EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. V KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1956, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ V
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1956, № 3

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1956.3.01

КРИТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, ОЧЕРЧЕННОЙ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА

Н. А. АЛУМЯЭ,
член-корреспондент Академии наук Эстонской ССР

Рассматривается тонкостенная упругая оболочка вращения, срединная поверхность которой представляет собой кусок поверхности эллипсоида, симметричный относительно главной плоскости последнего. Предполагается, что оболочка замкнута жесткими диафрагмами и находится под действием внешнего равномерно распределенного давления.

Л. Ю. Поверус исследовал ([4]) случай, где 1) радиус среднего параллельного круга срединной поверхности значительно меньше радиуса кривизны меридиальной линии, 2) длина оболочки (расстояние между замыкающими оболочку диафрагмами) соизмерима с радиусом среднего параллельного круга, 3) диафрагмы будут жесткими в своей плоскости, но гибкие при изгибе из своей плоскости. В настоящей статье условие 1 заменяется менее жестким требованием, а вместо диафрагм, указанных в 3, рассматриваются, как сказано выше, жесткие диафрагмы.

Критическое давление определялось исходя из предложенных Х. М. Муштари ([3]) и В. З. Власовым ([2]) уравнений устойчивости, разрешаемых здесь методом асимптотического интегрирования. Применительно к задачам устойчивости оболочек метод асимптотического интегрирования пока применялся только при исследовании осесимметрических форм потери устойчивости оболочек вращения ([5]). В настоящей же статье дается несложное обобщение этого метода для исследования неосесимметрических форм потери устойчивости.

Сведения о полученных численных результатах приводятся в последнем разделе статьи.

1. Начальное состояние оболочки. Рассмотрим оболочку, очерченную по поверхности эллипсоида вращения и зададим ее срединную поверхность радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в форме

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma c}{\operatorname{ch}\alpha}\left(\mathbf{u}_x \cos\beta + \mathbf{u}_y \sin\beta\right) + c \operatorname{th}\alpha\, \mathbf{u}_z, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ — орты декартовой системы координат, α, β — внутренние координаты срединной поверхности, а γ — положительный безразмерный параметр. Очевидно, линии $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ представляют собой параллели и меридианы поверхности. Параметры Ляме A, B и кривизны k_α, k_β при рассматриваемой координации выражаются формулами

$$A \doteq \frac{cu(\alpha)}{\operatorname{ch}^2\alpha}, \quad B = \frac{\gamma c}{\operatorname{ch}\alpha}, \quad k_\alpha = \frac{\gamma \operatorname{ch}^3\alpha}{cu^3(\alpha)}, \quad k_\beta = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\gamma c u(\alpha)}; \tag{1.2}$$

здесь и в дальнейшем через u обозначается функция

$$u = u(\alpha) = |\sqrt{1+\gamma^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}|. \tag{1.3}$$

Предположим, что оболочка симметрична относительно экваториальной линии ($\alpha = 0$); пусть она при значениях $\alpha = \pm \alpha_*$ замыкается жесткими диафрагмами, так что в выражениях (1.1)—(1.3) $\alpha_* \geqslant \alpha \geqslant -\alpha_*$.

Пусть оболочка находится под действием равномерно распределенного внешнего давления p. В этом случае начальное напряженное состояние является осесимметричным и, за исключением узких краевых зон, безмоментным; тангенциальные усилия этого состояния T_α, T_β даются выражениями

$$T_\alpha = -\frac{p\gamma c}{2} \frac{u(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha}, \quad T_\beta = -\frac{p\gamma c}{2}\left(\frac{2u(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha} - \frac{\gamma^2 \operatorname{ch}\alpha}{u(\alpha)}\right). \tag{1.4}$$

При достаточно больших положительных значениях p состояние (1.4) при значениях $\gamma < 1$ будет неустойчивым; накопленный при решении подобных задач опыт дает основание предполагать, что форма выпученной оболочки после потери устойчивости основного состояния равновесия (1.4) не будет осесимметрической.

2. Основные соотношения для определения критического давления. Определим значение давления, при котором, кроме состояния (1.4), существует еще по крайней мере одно неосесимметрическое состояние равновесия, бесконечно близкое к начальному состоянию. Пусть $T_\alpha + S_\alpha$, $T_\beta + S_\beta$, S будут физические составляющие симметрического тензора тангенциальных усилий после потери устойчивости начального состояния, а G_α, G_β и H — физические составляющие симметрического тензора моментов. Физические составляющие первого и второго тензоров деформации, возникающей в процессе перехода оболочки из начального состояния в выпученное, обозначим через ε_α, ε_β, ω и $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\beta$, τ.

Исходим из упрощенной теории местной потери устойчивости [2, 3] и выпишем эти уравнения для произвольной оболочки вращения, предполагая, что после потери устойчивости форма оболочки будет иметь s синусоидальных волн по параллелям. Эти предположения приводят к следующим трем уравнениям равновесия

$$(BS_\alpha)' + sAS - B'S_\beta = 0, \tag{2.1}$$

$$-sAS_\beta + (BS)' + B'S = 0, \tag{2.2}$$

$$k_\alpha S_\alpha + k_\beta S_\beta + \frac{1}{AB}\left\{\frac{1}{A}(BG_\alpha)' + sH - \frac{B'}{A} G_\beta\right\}' -$$

$$-\frac{s^2}{B^2} G_\beta + \frac{s}{AB^3}(B^2 H)' + T_\alpha \varkappa_\alpha + T_\beta \varkappa_\beta = 0 \tag{2.3}$$

и к трем уравнениям совместности деформации

$$(B\varkappa_\beta)' - sA\tau - B'\varkappa_\alpha = 0, \tag{2.4}$$

$$-sA\varkappa_\alpha - (B\tau)' - B'\tau = 0, \tag{2.5}$$

$$k_\alpha \varkappa_\beta + k_\beta \varkappa_\alpha + \frac{1}{AB}\left\{\frac{1}{A}(B\varepsilon_\beta)' - s\omega - \frac{B'}{A}\varepsilon_\alpha\right\}' - \frac{s^2}{B^2}\varepsilon_\alpha - \frac{s}{AB^3}(B^2\omega)' = 0. \quad (2.6)$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование по α

$$(\ldots)' \equiv \frac{d}{d\alpha}(\ldots)$$

Пусть E будет модуль упругости, ν — коэффициент поперечного расширения, t — толщина оболочки,

$$\lambda^2 = \frac{t^2}{12(1-\nu^2)c^2\gamma^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = Etc^2\lambda^2\gamma^2, \ \ t = \text{const}.$$

К уравнениям (2. 1)—(2. 6) присоединим простейшие физические соотношения

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{Et}(S_\alpha - \nu S_\beta), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{Et}(S_\beta - \nu S_\alpha), \quad \omega = \frac{1+\nu}{Et}S,$$

$$G_\alpha = -D(\varkappa_\alpha + \nu\varkappa_\beta), \quad G_\beta = -D(\varkappa_\beta + \nu\varkappa_\alpha), \quad H = -D(1-\nu)\tau. \quad (2.7)$$

3. Функции кривизн и тангенциальных усилий. Предположим, что s^2 будет большая величина. Тогда уравнениям (2. 4), (2. 5) можно приближенно удовлетворить, полагая

$$\varkappa_\alpha = -\frac{c}{AB}\left[\frac{B^2}{A}\left(\frac{A}{B^2}\psi\right)'\right]', \quad \varkappa_\beta = \frac{s^2c}{B}\left(\frac{A}{B^2}\psi\right) - \frac{cB'}{A^2}\left(\frac{A}{B^2}\psi\right)'$$

$$\tau = \frac{sc}{A}\left(\frac{A}{B^2}\psi\right)'. \quad (3.1)$$

Легко проверить, что погрешность соотношений (3. 1) будет при малых значениях α порядка γ^2/s^2, а при больших значениях α порядка $1/s^2$. Аналогично, с этой же погрешностью удовлетворяются также и уравнения (2. 1), (2. 2), если положить

$$S_\beta = -Et\frac{\gamma c^2}{AB}\left[\frac{B^2}{A}\left(\frac{A}{B^2}\varphi\right)'\right]', \quad S_\alpha = Et\gamma c^2\left\{\frac{s^2}{B}\left(\frac{A}{B^2}\varphi\right) - \frac{B'}{A^2}\left(\frac{A}{B^2}\varphi\right)'\right\}$$

$$S = -Et\frac{\gamma c^2 s}{A}\left(\frac{A}{B^2}\varphi\right)'. \quad (3.2)$$

Отметим, что формулы (3. 1), (3. 2) отличаются от обычных — вместо соотношений (3. 1), например, принимаются

$$\varkappa_\alpha = -\frac{c}{A}\left(\frac{1}{A}\psi'\right)', \quad \varkappa_\beta = \frac{s^2c}{B^2}\psi - \frac{cB'}{A^2B}\psi', \quad \tau = \frac{sc}{A}\left(\frac{1}{A}\psi\right)'. \quad (3.3)$$

Если функция ψ при дифференцировании существенно не увеличивается, и, следовательно, ψ, ψ', ψ'' — соизмеримы, то формулы (3. 3) непригодны, как бы велико ни было s^2. Не желая вводить предположения относительно характера функций ψ и φ, в дальнейшем будем пользоваться соотношениями (3. 1), (3. 2).

Отметим еще тот очевидный факт, что множитель A/B^2 перед функциями ψ и φ в формулах (3. 1), (3. 2) является несущественным и его можно заменить, например, единицей. Здесь он введен для того, чтобы выражения

$$k_\alpha \varkappa_\beta + k_\beta \varkappa_\alpha, \quad k_\alpha S_\alpha + k_\beta S_\beta$$

принимали в частном случае эллипсоидальной оболочки простейшую форму.

4. Разрешающие уравнения. Выразим в уравнениях (2. 3), (2. 6) все члены через функции кривизн и тангенциальных усилий, используя при этом физические соотношения. После некоторых упрощений приходим к следующим разрешающим уравнениям

$$L_1\varphi + L_2\psi = 0, \tag{4. 1}$$

$$-L_2\varphi + \lambda^2 L_1\psi - qL_3\psi = 0, \tag{4. 2}$$

где L_1, L_2, L_3 — линейные дифференциальные выражения

$$L_1 f = \gamma^2 \left(\frac{\mathrm{ch}^3\alpha}{u} f''\right)'' - 2s^2(u\,\mathrm{ch}\,\alpha\, f')' + \frac{s^4}{\gamma^2}\frac{u^3}{\mathrm{ch}\,\alpha} f, \tag{4. 3}$$

$$L_2 f = f'' - s^2 f, \tag{4. 4}$$

$$L_3 f = s^2 \frac{u^4}{\mathrm{ch}^4\alpha}\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\frac{\mathrm{ch}^2\alpha}{u^2}\right) f - \frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2\alpha} f'\right)', \tag{4. 5}$$

$$(f = \psi, \varphi)$$

а q — безразмерный параметр нагрузки

$$q = \frac{pc}{Et\gamma}. \tag{4. 6}$$

Погрешность уравнений (4. 1), (4. 2) будет при малых значениях α и $\gamma < 1$ порядка γ^2/s^2, при больших значениях α — порядка $1/s^2$.

По предположению оболочка замкнута жесткими диафрагмами. Отсюда для произвольной оболочки вращения следуют краевые условия

$$\varepsilon_\beta = 0, \tag{4. 7}$$

$$\varkappa_\beta = 0, \tag{4. 8}$$

$$2sAB\omega - (B^2\varepsilon_\beta)' + BB'\varepsilon_\alpha = 0, \tag{4. 9}$$

$$\tau - \frac{1}{2}(3k_\beta - k_\alpha)\,\omega = 0. \tag{4. 10}$$

В соответствии с упрощенной системой исходных дифференциальных уравнений (2. 1)—(2. 6) здесь обоснованы упрощения, после которых вместо (4. 7)—(4. 10) имеем

$$\varepsilon_\beta = 0, \quad \varkappa_\beta = 0, \quad \tau = 0, \quad 2sAB\omega - (B^2\varepsilon_\beta)' + BB'\varepsilon_\alpha = 0. \tag{4. 11}$$

Выражая фигурирующие в (4. 11) компоненты деформации через функции ψ и φ, получим

$$\gamma^2\varphi'' + \gamma^2\left(\frac{u'}{u} + \nu\,\mathrm{th}\,\alpha\right)\varphi' + \frac{\nu s^2 u^2}{\mathrm{ch}^2\alpha}\varphi = 0, \tag{4. 12}$$

$$\psi = 0, \tag{4. 13}$$

$$\psi' = 0, \tag{4. 14}$$

$$\gamma^2\mathrm{ch}^2\alpha\,\varphi''' + 3\gamma^2\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\varphi'' - (2+\nu)s^2u^2\varphi' -$$

$$-[(2+\nu)s^2uu' - (1-\nu)s^2u^2\,\mathrm{th}\,\alpha]\varphi = 0. \tag{4. 15}$$

Нахождение критического давления сводится к определению наименьшего значения q, допускающего нетривиальное решение системы (4. 1), (4. 2) при краевых условиях (4. 12)—(4. 15).

5. **Метод решения.** Предположим как и выше, что s^2 является большой величиной по сравнению с единицей. Исходя из этого предположения, ищем решение уравнений (4. 1), (4. 2) в форме асимптотического разложения

$$f(\alpha) = e^{sr(\alpha)}\left\{f_0(\alpha) + \frac{1}{s} f_1(\alpha) + \ldots\right\} \tag{5. 1}$$

$$(f = \psi, \varphi; \qquad f_0 = \psi_0, \varphi_0; \qquad f_1 = \psi_1, \varphi_1)$$

$$q = q_0 + \frac{1}{s^2} q_2 + \ldots \tag{5. 2}$$

Для производных получим следующие асимптотические разложения

$$\begin{aligned} f' &= s e^{sr(\alpha)}\left\{r' f_0 + \frac{1}{s}(r' f_1 + f_0') + \ldots\right\}, \\ f'' &= s^2 e^{sr(\alpha)}\left\{r'^2 f_0 + \frac{1}{s}(r'^2 f_1 + 2r' f_0' + r'' f_0) + \ldots\right\} \end{aligned} \tag{5. 3}$$

и т. д. Используя выражения (5. 1)—(5. 3), развертываем линейные дифференциальные выражения (4. 3)—(4. 5) по нисходящим степеням s в форме

$$\begin{aligned} L_1 f &= s^4 e^{sr(\alpha)}\left\{L_{10} f_0 + \frac{1}{s}(L_{10} f_1 + L_{11} f_0) + \ldots\right\}, \\ L_2 f &= s^2 e^{sr(\alpha)}\left\{L_{20} f_0 + \frac{1}{s}(L_{20} f_1 + L_{21} f_0) + \ldots\right\}, \\ L_3 f &= s^2 e^{sr(\alpha)}\left\{L_{30} f_0 + \frac{1}{s}(L_{30} f_1 + L_{31} f_0) + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{5. 4}$$

Здесь L_{10}, L_{20}, L_{30} — недифференциальные выражения

$$\begin{aligned} L_{10} &= \gamma^2 \frac{\operatorname{ch}^3\alpha}{u} r'^4 - 2u \operatorname{ch}\alpha r'^2 + \frac{1}{\gamma^2}\frac{u^3}{\operatorname{ch}\alpha}, \\ L_{20} &= r'^2 - 1, \\ L_{30} &= \frac{u^4}{\operatorname{ch}^4\alpha} - \frac{\gamma^2 u^2}{2\operatorname{ch}^2\alpha}(1 + r'^2), \end{aligned} \tag{5. 5}$$

а L_{11}, L_{21}, L_{31} — дифференциальные выражения первого порядка

$$\begin{aligned} L_{11} f_0 &= \frac{2\gamma^2}{f_0}\left(\frac{\operatorname{ch}^3\alpha}{u} r'^3 f_0^2\right)' - \frac{2}{f_0}(u \operatorname{ch}\alpha\, r' f_0^2)', \\ L_{21} f_0 &= \frac{1}{f_0}(r' f_0^2)', \\ L_{31} f_0 &= -\frac{\gamma^2}{2f_0}\left(\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2\alpha} r' f_0^2\right)'. \end{aligned} \tag{5. 6}$$

Решение системы (4. 1), (4. 2) сводится к последовательному определению функций $r(a)$, ψ_0 и φ_0, ..., причем функция $r(a)$ определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} s^2L_{10}, & L_{20} \\ -L_{20}, & \lambda^2 s^2 L_{10} - q_0 L_{30} \end{vmatrix} = 0, \tag{5. 7}$$

функции $\psi_0(a)$, $\varphi_0(a)$ из уравнений

$$\begin{vmatrix} s^2L_{10}, & -s^2L_{11}\varphi_0 - L_{21}\psi_0 \\ -L_{20}, & L_{21}\varphi_0 - \lambda^2 s^2 L_{11}\psi_0 + q_0 L_{31}\psi_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{5. 8}$$

$$s^2L_{10}\varphi_0 + L_{20}\psi_0 = 0. \tag{5. 9}$$

Дальнейшее развертывание уравнений (4. 1), (4. 2) по нисходящим степеням s уже незаконно, так как эти уравнения составлены с точностью до членов порядка $1/s^2$.

Введем следующие обозначения

$$\eta = \frac{\lambda^{0.5}}{\gamma^2}\frac{\gamma}{\alpha_*}, \quad s^2 = \frac{\gamma^2\eta}{\lambda}\tau^2, \quad q_0 = \lambda\eta\varkappa,$$

тогда уравнение (5. 7) получается в виде

$$\gamma^8\eta^2\tau^4\frac{\mathrm{ch}^6\alpha}{u^2}r'^8 - \gamma^6\eta^2\tau^2\left(4\tau^2\mathrm{ch}^4\alpha - \frac{1}{2}\varkappa u\,\mathrm{ch}\alpha\right)r'^6 +$$

$$+\left\{1 + \gamma^4\eta^2\tau^2\left[6\tau^2u^2\mathrm{ch}^2\alpha - \varkappa\left(\frac{2u^3}{\mathrm{ch}\alpha} - \frac{\gamma^2}{2}u\,\mathrm{ch}\alpha\right)\right]\right\}r'^4 -$$

$$-\left\{2 + \gamma^2\eta^2\tau^2\left[4\tau^2u^4 - \varkappa\left(\frac{5}{2}\frac{u^5}{\mathrm{ch}^3\alpha} - \gamma^2\frac{u^3}{\mathrm{ch}\alpha}\right)\right]\right\}r'^2 +$$

$$+\left\{1 + \eta^2\tau^2\left[\tau^2\frac{u^6}{\mathrm{ch}^2\alpha} - \varkappa\left(\frac{u^7}{\mathrm{ch}^5\alpha} - \frac{\gamma^2}{2}\frac{u^5}{\mathrm{ch}^3\alpha}\right)\right]\right\} = 0. \tag{5. 10}$$

Решение же системы (5. 8), (5. 9) дает

$$\psi_0(a) = C(r')^{-0.5}\left\{\frac{1}{\gamma^2\eta\tau^2}\frac{r'^2-1}{u\,\mathrm{ch}\alpha}\left(\frac{\gamma\,\mathrm{ch}\alpha}{u}r'^2 - \frac{1}{\gamma}\frac{u}{\mathrm{ch}\alpha}\right)^{-2} +\right.$$

$$+\gamma^3\eta\tau^2\mathrm{ch}^2\alpha\left(\frac{\gamma\,\mathrm{ch}\alpha}{u}r'^2 - \frac{1}{\gamma}\frac{u}{\mathrm{ch}\alpha}\right) + \frac{1}{4}\gamma^2\eta\varkappa\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2\alpha} -$$

$$\left.-\frac{1}{\gamma\eta\tau^2}\frac{(r'^2-1)^2}{u^2}\left(\frac{\gamma\,\mathrm{ch}\alpha}{u}r'^2 - \frac{u}{\gamma\,\mathrm{ch}\alpha}\right)^{-3}\right\}^{-0.5}, \tag{5. 11}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Из выражения (5. 11) вытекает, что изложенный прием интегрирования неприменим, когда в исследуемой области r' обратится в нуль, так как в этом случае $\psi_0 \to \infty$.

Уравнение (5. 10) имеет восемь, вообще говоря, комплексных корней r_j' следующего типа

$$r'_{1,2,3,4} = \pm[a_1(a) \pm ib_1(a)], \quad r'_{5,6,7,8} = \pm[a_2(a) \pm ib_2(a)], \tag{5. 12}$$

причем каждому корню r_j' соответствует своя функция ψ_{0j}.

Функции ψ_{0j} могут быть представлены в виде

$$\underset{(j=1,2,3,4)}{\psi_{0j} = C_j[A_1(a) \pm iB_1(a)]}, \qquad \underset{(j=5,6,7,8)}{\psi_{0j} = C_j[A_2(a) \pm iB_2(a)]}, \tag{5. 13}$$

где комплексно сопряженным корням $r' = a(\alpha) \pm ib(\alpha)$ соответствуют комплексно сопряженные функции $A(\alpha) \pm iB(\alpha)$. Функции ψ_{1j} остаются неопределенными, поэтому $\psi(\alpha)$ определена с точностью до членов порядка $1/s$

$$\psi = \sum_{j=1}^{8} C_j \psi_{0j}(\alpha)\, e^{\int s r'_j(\alpha) d\alpha}. \tag{5.14}$$

Отсюда следует, что краевые условия могут быть удовлетворены только в первом приближении (с точностью до членов порядка $1/s$), в то время как дифференциальные уравнения удовлетворены с точностью до членов порядка $1/s^2$.

Этот недостаток, свойственный методу асимптотического интегрирования, не мешает, однако, определить критическое значение параметра нагрузки с точностью до членов порядка $1/s^2$.

В самом деле, допустим, что нам удалось уточнить дифференциальные выражения (4.3)—(4.5) настолько, что стало возможным определение функции ψ_1. Если функции r' и ψ_0 зависят от параметров γ, η, τ и $\varkappa$, то функция ψ_1 зависит кроме этих параметров еще от параметра q_2. При заданных значениях γ, η, τ параметр $\varkappa$ определяется из краевых условий первого приближения

$$\psi = 0, \quad \psi' = 0, \tag{5.15}$$

$$\varphi'' + \frac{\nu s^2 u^2}{\gamma^2 \mathrm{ch}^2 \alpha}\varphi = 0, \qquad \varphi''' - (2+\nu)\frac{s^2 u^2}{\gamma^2 \mathrm{ch}^2\alpha}\varphi' = 0 \tag{5.16}$$

Зная $\varkappa$, можно назначить значение q_2 так, чтобы были удовлетворены краевые условия (4.12)—(4.15) с точностью до членов порядка $1/s^2$. Вместе с тем, допуская погрешность $1/s^2$, фактическое определение параметра q_2 интереса не представляет.

6. Оболочки цилиндрического типа. Цилиндрическая оболочка характеризуется отношением $k_\alpha / k_\beta = 0$, поэтому будем называть оболочкой цилиндрического типа такую, где в интервале $-\alpha_* \leqslant \alpha \leqslant \alpha_*$ будет

$$k_\alpha / k_\beta \leqslant \lambda^{0.5}. \tag{6.1}$$

Из выражений (1.2), (1.3) вытекает, что

$$\frac{k_\alpha}{k_\beta} = \gamma^2 \frac{\mathrm{ch}^2\alpha}{1 + \gamma^2 \mathrm{sh}^2\alpha}, \tag{6.2}$$

поэтому для выполнения условия (6.1) должно быть во всяком случае

$$\gamma^2 \leqslant \lambda^{0.5}. \tag{6.3}$$

В дальнейшем будем интересоваться оболочками средней приведенной длины, определяемыми условием

$$\gamma \sim \mathrm{th}\,\alpha_*. \tag{6.4}$$

Так как по условию (6.3) γ^2 — малая величина, то $\alpha_* \sim \gamma$, а в уравнениях (5.10), (5.11) параметр $\eta \geqslant 1$.

Оболочки указанного типа, симметрические и несимметрические относительно экваториальной линии ($\alpha = 0$) при свободно опертых краях, исследовал в отношении устойчивости их начального состояния равновесия Л. Ю. Поверус ([4]). Он исходил для определения критической нагрузки из упрощенных уравнений, которые в применяемой в настоящей работе координации имеют вид

$$\frac{s^4}{\gamma^2}\frac{u^3}{\mathrm{ch}\alpha}\varphi+\psi''-s^2\psi=0, \tag{6.5}$$

$$-\varphi''+s^2\varphi+\left(\frac{\lambda^2 s^4}{\gamma^2}\frac{u^3}{\mathrm{ch}\alpha}-qs^2\frac{u^4}{\mathrm{ch}^4\alpha}\right)\psi=0; \tag{6.6}$$

к этим уравнениям Л. Ю. Поверус присоединил упрощенные краевые условия

$$\psi=0, \qquad \psi''=0. \tag{6.7}$$

Путем простого обобщения известных результатов по устойчивости цилиндрической оболочки ([1]) можно легко показать, что при жестких диафрагмах упрощенные краевые условия получаются в форме

$$\psi=0, \qquad \psi'=0. \tag{6.8}$$

Приложение к уравнениям (6.5), (6.6) метода асимптотического интегрирования приводит к следующему головному уравнению

$$r'^4-2r'^2+1+\eta^2\tau^2\left(\tau^2\frac{u^6}{\mathrm{ch}^2\alpha}-\varkappa\frac{u^7}{\mathrm{ch}^5\alpha}\right)=0. \tag{6.9}$$

При оболочках цилиндрического типа средней приведенной длины с точностью до членов порядка γ^2

$$\mathrm{ch}\alpha\approx 1, \qquad u\approx 1,$$

поэтому коэффициенты в уравнении (6.9) — постоянные, а, следовательно, корни r_j' уравнения (6.9) также постоянные

$$r'_{1,2}=\pm\sqrt{\eta\sigma+1}, \qquad r'_{3,4}=\pm i\sqrt{\eta\sigma-1}, \tag{6.10}$$

где

$$\sigma=\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}. \tag{6.11}$$

Решение системы (6.5), (6.6) можно при малых значениях γ, α_* и в случае симметрической формы потери устойчивости представить в виде

$$\psi=C_1\,\mathrm{ch}\,s\sqrt{\eta\sigma+1}\,\alpha+C_2\cos s\sqrt{\eta\sigma-1}\,\alpha=$$

$$=C_1\mathrm{ch}\left(\tau\sqrt{\sigma+\frac{1}{\eta}}\frac{\alpha}{\alpha_*}\right)+C_2\cos\left(\tau\sqrt{\sigma-\frac{1}{\eta}}\frac{\alpha}{\alpha_*}\right). \tag{6.12}$$

Краевые условия (6.8) при $\alpha=\pm\alpha_*$ приводят к характеристическому уравнению

$$\sqrt{\sigma-\frac{1}{\eta}}\,\mathrm{tg}\left(\tau\sqrt{\sigma-\frac{1}{\eta}}\right)+\sqrt{\sigma+\frac{1}{\eta}}\,\mathrm{th}\left(\tau\sqrt{\sigma+\frac{1}{\eta}}\right)=0. \tag{6.13}$$

По условию (6.11) имеем

$$\varkappa=\tau^2+\frac{\sigma^2}{\tau^2}, \tag{6.14}$$

поэтому при заданном значении η ($\eta\geqslant 1$) следует найти такую совокупность τ, σ, которая, удовлетворяя уравнению (6.13), дает минимальное значение для $\varkappa$

$$\varkappa=\varkappa(\eta). \tag{6.15}$$

Результаты вычисления приведены в табл. 1.

Таблица 1

$1/\eta$	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\varkappa$	4.15	4.32	4.53	4.76	5.01
τ^2	3.11	3.19	3.29	3.30	3.49
σ	1.797	1.900	2.020	2.155	2.303

Для дальнейшего важно отметить, что при малых значениях η формальное решение задачи (6. 13), (6. 14) имеет следующее асимптотическое выражение:

$$\text{при } \eta \to 0 \quad \tau^2 \to \frac{1}{\eta}, \quad \varkappa \to \frac{2}{\eta}, \quad \sigma - \frac{1}{\eta} \to \frac{\pi^2}{4}\eta. \tag{6. 16}$$

Теперь можно выяснить погрешность, которую совершаем, определяя четыре корня r' из уравнения (6. 9) вместо уравнения (5. 10). При этом ограничимся рассмотрением случая, где в интервале $(-\alpha_*, \alpha_*)$ будут $\mathrm{ch}\,\alpha \sim 1$, $u \sim 1$. Прежде всего, однако, нужно отметить, что исходные уравнения (4. 1), (4. 2) составлены с асимптотической погрешностью порядка $1/s^2$, поэтому погрешность даже уравнения (5. 10) может быть слишком велика, если s малое число. Порядок этой погрешности зависит от значений γ, λ, α_* и выражается в форме

$$\frac{1}{s^2} = \frac{\lambda}{\gamma^2 \eta \tau^2} = \frac{\lambda^{0.5}}{\tau^2}\frac{\alpha_*}{\gamma}. \tag{6. 17}$$

Согласно выражениям (6. 10), уравнение (6. 9) имеет при малых значениях α_* корни

$$r_{\mathrm{I}}'^2 \approx 1 + \eta\sigma, \qquad r_{\mathrm{II}}'^2 \approx 1 - \eta\sigma,$$

причем

$$\begin{aligned}
&r_{\mathrm{I}}'^2 \to 1.797\eta, && r_{\mathrm{II}}'^2 \to -1.797\eta && \text{при } \eta \to \infty,\\
&r_{\mathrm{I}}'^2 = 3.303, && r_{\mathrm{II}}'^2 = -1.303 && \text{при } \eta = 1,\\
&r_{\mathrm{I}}'^2 \to 2, && r_{\mathrm{II}}'^2 \to -\frac{\pi^2}{4}\eta^2 && \text{при } \eta \to 0.
\end{aligned}$$

Если теперь сопоставить уравнения (5. 10) и (6. 9), то нетрудно убедиться, что при больших значениях $\eta\,(\eta \gg 1)$ погрешность уравнения (6. 9) будет порядка $\lambda^{0.5}\gamma/\alpha_*$, при значениях же $\eta \sim 1$ — порядка γ^2. При этом полезно напомнить, что погрешность самого уравнения (5. 10) при значениях $\eta \geqslant 1$ будет порядка $\lambda^{0.5}\alpha_*/\gamma$.

7. **Расширение исследуемой области.** Результаты предыдущего раздела относятся к области, где

$$\gamma^2 \ll 1, \qquad \alpha_* \sim \gamma.$$

Для расширения области нужно заменить уравнение (6. 9) более точным уравнением. Из (5. 10) можно вывести, что таковым было бы уравнение

$$r'^4 - \left\{2 + \gamma^2\eta^2\tau^2\left(4\tau^2u^4 - \frac{5}{2}\varkappa\frac{u^5}{\mathrm{ch}^3\alpha}\right)\right\}r'^2 +$$

$$+ 1 + \eta^2\tau^2\left[\tau^2\frac{u^6}{\mathrm{ch}^2\alpha} - \varkappa\left(\frac{u^7}{\mathrm{ch}^5\alpha} - \frac{\gamma^2}{2}\frac{u^5}{\mathrm{ch}^3\alpha}\right)\right] = 0, \qquad (7.1)$$

погрешность которого будет предположительно порядка γ^4.

Остальные четыре корня уравнения (5.10) можно определить с этой же погрешностью из упрощенного уравнения

$$\gamma^8\eta^2\tau^4\frac{\mathrm{ch}^6\alpha}{u^2}r'^4 - \gamma^6\eta^2\tau^2(4\tau^2\mathrm{ch}^4\alpha - \frac{1}{2}\varkappa u\mathrm{ch}\alpha)r'^2 + 1 = 0, \qquad (7.2)$$

откуда имеем

$$r' \approx \pm\frac{1}{\gamma^2\sqrt{2\eta}\tau}\sqrt{\frac{u}{\mathrm{ch}^3\alpha}}\left\{1 + \gamma^2\eta\tau^2u\mathrm{ch}\alpha\left(1 - \frac{\varkappa}{8\tau^2}\frac{u}{\mathrm{ch}^3\alpha}\right) \pm\right.$$

$$\left.\pm i\left[1 - \gamma^2\eta\tau^2u\mathrm{ch}\alpha\left(1 - \frac{\varkappa}{8\tau^2}\frac{u}{\mathrm{ch}^3\alpha}\right)\right]\right\}. \qquad (7.3)$$

Корни (7.3), как известно из линейной теории оболочек, определяют интегралы типа простого краевого эффекта. Построение этих интегралов принципиальных трудностей не вызывает, и мы будем ими пользоваться для вывода краевых условий к интегралам, которые строятся на базе корней уравнения (7.1). Они получаются путем исключения произвольных постоянных интегралов простого краевого эффекта из системы краевых условий (5.15)—(5.16). Сам вывод связан с довольно длинными выкладками, поэтому его изложение не представляется возможным. Отметим лишь, что при выводе целесообразно исходить из предположения, что формальное решение рассмотренной в предыдущем разделе задачи при малых значениях η (при не очень малых значениях γ) дает качественно правильные результаты и в этой области, где ее погрешность заведомо большая. Тогда можно полагать, что при $\eta < 1$ будет $\eta\tau^2 \sim 1$ и поэтому в (7.3) главное значение r' определяется выражением

$$r' = \pm\frac{1}{\gamma^2\sqrt{2\eta}\tau}\sqrt{\frac{u}{\mathrm{ch}^3\alpha}}(1 \pm i);$$

другие члены в (7.3) дают поправки порядка γ^2 по сравнению с единицей; их нужно удержать в выкладках, однако членами порядка γ^4 по сравнению с единицей можно пренебречь, так как погрешность уравнений (7.1), (7.3) — такого же порядка.

В результате приходим к краевым условиям

$$\{1 + 2(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2u\mathrm{ch}\alpha\}\psi + (1 + \nu\gamma^2\eta\tau^2u\mathrm{ch}\alpha)\left(\gamma^2\frac{\mathrm{ch}^3\alpha}{u}\varphi'' + \nu s^2u\mathrm{ch}\alpha\,\varphi\right) +$$

$$+ (2+\nu)\sqrt{2}\gamma^4\eta^{1.5}\tau^3u^{0.5}(\mathrm{ch}\alpha)^{2.5}\left\{\frac{\gamma^2}{s}\frac{\mathrm{ch}^3\alpha}{u}\varphi''' - (2+\nu)su\mathrm{ch}\alpha\,\varphi'\right\} = 0, \qquad (7.4)$$

$$\{1 + 2(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2u\mathrm{ch}\alpha\}\psi' + \nu\sqrt{2\eta}\,\tau\sqrt{\frac{u^3}{\mathrm{ch}\alpha}}\left(s\gamma^2\frac{\mathrm{ch}^3\alpha}{u}\varphi'' + \nu s^3u\mathrm{ch}\alpha\,\varphi\right) +$$

$$+ \{1 + (2+\nu)\gamma^2\eta\tau^2u\mathrm{ch}\alpha\}\left\{\gamma^2\frac{\mathrm{ch}^3\alpha}{u}\varphi''' - (2+\nu)s^2u\mathrm{ch}\alpha\,\varphi'\right\} = 0, \qquad (7.5)$$

которые все же могут быть упрощены. В самом деле, по результатам предыдущего раздела при $\eta < 1$

$$s^2\varphi \sim \gamma^2\psi, \quad s\varphi' \sim \gamma^2\psi, \quad \gamma^2\varphi'' \sim \gamma^4\psi, \quad \frac{\gamma^2}{s}\varphi''' \sim \gamma^4\psi, \tag{7.6}$$

поэтому краевые условия (7.4), (7.5) могут быть с погрешностью порядка γ^4 представлены в форме

$$\{1 + 2(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2 u\,\mathrm{ch}\,a\}\psi + \nu s^2 u\,\mathrm{ch}\,a \cdot \varphi = 0, \tag{7.7}$$

$$\{1 + 2(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2 u\,\mathrm{ch}\,a\}\psi' + \nu^2\sqrt{2\eta\tau}\,s^3 u^{2.5}(\mathrm{ch}\,a)^{0.5}\varphi - (2+\nu)s^2 u\,\mathrm{ch}\,a \cdot \varphi' = 0. \tag{7.8}$$

Отметим еще, что при значениях $\eta > 1$ приходим, допуская погрешность порядка $\sqrt{\lambda\gamma}/a_*$, к краевым условиям (6.8).

Вернемся к интегралам, получаемым на базе корней уравнения (7.1). Четные относительно a интегралы (описывающие симметрическую относительно $a = 0$ потерю устойчивости основного напряженного состояния) можно представить в виде

$$\psi = \psi_{0,1}(a)\,\mathrm{ch}\,s a_1(a) + \psi_{0,2}(a)\cos s a_2(a), \tag{7.9}$$

где

$$a_j(a) = \int_0^a \left\{ \eta\tau \frac{u^3}{\mathrm{ch}\,a}\left[\varkappa\frac{u}{\mathrm{ch}^3 a} - \tau^2 - \gamma^2\frac{\mathrm{ch}^2 a}{u^2}\left(3\varkappa\frac{u}{\mathrm{ch}^3 a} - 4\tau^2\right)\right]^{1/2} - (-1)^j\left[1 + \gamma^2\eta^2\tau^2 u^4\left(2\tau^2 - \frac{5}{4}\varkappa\frac{u}{\mathrm{ch}^3 a}\right)\right]\right\}^{1/2} da. \tag{7.10}$$

$$(j = 1,2)$$

Функции интенсивности $\psi_{0,1}$, $\psi_{0,2}$ определяются по формуле (5.11) соответственно через функции $a_1'(a)$, $a_2'(a)$; они содержат также произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2. При рассмотрении симметрических относительно $a = 0$ оболочек их определение интереса не представляет, так как $\psi_{0,j}(a_*) = \psi_{0,j}(-a_*)$, а только эти краевые значения и входят в краевые условия как произвольные постоянные.

Далее имеем

$$\varphi = \varphi_{0,1}(a)\,\mathrm{ch}\,s a_1(a) + \varphi_{0,2}(a)\cos s a_2(a), \tag{7.11}$$

где

$$\varphi_{0,j} = (-1)^j \frac{\left[a_j'^2 + (-1)^j\right] u\,\mathrm{ch}\,a}{\left[\gamma^2 a_j'^2\mathrm{ch}^2 a + (-1)^j u^2\right]^2}\frac{\gamma^2}{s^2}\psi_{0,j} \quad (j = 1,2) \tag{7.12}$$

Используя соотношения (7.9)—(7.12), получим из краевых условий (7.7)—(7.8) следующее характеристическое уравнение: при $a = a_*$

$$a_1'\{1 + 4(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2 u\,\mathrm{ch}\,a + \gamma^2\frac{\mathrm{ch}^2 a}{u^2}[(2+\nu)(a_1'^2 - 1) + \nu(a_2'^2 + 1)]\}\,\mathrm{th}\,s a_1 + a_2'\{1 + 4(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2 u\,\mathrm{ch}\,a - \gamma^2\frac{\mathrm{ch}^2 a}{u^2}[\nu(a_1'^2 - 1) + (2+\nu)(a_2'^2 + 1)]\}\,\mathrm{tg}\,s a_2 = 0. \tag{7.13}$$

При выводе этого уравнения отброшены члены порядка γ^4 по сравнению с единицей, а также малый член в уравнении (7.8), содержащий множитель ν^2. Учитывая это обстоятельство, отыскание точного решения уравнения (7. 13) было бы непоследовательно.

Предположим, что $\alpha_* \sim \gamma$. Так как мы связаны с условием $\gamma^4 \ll 1$, то отсюда следует, что в рассматриваемой области можно принять

$$\mathrm{ch}\alpha \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha^2, \quad u \approx 1.$$

Проводя соответствующие упрощения в выражениях (7. 10), получим

$$a_j'(\alpha_*) = \Big\{\tau\eta\sqrt{\varkappa-\tau^2}\Big(1-\frac{\gamma^2}{2}\,\frac{3\varkappa-4\tau^2}{\varkappa-\tau^2}\Big) - $$
$$- (-1)^j[1 + 2\gamma^2\eta^2\tau^2(\tau^2 - \frac{5}{8}\varkappa)] - \frac{1}{4}\,\alpha_*^2\eta\tau\frac{5\varkappa-2\tau^2}{\sqrt{\varkappa-\tau^2}}\Big\}^{1/2}, \quad (7.\ 14)$$

$$sa_j(\alpha_*) = \frac{1}{2}\tau\Big\{\Big[\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}\Big(1-\frac{\gamma^2}{2}\,\frac{3\varkappa-4\tau^2}{\varkappa-\tau^2}\Big) -$$
$$-(-1)^j\Big[\frac{1}{\eta}+2\gamma^2\eta\tau^2(\tau^2-\frac{5}{8}\varkappa)\Big]-\frac{1}{4}\,\alpha_*^2\tau\frac{5\varkappa-2\tau^2}{\sqrt{\varkappa-\tau^2}}\Big]^{1/2}+$$
$$+\frac{\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}\Big(1-\frac{\gamma^2}{2}\,\frac{3\varkappa-4\tau^2}{\varkappa-\tau^2}\Big)-(-1)^j\Big[\frac{1}{\eta}+2\gamma^2\eta\tau^2(\tau^2-\frac{5}{8}\varkappa)\Big]}{\Big(\frac{1}{4}\,\alpha_*^2\tau\frac{5\varkappa-2\tau^2}{\sqrt{\varkappa-\tau^2}}\Big)^{1/2}}\times$$
$$\times\arcsin\left[\frac{\frac{1}{4}\,\alpha_*^2\tau\frac{5\varkappa-2\tau^2}{\sqrt{\varkappa-\tau^2}}}{\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}\Big(1-\frac{\gamma^2}{2}\,\frac{3\varkappa-4\tau^2}{\varkappa-\tau^2}\Big)-(-1)^j\Big[\frac{1}{\eta}+2\gamma^2\eta\tau^2(\tau^2-\frac{5}{8}\varkappa)\Big]}\right]^{1/2}\Big\}.$$
$$(j=1,2) \quad (7.\ 15)$$

Характеристическое уравнение (7. 13) можно представить в виде

$$a_1'\{1+4(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2+2(1+\nu)\gamma^2\eta\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}\}\mathrm{th}sa_1 +$$
$$+ a_2'\{1+4(1+\nu)\gamma^2\eta\tau^2-2(1+\nu)\gamma^2\eta\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}\}\mathrm{tg}sa_2 = 0, \quad (7.\ 16)$$

так как

$$a_1'^2 - 1 \approx a_2'^2 + 1 \approx \eta\tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}. \quad (7.\ 17)$$

Введем следующие обозначения:

$$\sigma = \tau\sqrt{\varkappa-\tau^2}, \quad u = \frac{1}{2}\tau\frac{3\varkappa-4\tau^2}{\sqrt{\varkappa-\tau^2}}, \quad v = 2\eta\tau^2(\tau^2-\frac{5}{8}\varkappa),$$
$$w = \frac{1}{4}\tau\frac{5\varkappa-2\tau^2}{\sqrt{\varkappa-\tau^2}}\frac{\alpha_*^2}{\gamma^2}. \quad (7.\ 18)$$

Результаты предыдущего раздела статьи получены при предположениях

$$\gamma^2 u \ll \sigma, \quad \gamma^2 v \ll \frac{1}{\eta}, \quad \gamma^2 w \ll \sigma,$$

однако, эти же результаты показывают, что для оценки погрешности нужно исходить из отношений

$$\gamma^2 u/\Big(\sigma-\frac{1}{\eta}\Big), \quad \gamma^2 v/\Big(\sigma-\frac{1}{\eta}\Big), \quad \gamma^2 w/\Big(\sigma-\frac{1}{\eta}\Big).$$

Предположим и теперь, что эти отношения малы по сравнению с единицей. Тогда получим приближенные формулы:

$$a_j'(a_*) \approx \sqrt{\eta\sigma - (-1)^j}\left\{1 - \frac{\gamma^2}{2\left[\sigma - (-1)^j \frac{1}{\eta}\right]}[u + (-1)^j v + w] - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma^4}{8\left[\sigma - (-1)^j \frac{1}{\eta}\right]^2}[u + (-1)^j v + w]^2 + \cdots\right\}, \qquad (7.19)$$

$$sa_j(a_*) \approx \tau\sqrt{\sigma - (-1)^j \frac{1}{\eta}}\left\{1 - \frac{\gamma^2}{2\left[\sigma - (-1)^j \frac{1}{\eta}\right]}\left[u + (-1)^j v + \frac{1}{3} w\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma^4}{8\left[\sigma - (-1)^j \frac{1}{\eta}\right]^2}\left[[u + (-1)^j v]^2 + \frac{2}{3}[u + (-1)^j v] w + \frac{1}{5} w^2\right] + \ldots\right\}, \quad (7.20)$$

$$(j = 1,2)$$

где члены с множителями γ^4 приводятся для оценки погрешности. Если члены с множителями γ^2 малы по сравнению с единицей, то характеристическое уравнение (7. 16) можно выписать в упрощенной форме

$$\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}}\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}} - \gamma^2\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}}\left\{\left[\frac{u - v + w}{2\left(\sigma + \frac{1}{\eta}\right)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2(1 + \nu)\eta\sigma\right]\mathrm{th}\,\tau\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}} + \frac{u - v + \frac{1}{3} w}{2\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}}}\,\frac{\tau}{\mathrm{ch}^2\tau\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}}}\right\} +$$

$$+ \sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}}\,\mathrm{tg}\,\tau\sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}} - \gamma^2\sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}}\left\{\left[\frac{u + v - w}{2\left(\sigma - \frac{1}{\eta}\right)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2(1 + \nu)\eta\sigma\right]\mathrm{tg}\,\tau\sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}} + \frac{u + v + \frac{1}{3} w}{2\sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}}}\,\frac{\tau}{\cos^2\tau\sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}}}\right\} = 0. \quad (7.21)$$

При заданных значениях η, a_*/γ и τ задача сводится к отысканию корня $\sigma = \sigma(\eta, \tau, \gamma^2, a_*/\gamma)$ уравнения (7. 21); при этом практический интерес представляет только такое значение τ, которое дает наименьшее значение для $\varkappa$, вычисляемого по формуле

$$\varkappa = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}.$$

Для решения этой задачи применим метод последовательных приближений.

Предположим, что нами решена такая задача для уравнения

$$\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}}\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{\sigma + \frac{1}{\eta}} + \sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}}\,\mathrm{tg}\,\tau\sqrt{\sigma - \frac{1}{\eta}} = 0, \qquad (7.22)$$

т. е. задача, рассмотренная в предыдущем разделе статьи. Пусть соответствующие значения σ, τ и $\varkappa$ — функции от η — будут σ_0, τ_0, $\varkappa_0$. Используем эти значения для вычисления в характеристическом уравнении (7. 21) членов с множителем γ^2. Теперь, зная приближенное значение суммы этих членов $\gamma^2 S$, найдем уточненное значение $\varkappa$ из уравнения

$$\sqrt{\sigma+\frac{1}{\eta}}\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{\sigma+\frac{1}{\eta}}+\sqrt{\sigma-\frac{1}{\eta}}\,\mathrm{tg}\,\tau\sqrt{\sigma-\frac{1}{\eta}}+\gamma^2 S=0, \qquad (7.23)$$

где

$$S=S(\sigma_0,\ \tau_0,\ \varkappa_0,\ \eta,\ a_*/\gamma).$$

Дальнейшее уточнение $\varkappa$ по изложенной схеме выходит за рамки точности уравнения (7. 21) и было бы непоследовательным. Поэтому результаты получим в форме

$$\begin{aligned}\varkappa(\eta,\ \gamma,\ a_*)&=\varkappa_0(\eta)+\gamma^2\varkappa_1(\eta)+a_*^2\varkappa_2(\eta)\\ \tau^2(\eta,\ \gamma,\ a_*)&=\tau_0^2(\eta)+\gamma^2\tau_1^2(\eta)+a_*^2\tau_2^2(\eta).\end{aligned} \qquad (7.24)$$

Коэффициенты в правой части выражений (7. 24) при некоторых значениях η приводятся в табл. 2. В этой таблице даются также ориентировочные числа m, n, позволяющие установить область применимости данных табл. 2. А именно, результаты, приведенные в табл. 2, применимы, пока

$$(\gamma^2/m)^2 \ll 1, \quad (a_*^2/n)^2 \ll 1. \qquad (7.25)$$

Таблица 2

$1/\eta$	$\varkappa_0$	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	τ_0^2	τ_1^2	τ_2^2	m	n
1.19	5.21	−4.98	2.22	3.58	4.33	−1.93	0.13	0.18
1.35	5.40	−4.18	2.12	3.65	3.21	−1.69	0.14	0.17
1.52	5.61	−3.54	2.25	3.74	2.42	−1.54	0.16	0.15
1.71	5.85	−2.75	2.34	3.83	1.68	−1.43	0.17	0.14
1.91	6.12	−2.08	2.45	3.94	1.15	−1.36	0.19	0.13
2.14	6.43	−1.44	2.58	4.07	0.72	−1.30	0.20	0.12
2.39	6.78	−0.81	2.76	4.22	0.37	−1.26	0.22	0.11
2.67	7.20	−0.16	3.00	4.39	0.07	−1.26	0.23	0.10
2.98	7.68	+0.48	3.26	4.59	−0.18	−1.26	0.25	0.09

На основе приведенных результатов нетрудно проверить, что предложенный упрощенный метод при малых значениях η применим только для расчета оболочек малой приведенной длины (где отношение a_*/γ — малое число), и даже в последнем случае погрешность результатов (обнаруживающаяся при проверке условий (7. 25)) при обычных относительных толщинах сравнительно большая. Для уменьшения погрешности нужно отказаться от применения упрощенного уравнения (7. 21) и перейти к более точному уравнению (7. 16), где a_1, a_2, a_1', a_2' даются выражениями (7. 14), (7. 15).

8. **Сводка результатов.** Рассмотрим бочкообразную оболочку, срединную поверхность которой можно аппроксимировать отсеком поверхности эллипсоида вращения между двумя плоскостями, симметричными и параллельными экваториальной плоскости. Пусть будут R_2 — радиус среднего параллельного круга, R_1 — радиус меридиана оболочки у среднего параллельного круга, L — расстояние между жесткими торцевыми диафрагмами, t — толщина оболочки, E — модуль упругости, p — критическое всестороннее давление оболочки. В статье вместо этих величин введены следующие

$$\gamma^2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \alpha_* = \operatorname{Arth} \frac{L}{\sqrt{R_1 R_2}}, \quad \lambda = \frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\, R_2}$$
$$\eta = \frac{\sqrt{\lambda}}{\gamma \alpha_*}, \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{p\alpha_*}{E\gamma} \lambda^{-5/2}. \tag{8.1}$$

Зависимость $\varkappa$ от η при больших значениях $\eta (\eta > 1)$ дана в табл. 1 для расчета критического давления оболочек средней приведенной длины $(\alpha_* \sim \gamma)$. При малых значениях η критическое давление определяется выражением (7. 24), коэффициенты которого приведены в табл. 2; области применимости этих данных даются условиями в виде сильных неравенств (7. 25).

Институт строительства и строительных материалов Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 11 VII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Алумяэ, Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметрической нагрузке, Прикл. мат. мех., т. XVII, вып. 5, 1953.
2. В. З. Власов, Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек, Прикл. мат. мех., т. VIII, вып. 2, 1944.
3. Х. М. Муштари, Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия, Прикл. мат. мех., т. II, вып. 4, 1939.
4. Л. Ю. Поверус, Устойчивость оболочки вращения с малой положительной кривизной под действием равномерно распределенного внешнего давления, Труды Таллинского политехнического института, № 65, 1955.
5. И. Я. Штаерман, Устойчивость оболочек, Сборник трудов Киевского авиационного института, I, 1936.

PÖÖRDELLIPSOIDI PINNA JÄRGI KUJUNDATUD ELASTSE KOORIKU KRIITILINE RÕHK

N. ALUMÄE,
Eesti NSV Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige

Resümee

Artiklis vaadeldakse ühtlase välisrõhuga koormatud elastset koorikut, mille keskpind kujutab pöördellipsoidi pinda (1.1) kahe paralleelringi vahel. Otstes on koorik suletud jäikade plaatidega.

Välisrõhu kriitilise suuruse määramiseks lähtutakse diferentsiaalvõrrandeist (4.1), (4.2), mis on rakendatavad juhul, kui pärast telgsümmeetrilise

alg-tasakaalukuju püsivuse kaotust tekkiva tsüklilise sümmeetriaga tasakaalukuju lainete arv s piki kooriku paralleeli on suur, nii et $s^2 \gg 1$. Diferentsiaalvõrrandite integreerimiseks kasutatakse asümptootilise integreerimise meetodit; seejuures piirdutakse ainult juhuga, kus „etaloonvõrrand" on konstantsete kordajatega.

Detailsemalt uuritakse ekvaatorparalleeli suhtes sümmeetrilist koorikut. Olgu R_2 — ekvaatorparalleeli raadius, R_1 — meridiaani kõverusraadius ekvaatorparalleeli juures, L — otsplaatide vaheline kaugus, E — elastsusmoodul, ν — Poissoni tegur, p — kriitiline rõhk. Artiklis kasutatakse nende asemel nimetuid suurusi (8. 1), mille kaudu kriitilise rõhu suurus määratakse artiklis esitatud tabelite abil. Tabeli 1 abil määratakse keskmise redutseeritud pikkusega ($a_* \sim \gamma$) kooriku kriitiline rõhk parameetri η suurtel väärtustel ($\eta > 1$); η väikestel väärtustel määratakse rõhk seosega (7. 24), mille koefitsiendid on toodud tabelis 2. Viimase andmete rakenduspiirkond määratakse võrratustingimustega (7. 25).

Artiklis esitatud asümptootilise integreerimise meetodi rakenduspiirkonda saab laiendada, kui lihtsustatud võrrandi (7. 21) asemel lähtuda seostest (7. 14) — (7. 16).

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Ehituse ja Ehitusmaterjalide Instituut

Saabus toimetusse
11. VII 1956

CRITICAL PRESSURE OF A SHELL GENERATED BY ELLIPSOIDAL SURFACE

N. ALUMÄE,
Corresponding Member, Academy of Sciences of the Estonian SSR

Summary

The paper considers elastic stability under external pressure p of a thin shell of revolution. Its middle surface presents an ellipsoid (1. 1) between the two parallels — a_*, a_* respectively. The stress function and the curvature function are introduced in section 3 in a somewhat different way as usually recommended with the aim to reduce the error when stress state after buckling slowly changes in the direction of meridian.

The mathematical problem is an eigenvalue problem expressed by 1) ordinary differential equations (4. 1), (4. 2) containing a large parameter s^2, 2) boundary conditions (4. 12) — (4. 15) corresponding to completely built in edges of shell. As method of solution is used the WKBJ-method with the "etalon equation" having constant coefficients.

Comparatively simple solutions can be obtained only in the case of a shell of cylindrical type with median reduced length. In this case the solution is in form (7. 9) with arguments (7. 10); the characteristic equation (7. 13) should be satisfied by corresponding choice of parameter $\varkappa$, determining the critical pressure p. Reduced critical pressure $\varkappa$ is a function of parameter τ, i. e. $\varkappa = \varkappa(\tau)$. Of practical interest is the minimum value of that function. Some numerical results are presented.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Building and Building-Materials

Received
July 11, 1956