EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VIII KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1959. NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VIII
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1959, № 3

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1959.3.03

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Э. ЮРИМЯЭ

Будем рассматривать матричные преобразования

$$y_n = \sum_k A_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

где $A_{nk} \in (X \to Y)$ и $X$, $Y$ — некоторые банаховы пространства. Преобразование (1) определяет метод суммирования $\mathfrak{A} = (A_{nk})$. Такой метод сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1° $\lim\limits_n A_{nk} x = A_k x \quad (x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$

2° $\lim\limits_n \sum\limits_k A_{nk} x = A x \quad (x \in X)$

3° $\sup\limits_{\|x_k\| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_{k=0}^{p} A_{nk} x_k \right\| \leqslant M \quad (n,\ p = 0, 1, \ldots)$

Мы называем метод, сохраняющий сходимость, конулевым, если

$$\lim_r g\left(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x\right) = 0$$

для всех $x \in X$ и $g \in \overline{Y}^*$ (см.[3]). Остальные методы, сохраняющие сходимость, называем корегулярными.

В дальнейшем используем следующие обозначения. Через $c_X$, $m_X$ обозначим классы всех сходящихся, соответственно ограниченных последовательностей в $X$, через $c^0{}_X$ — класс всех последовательностей, сходящихся к нулю. При нормировке $\|\mathfrak{x}\| = \sup\limits_k \|x_k\|$ классы $c_X$, $m_X$ и $c^0{}_X$ превращаются в банаховы пространства. Символом $\mathfrak{A}^*$ будем обозначать множество всех $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ $(x_k \in X)$, для которых $\mathfrak{y} = \{\sum\limits_k A_{nk} x_k\} \in c_Y$ и которые назовем полем суммируемости. Отметим еще, что последовательности

$$\mathfrak{e}(x) = \{x, x, \ldots, x, \ldots\} \quad (x \in X)$$

и

$$\mathfrak{e}_k(x) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ нулей}}, x, 0, \ldots\} \quad (x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$$

составляют основное множество в пространстве $c_X$.

В § 1 будем рассматривать одно достаточное условие для того, чтобы ограниченные расходящиеся последовательности были точками прикосновения множества $c_X$ в $\mathfrak{A}^*$ (условие $(T)$). Мы увидим, что при помощи этого условия, удовлетворяющегося для довольно широкого класса корегулярных методов, разрешаются некоторые важные вопросы методов суммирования, например, суммирование неограниченных последовательностей (п. 2.2), суммирование ограниченных расходящихся последовательностей (п. 2.3) и совершенность реверсивных методов (п. 2.4).

## § 1. Условие $(T)$

В дальнейшем мы будем рассматривать корегулярные методы суммирования особого рода, а именно те, для которых выполняется следующее условие:

*из равенства*

$$(T) \qquad \lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0$$

*при всех* $x \in X$ *вытекает* $\varphi = 0$ *в* $\overline{Y}^*$.

Класс всех методов суммирования, для которого выполняется условие $(T)$, обозначим через $\mathfrak{T}$. Из определения конулевого метода ясно, что $\mathfrak{T}$ составляет некоторый класс корегулярных методов. Класс $\mathfrak{T}$ не пустой, так как он содержит все методы, для которых ряд $\sum_k A_k x$ сходится для любого $x \in X$, и оператор, определенный равенством $P(x) = Ax - \sum_k A_k x$, имеет правый обратный. В случае $X = Y$ условие $(T)$ выполнено для всех регулярных методов. Если $Y = R_1$ (поле комплексных чисел), то всегда выполнено условие $(T)$.

Если выполнено условие $(T)$, то можно доказать, что каждая ограниченная последовательность является точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей в $\mathfrak{A}^*$. Для доказательства рассмотрим непрерывный линейный функционал в $\mathfrak{A}^*$

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_k \psi_k(x_k) + \sum_n \varphi_n(y_n) + \varphi(y)$$

где $\psi_k$ — непрерывные линейные функционалы в $X$, $\varphi$, $\varphi_n$ — в $Y$ и, кроме того, выполнено условие

$$\sum_n \|\varphi_n\| < \infty$$

(см. [3]).

Выясним, при каких условиях

$$\sum_n \varphi_n(y_n) = \sum_n \varphi_n(\sum_k A_{nk} x_k) = \sum_k \sum_n \varphi_n(A_{nk} x_k).$$

Так как метод $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость, то на основе соответствующих условий

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} g A_{nk} x_k \right\| \leqslant M \|g\| \quad (n, p = 0, 1, \ldots), \ \|x_k\| \leqslant 1$$

и отсюда

$$\sum_k \|gA_{nk}\| \leqslant M\|g\| \quad (n=0,1,\ldots)$$

для всех $g \in \bar{Y}^*$. Учитывая последнее обстоятельство, можно сказать, что ряд $\sum\limits_n \varphi_n(y_n)$ абсолютно сходится для любой ограниченной последовательности $\mathfrak{x} = \{x_k\} \in \mathfrak{A}^*$ и

$$\sum_n \varphi_n( \sum_k A_{nk}x_k) = \sum_k \sum_n \varphi_n A_{nk} x_k$$

Итак, при $\mathfrak{x} = \{x_k\} \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_k g_k(x_k) + \varphi(y) \tag{2}$$

где

$$g_k = \psi_k + \sum_n \varphi_n A_{nk}$$

Из равенства (2) легко следует, что каждая последовательность $\mathfrak{x} \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$ является точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей в пространстве $\mathfrak{A}^*$, если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$. Для доказательства этого достаточно показать, что любой непрерывный линейный функционал $f(\mathfrak{x}) = 0$ для $\mathfrak{x} \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$, если $f(\mathfrak{x}) = 0$ для всех $\mathfrak{x} \in c_X$.

Действительно, пусть $f(\mathfrak{x}) = 0$ при всех $\mathfrak{x} \in c_X$. Тогда, выбрав $\mathfrak{e}^*_r(x) = \mathfrak{e}(x) - \sum\limits_{k=0}^{r} \mathfrak{e}_k(x)$, будем иметь

$$\lim_r f[\mathfrak{e}^*_r(x)] = \lim_r \sum_{k=r+1}^{\infty} g_k(x_k) + \lim_r \varphi(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0$$

откуда, по условию $(T)$, $\varphi = 0$. Если $\bar{\mathfrak{x}} = \{\bar{x}_k\}$, где

$$\bar{x}_k = \begin{cases} sgn\ g_k(x) \cdot x, & k \leqslant m \\ 0 & , k > m \end{cases}$$

то из $f(\bar{\mathfrak{x}}) = 0$ вытекает, что $g_k = 0$ $(k = 0,1,\ldots)$. Итак, $f(\mathfrak{x}) = 0$ при всех $\mathfrak{x} \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$, если $f(\mathfrak{x}) = 0$ для каждого $\mathfrak{x} \in c_X$.

## § 2. Применения

2.1. Как применение § 1 обобщим для рассматриваемых методов теорему Мазура-Орлича о совместности матричных методов на множестве ограниченных последовательностей (см. теорема 2[7], теорема 6[8], теорема 6.4[6]).

Теорема. *Пусть метод $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{x}^* \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$. Если $\mathfrak{B}^* \supseteq \mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}\{\mathfrak{x}\} = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}$ при $\mathfrak{x} \in c_X$, то $\mathfrak{B}\{\mathfrak{x}^*\} = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}^*\}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{B}\{\mathfrak{x}\} = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}$ $(\mathfrak{x} \in c_X)$, то $g(\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} - \mathfrak{B}\{\mathfrak{x}\}) = 0$ $(\mathfrak{x} \in c_X)$ для каждого непрерывного линейного функционала $g$ в $Y$. Но тогда последнее равенство верно для всех $\mathfrak{x} \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$ (см. § 1) и, в частности,

$$g(\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}^*\} - \mathfrak{B}\{\mathfrak{x}^*\}) = 0$$

для каждого непрерывного линейного функционала $g$ в $Y$, откуда

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}^*\} - \mathfrak{B}\{\mathfrak{x}^*\} = 0$$

или

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}^*\} = \mathfrak{B}\{\mathfrak{x}^*\}$$

2.2. Применяя результаты § 1, докажем еще теорему о существовании неограниченной последовательности в поле суммируемости метода $\mathfrak{A}$, удовлетворяющего условию $(T)$.

Теорема. *Если корегулярный метод $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ суммирует только ограниченные последовательности, то он суммирует только сходящиеся последовательности.*

Доказательство. Покажем, что если $\mathfrak{A}^*$ содержит ограниченную расходящуюся последовательность, то $\mathfrak{A}^*$ содержит и неограниченную последовательность. Пусть $\mathfrak{x}_1 \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{x}_1 \overline{\in} c_X$. Тогда по § 1 $\mathfrak{x}_1$ является точкой прикосновения множества $c_X$ в пространстве $\mathfrak{A}^*$, не являясь точкой прикосновения $c_X$ в пространстве $m_X$. Тогда по теореме 4.5 [6] не может быть выполнено соотношение $m_X \supset \mathfrak{A}^*$, т. е. должна существовать последовательность $\mathfrak{x}_2 \in \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{x}_2 \overline{\in} m_X$.

Из доказанной теоремы в качестве следствия можно получить теорему 7.1 [6] и следствие II [3].

2.3. Суммирование ограниченных расходящихся последовательностей. В 2.2 мы видели, что в поле суммируемости всегда существует неограниченная последовательность, если только метод суммирует расходящиеся последовательности. Интересно установить, при каких условиях метод $\mathfrak{A}$ суммирует ограниченные последовательности. Из теоремы 2 [2] можно получить, что (в случае $A_{nk} \to A_k$ $(k = 0,1,\ldots)$ по норме) никакой корегулярный метод $\mathfrak{A}$ не может суммировать все ограниченные последовательности. Действительно, из теоремы 2 [2]

$$\lim_n \left\| \sum_{k=0}^{p} (A_{nk} - A_k)\, x \right\| = 0$$

равномерно относительно $p = 0,1,\ldots$ . Отсюда

$$\lim_n \sum_k A_{nk}x = \sum_k A_k x$$

Из последнего равенства ясно, что

$$\lim_r g\left(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x\right) = 0$$

для всех $g \in \overline{Y}^*$ и $x \in X$, т. е. метод $\mathfrak{A}$ является конулевым методом.

Теперь возникает вопрос, при каких условиях корегулярный метод суммирует ограниченную расходящуюся последовательность? Ответом на этот вопрос является следующая теорема (обобщение теоремы 1 [5]).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ корегулярный метод, удовлетворяющий условию (T). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $c_X$ — *замкнуто в* $\mathfrak{A}^*$;

(b) $\mathfrak{A}$ *не суммирует ограниченную расходящуюся последовательность.*

Доказательство.

(a) $\to$ (b). Предположим, что $c_X$ замкнуто в $\mathfrak{A}^*$. Тогда $\mathfrak{A}$ корегулярен, так как при конулевом методе $\mathfrak{e}(x)$ оказывается точкой прикосновения множества $c^0{}_X$в $\mathfrak{A}^*$; в силу замкнутости $c^0{}_X$ в$c_X$ то же самое должно иметь место и в $c_X$ (в этом случае топологии эквивалентны), что очевидно неверно.

Если метод $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$, то на основании § 1 должно иметь место соотношение

$$c_X \subset m_X \cap \mathfrak{A}^* \subset \overline{c}_X$$

откуда, в силу замкнутости $c_X$ в $\mathfrak{A}^*$, $m_X \cap \mathfrak{A}^* = c_X$, т. е. метод $\mathfrak{A}$ не суммирует ограниченную расходящуюся последовательность.

(b) $\to$ (a). Предположим противное, т. е. что $c_X$ не замкнуто в $\mathfrak{A}^*$. Тогда найдется последовательность $\{\mathfrak{x}_r\}$ $(\mathfrak{x}_r \in c_X)$ такая, что

$$\mathfrak{x}_r \to \mathfrak{x} \quad (r \to \infty)$$

где $\mathfrak{x} \,\overline{\in}\, c_X$. Если $\mathfrak{x} \in m_X \cap \mathfrak{A}^*$, то очевидно (b) $\to$ (a). Поэтому можно считать, что $\mathfrak{x} \,\overline{\in}\, m_X \cap \mathfrak{A}^*$. В этом случае доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 [4]. Надо отметить, что доказательство теоремы 3.1 дает больше, чем сказано в формулировке теоремы, а именно: если в $FK$-пространстве $R$ неограниченная последовательность $\mathfrak{x}$ является точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей, то в $R$ найдется и ограниченная расходящаяся последовательность.

2.4. Совершенные методы. Метод $\mathfrak{A}$ называется совершенным, если он совместен со всеми не более слабыми, чем он, методами, предполагая, что совместность имеет место при последовательностях $\mathfrak{e}(x)$ и $\mathfrak{e}_k(x)$ $(x \in X;\ k = 0,1,\ldots)$. На основе теорем 5 и 6 [3] можно заметить, что метод $\mathfrak{A}$ совершенен тогда и только тогда, когда последовательности $\mathfrak{e}(x)$ и $\mathfrak{e}_k(x)$ $(x \in X;\ k = 0,1,\ldots)$ составляют основное множество в $\mathfrak{A}^*$.

Теорема Мазура-Банаха [1] дает необходимый и достаточный признак для совершенности реверсивных методов. На основе § 1 легко обобщить эту теорему для вышеуказанных корегулярных методов.

Теорема. *Реверсивный метод $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ является совершенным тогда и только тогда, когда из*

$$(M)\ \begin{cases} \sum\limits_n \|g_n\| < \infty & \\ \sum\limits_n g_n A_{nk} x = 0 & (x \in X;\ k = 0,1,\ldots) \\ \text{вытекает } g_n = 0 \ \ (n = 0,1,\ldots) \text{ в } \overline{Y}^* & \end{cases}$$

Доказательство. Методы, выполняющие условие $(M)$, называются методами типа $(M)$. Надо доказать, что реверсивный метод $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ является методом типа $(M)$ тогда и только тогда, когда множество $E = \{\mathfrak{e}(x),\ \mathfrak{e}_k(x)\}$ составляет основное множество в $\mathfrak{A}^*$. Очевидно, последнее требование эквивалентно требованию, что из $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})=0$ для $\mathfrak{x}\in E$ вытекало бы $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})=0$ для всех $\mathfrak{x}\in\mathfrak{A}^*$ или из

$$(M_1)\quad\begin{cases}\sum\limits_n\|g_n\|<\infty\\ gA_kx+\sum\limits_n g_nA_{nk}x=0\qquad(x\in X;\ k=0,1,\ldots)\\ gAx+\sum\limits_n g_n\sum\limits_k A_{nk}x=0\qquad(x\in X)\\ \text{вытекало бы } g=g_n=0\qquad(n=0,1,\ldots)\ \text{в}\ \overline{Y}^*\end{cases}$$

Легко видеть, что $(M_1)$ эквивалентно $(M)$. Действительно, из $(M_1)$ можно получить, суммируя второе условие из $(M_1)$ по $k$ от 0 до $r$, вычитая из третьего и переходя к пределу $r\to\infty$, что из

$$(M_2)\quad\begin{cases}\sum\limits_n\|g_n\|<\infty\\ gA_kx+\sum\limits_n g_nA_{nk}x=0\qquad(x\in X;\ k=0,1,\ldots)\\ \lim\limits_r g(Ax-\sum\limits_{k=0}^{r}A_kx)=0\qquad(x\in X)\\ \text{должно вытекать } g=g_n=0\ (n=0,1,\ldots)\end{cases}$$

Так как $\mathfrak{A}\in\mathfrak{T}$, то $(M_2)$ и $(M)$ эквивалентны, что и доказывает теорему.

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. С. Банах, Курс фукціонального аналізу, 1948.
2. Г. Ф. Кангро, О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах, «Изв. АН Эст. ССР. Серия техн. и физ.-матем. наук», т. V, № 2, 1956.
3. Э. И. Юримяэ, Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы, «Изв. АН Эст. ССР. Серия техн. и физ.-мат. наук», т. VIII, № 2, 1959.
4. W. Meyer-König, K. Zeller, Lückenumkehrsätze u. Lückenperfektheit, Math. Z., 1956, **66**, 203—224.
5. A. Wilansky, K. Zeller, Summation of bounded divergent sequences, topological methods, Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, 501—509.
6. K. Zeller, Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Z., 1951, **53**, 463—487.
7. S. Mazur, W. Orlicz, On linear methods of summability, Studia Math., 1954, **14**, 129—160.
8. S. Mazur, W. Orlicz, Sur les methodes lineaires de sommation, C. R. Acad. Sci., Paris, 1933, **196**, 32—34.


*Тартуский государственный университет*

Поступила в редакцию
19 I 1959

## ÜHEST ÜLDISTATUD MAATRIKSMENETLUSTE KLASSIST

E. Jürimäe

*Resümee*

Käesolevas töös vaadeldakse üht üldistatud maatriksmenetluste (1) klassi, mis määratakse tingimusega ($T$) (§ 1). Selle küllalt üldise klassi jaoks lahendatakse mõned arvujadade puhul juba tuntud probleemid, näiteks kooskõla tõkestatud jadade puhul (2.1), tõkestamata jada olemasolu summeerimisväljas (2.2), tõkestatud hajuva jada summeerimine (2.3) ja pööratavate menetluste perfektsus (2.4).

*Tartu Riiklik Ülikool*

Saabus toimetusse
19. I 1959

## ÜBER EINE KLASSE VON VERALLGEMEINERTEN MATRIXVERFAHREN

E. Jürimäe

*Zusammenfassung*

In der vorliegenden Arbeit wird eine Klasse verallgemeinerter Matrixverfahren (1) betrachtet, die mit der Bedingung ($T$) (§ 1) bestimmt wird. Für diese genügend allgemeine Klasse werden einige für Zahlenfolgen schon bekannte Probleme gelöst, z. B. die Verträglichkeit bezüglich beschränkter Folgen (2.1), die Existenz unbeschränkter Folgen im Wirkfeld (2.2), die Limitierung beschränkter divergenter Folgen (2.3) und die Perfektheit der umkehrbaren Verfahren (2.4).

*Staatsuniversität zu Tartu*

Eingegangen
am 19. Jan. 1959