EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VIII KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1959, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VIII
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1959, № 3

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1959.3.02

К ТЕОРИИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ СПОСОБОВ

С. УЛЬМ

Теоремы о сходимости итерационных способов можно разделить на два типа:

I. Теоремы, в которых доказывается сходимость рассматриваемого способа совместно с существованием и единственностью решения уравнения.

В случае способа Ньютона (для приближенного решения нелинейных операторных уравнений) впервые такие теоремы доказал Л. В. Канторович [6]. Используя принцип мажорант, он позднее обобщил и уточнил свою теорию [7, 8]. Аналогичные теоремы о сходимости некоторых других способов были доказаны рядом авторов [9, 14, 16]. Более общие методы для доказательства таких теорем дали Ю. Я. Каазик [4] и Э. Э. Тамме [15].

II. Теоремы, в которых существование решения предполагается и даются только условия для сходимости (часто влекущие за собою также и единственность решения) рассматриваемого способа.

Некоторые такие теоремы для вещественных уравнений и систем уравнений (обычный способ итерации и способ Ньютона) доказаны разными авторами [12, 17, 19–21], для нелинейных операторных уравнений (способ Ньютона) И. П. Мысовских [11, 13] и Б. А. Вертгеймом [1, 2].

Теоремы второго типа труднее применимы, чем теоремы первого типа, так как требуется знание области (сферы) расположения решения. Зато они часто дают возможность расширить условия сходимости итерационных способов, а также уточнить оценки погрешностей.

Настоящая статья посвящена доказательству теорем второго типа некоторых итерационных способов, часто применяемых в практике, с использованием принципа мажорант. Оказывается, что мажорантные уравнения можно составлять при более широких условиях, чем при теоремах первого типа [1] (см., например, теоремы 5, 10, 11 и 12).

§ 1. Основные теоремы о сходимости обычного способа итерации

1. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$x = U(x) \tag{1.1}$$

где U — оператор, переводящий линейное нормированное пространство X в себя. Применим для приближенного решения уравнения (1.1) обычный способ итерации

$$x_{n+1} = U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

где x_0 — начальное приближение к решению x^* уравнения (1.1).

[1] Основные результаты настоящей статьи легко переносимы в пространства, нормированные посредством абстрактных полуупорядоченных пространств (см., например, работу [7]). Численные нормы рассматриваются только для простоты.

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим вещественное уравнение

$$z = V(z) \tag{1.3}$$

и способом (1.2) способ

$$z_{n+1} = V(z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

где z_0 — начальное приближение к решению z^* уравнения (1.3).

Предположим, что факт существования решений x^* и z^* установлен. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

1° $\| x^* - x_0 \| \leqslant z^* - z_0$;

2° $\| U(x^*) - U(x) \| \leqslant z^* - V(z)$ *при* $\| x^* - x \| \leqslant z^* - z \leqslant z^* - z'$, *где* z' *— число, удовлетворяющее неравенству* $z_n \geqslant z'$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;

3° $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z^*$.

Тогда последовательность (1.2) *сходится к решению* x^* *уравнения* (1.1), *при этом* $\| x^* - x_n \| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. По принципу полной индукции допустим, что справедливы оценки

$$\| x^* - x_k \| \leqslant z^* - z_k \leqslant z^* - z', \ k \leqslant n - 1$$

(при $k = 0$ такая оценка очевидно верна). Тогда по условию 2° получим

$$\| x^* - x_n \| = \| U(x^*) - U(x_{n-1}) \| \leqslant z^* - V(z_{n-1}) = \\ = z^* - z_n \leqslant z^* - z'$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z^*$, то и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$. Теорема доказана.

2. Выясним условия сходимости последовательности (1.4). Пусть $V(z)$ является в промежутке $z' \leqslant z \leqslant z^*$ монотонно возрастающей функцией, причем $z_1 > z_0 \geqslant z'$. Тогда $z_2 = V(z_1) \geqslant V(z_0) = z_1$. Индуктивно легко доказать, что вообще

$$z' \leqslant z_0 < z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_n \leqslant \ldots \leqslant z^*.$$ [2]

Итак, существует $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \bar{z}$. Переходя в соотношениях (1.4) к пределу $(n \to \infty)$ и требуя непрерывности $V(z)$, получим $\bar{z} = V(\bar{z})$, т. е. $\bar{z}$ является решением уравнения (1.3). Следовательно, если $z_1 > z_0$ и уравнение (1.3) не имеет решений в промежутке $z_0 < z < z^*$, то $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z^*$. При этом можно взять $z' = z_0$.

---

[2] Неравенства $z_n \leqslant z^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ справедливы без использования условия $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z^*$.

Легко убедиться, что при $z_1 \leqslant z_0$ последовательность (1.4) не сходится к решению z^* (очевидно, что интересен только случай $z^* > z_0$). Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

1° $\| x^* - x_0 \| \leqslant z^* - z_0$;

2° $\| U(x^*) - U(x) \| \leqslant z^* - V(z)$ *при* $\| x^* - x \| \leqslant z^* - z \leqslant z^* - z_0$;

3° *функция* $V(z)$ *непрерывна и монотонно возрастает в промежутке* $z_0 \leqslant z \leqslant z^*$;

4° *уравнение* (1.3) *не имеет решений в промежутке* $z_0 < z < z^*$;

5° $z_1 > z_0$.

Тогда последовательность (1.2) *сходится к решению* x^* *уравнения* (1.1), *причем* $\| x^* - x_n \| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 2. О сходимости итерационных способов, содержащих вторую производную

1. Рассмотрим уравнение

$$P(x) = 0 \tag{2.1}$$

где P — нелинейный оператор из линейного нормированного пространства X в пространство Y такого же типа.

Применим для приближенного решения уравнения (2.1) способы

$$x_{n+1} = x_n - (E + \alpha R_n)^{-1} [E + (\alpha + 1) R_n] \Gamma_n P(x_n) \tag{2.2}$$

$$(n = 0, 1, \ldots)$$

Здесь E — единичный оператор пространства X, α — вещественное число, x_0 — начальное приближение к решению x^* уравнения (2.1),

$$R_n = R_{x_n} = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n), \quad \Gamma_n = \Gamma_{x_n} = [P'(x_n)]^{-1}$$

Способы в виде (2.2) при вещественных уравнениях рассмотрел Р. Лудвиг [18], обобщение их на операторные уравнения дал Ю. Я. Каазик [5].

Заменим уравнение (2.1) уравнением

$$x = U(x) \tag{2.3}$$

где $$U(x) = x - (E + \alpha R_x)^{-1} [E + (\alpha + 1) R_x] \Gamma_x P(x)$$

Допустим существование решения x^* уравнения (2.1) в сфере $\| x - x_0 \| \leqslant z^*$. Если существуют линейные операторы Γ_{x^*}, R_{x^*} и $(E + \alpha R_{x^*})^{-1}$, то x^* является также решением уравнения (2.3).

Способы (2.2) можно теперь рассматривать как обычные способы итерации вида (1.2), т. е. для исследования их сходимости можно применить теорему 2. С этой целью составим мажорантное уравнение $z = V(z)$ для уравнения (2.3), которое удовлетворяло бы условиям теоремы 2 (принято $z_0 = 0$).

Потребуем непрерывности и трехкратной дифференцируемости[3] оператора P. Предполагая существование оператора $U(x)$ в интересующей нас области, преобразуем разность $U(x^*) - U(x)$:

$$U(x^*) - U(x) = x^* - x + (E + \alpha R_x)^{-1}[E + (\alpha + 1) R_x] \Gamma_x P(x) =$$
$$= (E + \alpha R_x)^{-1}\{(E + \alpha R_x)(x^* - x) + [E + (\alpha + 1) R_x] \Gamma_x P(x)\} =$$
$$= (E + \alpha R_x)^{-1}\{x^* - x + \tfrac{1}{2}\alpha \Gamma_x P''(x) \Gamma_x P(x)(x^* - x) +$$
$$+ \Gamma_x P(x) + \tfrac{1}{2}(\alpha + 1) \Gamma_x P''(x)[\Gamma_x P(x)]^2\} \tag{2.4}$$

Так как

$$\Theta = \Gamma_x P(x^*) = \Gamma_x P(x) + x^* - x +$$
$$+ \int_0^1 \Gamma_x P''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^2 (1 - \tau) d\tau$$

и

$$\Theta = \Gamma_x P(x^*) = \Gamma_x P(x) + x^* - x + \tfrac{1}{2} \Gamma_x P''(x)(x^* - x)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^1 \Gamma_x P'''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^3 (1 - \tau)^2 d\tau$$

где Θ — нуль пространства X, то

$$\Gamma_x P(x) = -(x^* - x) - \int_0^1 \Gamma_x P''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^2 (1 - \tau) d\tau \tag{2.5}$$

и

$$\Gamma_x P(x) = -(x^* - x) - \tfrac{1}{2} \Gamma_x P''(x)(x^* - x)^2 -$$
$$- \tfrac{1}{2} \int_0^1 \Gamma_x P'''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^3 (1 - \tau)^2 d\tau \tag{2.6}$$

Используя соотношения (2.5) и (2.6), можно преобразовать выражение (2.4)

$$U(x^*) - U(x) = (E + \alpha R_x)^{-1}\Big\{x^* - x - \tfrac{1}{2}\alpha \Gamma_x P''(x)(x^* - x)^2 -$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha\, \Gamma_x P''(x) \Big[\int_0^1 \Gamma_x P''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^2 (1 - \tau) d\tau\Big](x^* - x) -$$
$$- (x^* - x) - \tfrac{1}{2} \Gamma_x P''(x)(x^* - x)^2 -$$
$$- \tfrac{1}{2} \int_0^1 \Gamma_x P'''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^3 (1 - \tau)^2 d\tau + \tfrac{1}{2}(\alpha + 1) \Gamma_x P''(x)(x^* - x)^2 +$$
$$+ (\alpha + 1) \Gamma_x P''(x)(x^* - x)\Big[\int_0^1 \Gamma_x P''(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)^2 (1 - \tau) d\tau\Big] +$$

[3] Дифференцируемость понимается здесь и в дальнейшем в смысле Фреше.

$$+\frac{1}{2}(\alpha+1)\Gamma_x P''(x)\left[\int_0^1 \Gamma_x P''(x+\tau(x^*-x))(x^*-x)^2(1-\tau)d\tau\right]^2\Bigg\}=(E+\alpha R_x)^{-1}$$

$$\Bigg\{(1+\frac{1}{2}\alpha)\ \Gamma_x P''(x)\left[\int_0^1 \Gamma_x P''(x+\tau(x^*-x))(x^*-x)^2(1-\tau)d\tau\right](x^*-x)+$$

$$+\frac{1}{2}(1+\alpha)\Gamma_x P''(x)\left[\int_0^1 \Gamma_x P''(x+\tau(x^*-x))(x^*-x)^2(1-\tau)d\tau\right]^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \Gamma_x P'''(x+\tau(x^*-x))(x^*-x)^3(1-\tau)^2 d\tau\Bigg\} \tag{2.7}$$

Допустим, что в сфере $\|x^*-x\|\leqslant z^*$ справедливы оценки

$$\|\Gamma_x\|\leqslant B;\ \frac{1}{2!}\|P''(x)\|\leqslant K;\ \frac{1}{3!}\|P'''(x)\|\leqslant L \tag{2.8}$$

Если $\|x^*-x\|\leqslant z^*-z\leqslant z^*$, то

$$\|\alpha R_x\|=\|\frac{1}{2}\alpha\Gamma_x P''(x)\Gamma_x P(x)\|=\|\frac{1}{2}\alpha\Gamma_x P''(x)(x^*-x)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha\Gamma_x P''(x)\int_0^1 \Gamma_x P''(x+\tau(x^*-x))(x^*-x)^2(1-\tau)d\tau\|\leqslant$$

$$\leqslant|\alpha|BK(z^*-z)+|\alpha|B^2K^2(z^*-z)^2$$

Требуя, чтобы

$$|\alpha|(BKz^*+B^2K^2z^{*2})<1 \tag{2.9}$$

можно по теореме Банаха сделать вывод о существовании обратного оператора $(E+\alpha R_x)^{-1}$ и оценки

$$\|(E+\alpha R_x)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-|\alpha|BK(z^*-z)-|\alpha|B^2K^2(z^*-z)^2} \tag{2.10}$$

при $\|x^*-x\|\leqslant z^*-z\leqslant z^*$.

Исходя из выражения (2.7) и используя оценки (2.8) и (2.10), можно $\|U(x^*)-U(x)\|$ оценить следующим образом:

$$\|U(x^*)-U(x)\|\leqslant\frac{(2|1+\frac{1}{2}\alpha|B^2K^2+BL)(z^*-z)^3+|1+\alpha|B^3K^3(z^*-z)^4}{1-|\alpha|[BK(z^*-z)+B^2K^2(z^*-z)^2]}$$

т. е. условие 2° теоремы 2 выполнено, если выбрать

$$V(z)=z^*-\frac{(2|1+\frac{1}{2}\alpha|B^2K^2+BL)(z^*-z)^3+|1+\alpha|B^3K^3(z^*-z)^4}{1-|\alpha|[BK(z^*-z)+B^2K^2(z^*-z)^2]} \tag{2.11}$$

Обозначим $BKz^*=k$ и $BLz^{*2}=l$. Условие 5° теоремы 2 будет выполнено, если имеет место неравенство

$$|\alpha|k+(2|1+\tfrac{1}{2}\alpha|+|\alpha|)k^2+|1+\alpha|k^3+l<1 \tag{2.12}$$

Тогда очевидно выполняется и требование (2.9). Элементарный анализ показывает, что при выборе (2.11) и условии (2.12) выполнены также и условия 3° и 4° теоремы 2.

Прежде чем сформулировать теорему сходимости, сделаем два существенных замечания.

Замечание 1. Отметим, что сферу $\|x^* - x\| \leqslant z^*$ можно заменить сферой

$$\|x - x_0\| \leqslant 2z^* - z_1 \tag{2.13}$$

так как сюда относятся элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x^*$.

Действительно, $\|x_n - x_0\| \leqslant \|x_n - x^*\| + \|x^* - x_0\| \leqslant 2z^* - z_n \leqslant 2z^* - z_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и очевидно, что элементы x_0, x^* принадлежат к сфере (2.13).

Замечание 2. Если оценки (2.8) осуществить в сфере (2.13) [4], то условие (2.12) обеспечит сходимость способов (2.2) к произвольному решению уравнения (2.3) в сфере $\|x - x_0\| \leqslant z^*$. Учитывая единственность предельного элемента в линейном нормированном пространстве, выводим отсюда единственность решения уравнения (2.3) в сфере $\|x - x_0\| \leqslant z^*$. Следовательно, в этой сфере единственно и решение уравнения (2.1).

В итоге имеет место

Теорема 3. *Пусть*

1° *уравнение* (2.1) *имеет решение в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$;

2° *оператор* P *непрерывен и трижды непрерывно дифференцируем в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant \left(1 + \frac{2|1 + \frac{1}{2}\alpha|k^2 + |1 + \alpha|k^3 + l}{1 - |\alpha|k - |\alpha|k^2}\right) z^*; \tag{2.14}$$

3° *в сфере* (2.14) *справедливы оценки*

$$\|\Gamma_x\| \leqslant B, \frac{1}{2!}\|P''(x)\| \leqslant K, \frac{1}{3!}\|P'''(x)\| \leqslant L;$$

4° *выполнено неравенство* (2.12).

Тогда последовательности (2.2) *сходятся к единственному в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (2.1). *Справедливы оценки* $\|x^* - x_n\| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$; $z_0 = 0$; $V(z)$ *определяется выражением* (2.11).

2. Используя теорему о существовании решения уравнения (2.1), доказанную М. К. Гавуриным ([3] стр. 27), можно на основе теоремы 3 вывести теорему о сходимости способов (2.2) при так называемых условиях типа Коши. Исходя из других предпосылок, такую теорему при $\alpha = -1$ доказал В. Е. Мираков [10]. При других значениях α до сих пор этот вопрос не разбирался. Итак, базируясь на теорему 3 и на вышеуказанную теорему существования, имеет место

Теорема 4. *Пусть*

1° *оператор* P *непрерывен и трижды непрерывно дифференцируем в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant \left(1 + \frac{2|1 + \frac{1}{2}\alpha|\varkappa^2 + |1 + \alpha|\varkappa^3 + \lambda}{1 - |\alpha|\varkappa - |\alpha|\varkappa^2}\right) B\eta; \tag{2.15}$$

[4] При этом сохраняем обозначения оценок B, K, L.

2° $\|P(x_0)\| \leqslant \eta$;

3° *в сфере* (2.15) *справедливы оценки*

$$\|\Gamma_x\| \leqslant B, \frac{1}{2!}\|P''(x)\| \leqslant K, \frac{1}{3!}\|P'''(x)\| \leqslant L;$$

4° $|\alpha|\varkappa + (2|1+\frac{1}{2}\alpha| + |\alpha|)\varkappa^2 + |1+\alpha|\varkappa^3 + \lambda < 1$,

где $\varkappa = B^2K\eta$, $\lambda = B^3L\eta^2$.

Тогда уравнение (2.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\eta$ *единственное решение* x^*, *к которому последовательности* (2.2) *сходятся с быстротой* $\|x^* - x_n\| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$; $z_0 = 0$ и

$$V(z) = B\eta - \frac{(2|1+\frac{1}{2}\alpha|B^2K^2 + BL)(B\eta - z)^3 + |1+\alpha|B^3K^3(B\eta - z)^4}{1 - |\alpha|[BK(B\eta - z) + B^2K^2(B\eta - z)^2]}$$

§ 3. О сходимости некоторых других способов

1. Прежде всего рассмотрим два следствия из теоремы 2.

Следствие 1. Пусть $U(x)$ и $V(z)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Тогда справедливы соотношения

$$U(x^*) - U(x) = \int_0^1 U'(x + \tau(x^* - x))(x^* - x)\,d\tau$$

и

$$z^* - V(z) = V(z^*) - V(z) = \int_0^1 V'(z + \tau(z^* - z))(z^* - z)\,d\tau$$

Следовательно, теорема 2 остается в силе, если условие 2° заменить условием

$$2^{\circ\prime}\ \|U'(x)\| \leqslant V'(z) \quad \text{при} \quad \|x^* - x\| \leqslant z^* - z \leqslant z^* - z_0.^5$$

Следствие 2. Пусть $U(x)$ и $V(z)$ аналитичны, т. е.

$$U(x^*) - U(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} U^{(k)}(x^*)(x - x^*)^k$$

и

$$z^* - V(z) = V(z^*) - V(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} V^{(k)}(z^*)(z - z^*)^k$$

Следовательно, теорема 2 остается в силе, если условие 2° заменить условием

$$2^{\circ\prime\prime}\ \|U^{(k)}(x^*)\| \leqslant (-1)^{k-1} V^{(k)}(z^*) \; (k = 1, 2, \ldots)$$

---

[5] Монотонность $V(z)$ следует здесь из положительности $V'(z)$.

2. Исходя из теоремы 2 и ее следствий, можно аналогично теореме 3 доказать ряд теорем II типа для обычного способа итерации и способа Ньютона. В указанных теоремах можно часто достичь существенных уточнений, если в качестве начальных приближений принять x_1 и z_1. При этом оценку $\|x^* - x_1\| \leqslant z^* - z_1$ проведем отдельно. Чтобы обеспечить единственность решения, учтены замечания, аналогичные замечаниям 1 и 2. В дальнейшем предположено, что $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — непрерывные и монотонно возрастающие функции в интересующих нас промежутках, причем $\varphi(0) = \Phi(0) = 0$. Если $\varphi(z) = \Phi(z) = Kz$ (K — положительная постоянная), то из теорем 8, 10 и 11 получим, по существу, результаты И. П. Мысовских (при несколько ослабленных условиях по сравнению с [11, 13]). Результаты Б. А. Вертгейма соответствуют случаю $\varphi(z) = \Phi(z) = Kz^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

3. Обычный способ итерации.

Теорема 5. *Пусть*

1° *уравнение* (1.1) *имеет решение в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$;

2° $\|U(x') - U(x'')\| \leqslant \varphi(\|x' - x''\|)$ *при каждом* x' *и* x'' *из сферы* $\|x - x_0\| \leqslant z^* + \varphi(z^*)$;

3° *уравнение* $z = V(z)$ *не имеет решений в промежутке* $0 < z < z^*$;

4° $\varphi(z^*) < z^*$;

Тогда последовательность (1.2) *сходится к единственному в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (1.1). *Справедливы оценки* $\|x^* - x_n\| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; $z_0 = 0$; $V(z) = z^* - \varphi(z^* - z)$.

Теорема 6. *Пусть*

1° *уравнение* (1.1) *имеет решение в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$;

2° $\frac{1}{k!}\|U^{(k)}(x_0)\| \leqslant q_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

3° *оператор* $U(x)$ *аналитичен*[6] *в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant 2z^* - z_1$;

4° $$\sum_{k=2}^{\infty} q_k\Big(z^* + \sum_{j=1}^{\infty} q_j z^{*j}\Big)^k < (1 - q_1)\ q_1 z^* + (2 - q_1)\sum_{k=2}^{\infty} q_k z^{*k}.$$

Тогда последовательность (1.2) *сходится к единственному в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (1.1). *Справедливы оценки* $\|x^* - x_n\| \leqslant z^* - z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $z_1 =$

$$= z^* - \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^{*k};\ V(z) = z^* + q_1(z - z^*) - \sum_{k=2}^{\infty} q_k(2z^* - z)^k + \sum_{k=2}^{\infty} q_k z^{*k}.$$

Теорема 7. *Пусть*

1° *уравнение* (1.1) *имеет решение в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant z^*$;

---

[6] То есть $U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} U^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ для каждого x из сферы $\|x - x_0\| \leqslant 2z^* - z_1$.

2° $\frac{1}{k!}\,\| U^{(k)}(x)\| \leqslant Q_k$ $(k=1,2,\ldots)$ *при* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

3° *оператор* $U(x)$ *аналитичен*[7] *в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^*-z_1$;

4° $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k z^{*k-1} < 1$.

Тогда последовательность (1.2) *сходится к единственному в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (1.1). *Справедливы оценки* $\|x^*-x_n\| \leqslant z^*-z_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *где* $z_{n+1}=V(z_n)$ $(n=0,1,\ldots)$;

$$z_0=0;\; V(z)=z^*-\sum_{k=1}^{\infty} Q_k (z^*-z)^k.$$

4. Модифицированный способ Ньютона.

Для решения уравнения (2.1) будем применять способ

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma_0 P(x_n) \quad (n=0,1,\ldots) \tag{3.1}$$

Теорема 8. *Пусть*

1° *уравнение* (2.1) *имеет решение в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

2° *оператор* P *непрерывен и непрерывно дифференцируем в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^*-z_1$;

3° а) $\|E-\Gamma_0 P'(x)\| \leqslant \varphi(\|x-x_0\|)$ *в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

б) $\|E-\Gamma_0 P'(x)\| \leqslant \Phi(\|x-x_0\|)$ *в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^*-z_1$;

4° $\int\limits_{z_1}^{z^*} \Phi(2z^*-t)\,dt < \int\limits_{0}^{z^*} \varphi(t)\,dt$.

Тогда последовательность (3.1) *сходится к единственному в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (2.1). *Справедливы оценки* $\|x^*-x_n\| \leqslant z^*-z_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *где* $z_{n+1}=V(z_n)$ $(n=1,2,\ldots)$;

$$z_1=z^*-\int_0^{z^*} \varphi(t)\,dt;\quad V(z)=z^*-\int_z^{z^*} \Phi(2z^*-t)\,dt.$$

Замечание 3. Теорема 8 остается справедливой, если рассматривать более общий способ

$$x_{n+1}=x_n-\Lambda P(x_n) \quad (n=0,1,\ldots) \tag{3.2}$$

где Λ — линейный оператор из пространства Y в пространство X (при этом в условиях теоремы заменим Γ_0 на Λ).

Теорема 9. *Пусть*

1° *уравнение* (2.1) *имеет решение в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

2° $\frac{1}{k!}\,\|\Gamma_0 P^{(k)}(x_0)\| \leqslant p_k$ $(k=2,3,\ldots)$;

---

[7] То есть $U(x'')=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,U^{(k)}(x')(x''-x')^k$ при каждом x' из сферы $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ и x'' из сферы $\|x-x_0\| \leqslant 2z^*-z_1$.

3° *оператор* $P(x)$ *аналитичен*[8] *в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^* - z_1$;

4° $\sum\limits_{k=2}^{\infty} p_k(z^* + \sum\limits_{j=2}^{\infty} p_j z^{*j})^k < 2 \sum\limits_{k=2}^{\infty} p_k z^{*k}$.

Тогда последовательность (3.1) *сходится к единственному в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (2.1). *Справедливы оценки* $\|x^*-x_n\| \leqslant z^* - z_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n=1,2,\ldots)$;

$$z_1 = z^* - \sum_{k=2}^{\infty} p_k z^{*k}; \quad V(z) = z^* - \sum_{k=2}^{\infty} p_k (2z^* - z)^k + \sum_{k=2}^{\infty} p_k z^{*k}$$

5. Основной способ Ньютона.

Для решения уравнения (2.1) будем применять способ

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) \ (n=0,1,\ldots) \tag{3.3}$$

Теорема 10. *Пусть*

1° *уравнение* (2.1) *имеет решение в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

2° *оператор* P *непрерывен и непрерывно дифференцируем в сфере*

$$\|x-x_0\| \leqslant z^* + \int_0^{z^*} \varphi(t)\,dt; \tag{3.4}$$

3° $\|E - \Gamma_{x'} P'(x'')\| \leqslant \varphi(\|x''-x'\|)$ *при каждом* x' *и* x'' *из сферы* (3.4);

4° $\int\limits_0^1 \varphi(tz^*)\,dt < 1$.

Тогда последовательность (3.3) *сходится к единственному в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (2.1). *Справедливы оценки* $\|x^*-x_n\| \leqslant z^* - z_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *где* $z_{n+1} = V(z_n)$ $(n=0,1,\ldots)$;

$$z_0 = 0; \quad V(z) = z^* - \int_0^{z^*-z} \varphi(t)\,dt.$$

Теорема 11. *Пусть*

1° *уравнение* (2.1) *имеет решение в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

2° *оператор* P *непрерывен и непрерывно дифференцируем в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^* - z_1$;

3° а) $\|E - \Gamma_0 P'(x)\| \leqslant \varphi(\|x-x_0\|)$ *при* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

б) $\|\Gamma_0[P'(x') - P'(x'')]\| \leqslant \Phi(\|x'-x''\|)$ *при каждом* x' и x'' *из сферы* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^* - z_1$;

4° $\Phi(2z^* - z_1) + \dfrac{\int_0^{z^*-z_1} \Phi(t)\,dt}{z^* - z_1} < 1$.

---

[8] То есть $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k$ для каждого x из сферы $\|x-x_0\| \leqslant 2z^* - z_1$.

Тогда последовательность (3.3) *сходится к единственному в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (2.1). *Справедливы оценки* $\|x^*-x_n\| \leqslant z^*-z_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *где* $z_{n+1}=V(z_n)$ $(n=1,\ 2,\ldots)$;

$$z_1=z^*-\int\limits_0^{z^*}\varphi(t)\,dt;\ V(z)=z^*-\frac{\int\limits_0^{z^*-z}\Phi(t)\,dt}{1-\Phi(2z^*-z)}.$$

Теорема 12. *Пусть*

1° *уравнение* (2.1) *имеет решение в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

2° *оператор* P *непрерывен и непрерывно дифференцируем в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^*-z_1$;

3° а) $\|E-\Gamma_0P'(x)\| \leqslant \varphi(\|x-x_0\|)$ *и* $\|\Gamma_x\| \leqslant B_*$ *в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$;

б) $\|P'(x')-P'(x'')\| \leqslant \Phi(\|x'-x''\|)$ *при каждом* x' *и* x'' *из сферы* $\|x-x_0\| \leqslant 2z^*-z_1$;

4° $$B_*\Phi(z^*-z_1)+\frac{B_*\int\limits_0^{z^*-z_1}\Phi(t)\,dt}{z^*-z_1}<1.$$

Тогда последовательность (3.3) *сходится к единственному в сфере* $\|x-x_0\| \leqslant z^*$ *решению* x^* *уравнения* (2.1). *Справедливы оценки* $\|x^*-x_n\| \leqslant z^*-z_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *где* $z_{n+1}=V(z_n)$ $(n=1,2,\ldots)$; $z_1=$

$$=z^*-\int\limits_0^{z^*}\varphi(t)\,dt;\ V(z)=z^*-\frac{B_*\int\limits_0^{z^*-z}\Phi(t)\,dt}{1-B_*\Phi(z^*-z)}.$$

6. В качестве примера приведем доказательство теоремы 8. Заменим уравнение (2.1) эквивалентным ему уравнением

$$x=U(x) \tag{3.5}$$

где $U(x)=x-\Gamma_0P(x)$. Способ (3.1) можно тогда рассматривать в виде (1.2). Покажем, что условия следствия 1 выполняются. В качестве начальных приближений рассмотрим x_1 и z_1.

Прежде всего покажем справедливость оценки $\|x^*-x_1\| \leqslant z^*-z_1$. Действительно,

$$\|x^*-x_1\|=\|x^*-x_0+\Gamma_0P(x_0)\|=\|x^*-x_0+\Gamma_0P(x_0)-\Gamma_0P(x^*)\|=$$

$$=\|x^*-x_0-\Gamma_0\int\limits_0^1 P'(x_0+\tau(x^*-x_0))(x^*-x_0)\,d\tau\|=$$

$$=\|\int\limits_0^1[E-\Gamma_0P'(x_0+\tau(x^*-x_0))](x^*-x_0)\,d\tau\| \leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1\varphi(\tau z^*)z^*d\tau=\int\limits_0^{z^*}\varphi(t)\,dt=z^*-z_1$$

если использовать условия 1°, 2° и 3° а) теоремы 8.

Если $\|x^*-x\| \leqslant z^*-z$, то по условию 3° б) теоремы 8 получим (см. также замечание 1)

$$\|U'(x)\| = \|E - \Gamma_0 P'(x)\| \leqslant \Phi(\|x-x_0\|) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(\|x-x^*\| + \|x^*-x_0\|) \leqslant \Phi(2z^*-z) = V'(z)$$

т. е. условие 2°′ следствия 1 выполнено. Так как $V'(z)$ является в промежутке $z_1 \leqslant z \leqslant z^*$ монотонно убывающей, то уравнение $z = V(z)$ не имеет решений в $z_1 < z < z^*$. Условие 4° теоремы 8 эквивалентно неравенству $z_2 > z_1$. Аналогично замечанию 2 можно сделать вывод об единственности решения в сфере $\|x-x_0\| \leqslant z^*$.

7. Рассмотрим следствие из теоремы 8.

Пусть $\varphi(z) = K_1 z^\alpha$, $\Phi(z) = K_2 z^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, при этом $K_1 \leqslant K_2$.

Тогда $z_1 = z^* - \dfrac{K_1 z^{*\alpha+1}}{\alpha+1}$; $V(z) = z^* + \dfrac{K_2 z^{*\alpha+1}}{\alpha+1} - \dfrac{K_2(2z^*-z)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Условие 4° теоремы 8 выражается в виде

$$K_1 z^{*\alpha} < (\alpha+1)\left[\left(1+\frac{K_1}{K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1\right]$$

Взяв $K_1 = K_2 = K$, получим в качестве условия 4°

$$K z^{*\alpha} < (\alpha+1)\left(2^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1\right) = \mu(\alpha)$$

т. е., если $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$, то $2(\sqrt{2}-1) \leqslant \mu(\alpha) \leqslant 1$. Этот результат уточняет соответствующий результат Б. А. Вертгейма [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Вертгейм, Научн. тр. Молотовск. горн. ин-та, сб. 1, 1956, 142—153.
2. Б. А. Вертгейм, Успехи матем. наук, т. XII, вып. 1 (73), 1957, 166—169.
3. М. К. Гавурин, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 5(6), 1958, 18—31.
4. Ю. Я. Каазик, Успехи матем. наук, т. XII, вып. 1(73), 1957, 195—199.
5. Ю. Я. Каазик, Докл. АН СССР, т. 112, № 4, 1957, 579—582.
6. Л. В. Канторович, Успехи матем. наук, т. III, вып. 6(28), 1948, 89—185.
7. Л. В. Канторович, Докл. АН СССР, т. 76, № 1, 1951, 17—20.
8. Л. В. Канторович, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7, 1957, 68—103.
9. М. А. Мертвецова, Докл. АН СССР, т. 88, № 4, 1953, 611—614.
10. В. Е. Мираков, Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, вып. 1, 1958, 204—213.
11. И. П. Мысовских, Докл. АН СССР, т. 70, № 4, 1950, 565—568.
12. И. П. Мысовских, Прикл. матем. и механ., т. 16, вып. 6, 1952, 756—759.
13. И. П. Мысовских, Вестн. Ленингр. ун-та, № 11, 1953, 25—48.
14. М. И. Нечепуренко, Успехи матем. наук, т. IX, вып. 2(66), 1954, 163—170.
15. Э. Э. Тамме, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 5(6), 1958, 115—121.
16. С. Ю. Ульм, Уч. зап. Тартуск. ун-та, вып. 42, 1956, 135—142.
17. L. Ford, Amer. Math. Monthly, Vol. 23, No. 6, 1925, 272—287.
18. R. Ludwig, Z. angew. Math. und Mech., B. 37, H. 6, 1954.
19. A. Ostrowski, Матем. сб., т. 3(45), № 2, 1958, 254—258.
20. A. Ostrowski, Comment. Math. Helvetici, Vol. 9, 1936, 79—103.
21. P. Romanowsky, Z. angew. Math. und Mech., B. 9, H. 5, 1929, 420—421.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
15 V 1959

ITERATSIOONMENETLUSTE KOONDUVUSEST

S. Ulm

Resümee

Artiklis käsitletakse mõnede praktikas enamrakendatavate iteratsioonmenetluste koonduvust lineaarsetes normitud ruumides, eeldades, et võrrandi lahendi olemasolu on tagatud. Põhiliseks osutub teoreem 2, millel tuginevad kõik järgnevad teoreemid. Tõestatakse operaatori teist tuletist sisaldavate iteratsioonmenetluste (2.2) koonduvusteoreem. M. K. Gavurini tõestatud olemasoluteoreem ([3], lk. 27) võimaldab eelnimetatud koonduvusteoreemist tuletada nn. Cauchy-tüüpi koonduvusteoreemi. Järgnevalt uuritakse hariliku iteratsioonmenetluse, modifitseeritud Newtoni menetluse ja Newtoni põhimenetluse koonduvust. Teoreemid 8, 10 ja 11 üldistavad I. P. Mõssovskihhi vastavaid tulemusi [11, 13]. Uurimismeetodina kasutatakse artiklis majorantide printsiipi laialdaste hinnanguklasside jaoks.

Tallinna Polütehniline Instituut

Saabus toimetusse
15. V 1959

ZUR KONVERGENZTHEORIE VON ITERATIONSVERFAHREN

S. Ulm

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird die Konvergenz einiger in der Praxis am meisten angewandten Iterationsverfahren (in linearen normierten Räumen) untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Existenz einer Lösung der Gleichung gesichert ist. Als fundamental erweist sich das Theorem 2, worauf sich alle weiteren Theoreme stützen. Es wird das Konvergenztheorem für solche Iterationsverfahren bewiesen, die die zweite Ableitung des Operators enthalten. Ein von M. K. Gawurin bewiesenes Existenztheorem ([3] S. 27) ermöglicht es, aus dem erwähnten Konvergenztheorem ein weiteres Konvergenztheorem Cauchyschen Typs abzuleiten. Ferner wird die Konvergenz des gewöhnlichen Iterationsverfahrens, des modifizierten Newtonschen Verfahrens und des Newtonschen Grundverfahrens untersucht. Die Theoreme 8, 10 und 11 verallgemeinern die entsprechenden Ergebnisse von I. P. Myssowskich [11, 13]. Als Untersuchungsmethode hat sich das Majorantenprinzip für umfangreiche Abschätzungsklassen bewährt.

Polytechnisches Institut
zu Tallinn

Eingegangen
am 15. Mai 1959