkovi poolt saadud tulemuste põhjal; *6* — keskmise pikkusega silinder.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Füüsika ja Astronoomia Instituut

Saabus toimetusse
31. V 1957

ABOUT THE STABILITY OF THE CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED EXTERNAL PRESSURE

P. Müürsepp

Summary

The treatise deals with two cases of cylindrical shells having clamped edges, viz. with shells of medium length and short ones. The results obtained are compared.

In the case of short cylinders the author presents, besides the exact solution (§ 3), a number of approximate methods for finding the minimal critical load.

The dependence of the load parameter ψ on the quantity of $\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda}}{l}$ is presented in Figure 1:

A. In the case of clamped edges: *1* — a cylinder of medium length; *2* — a short cylinder (the last approximate method); *3* — a short cylinder in the case of $\psi = 1 - 2{,}65\varepsilon$; *4* — a short cylinder in the case of $\psi = 1 - 2{,}90\varepsilon$; ооо — a short cylinder according to § 3.

Б. In the case of freely supported edges: *5* — a short cylinder by H. Mushtari and A. Sachenkov; *6* — a cylinder of medium length.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Physics and Astronomy

Received
May 31, 1957