EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VIII KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1959, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VIII
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1959, № 2

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1959.2.06

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

КОРЕГУЛЯРНЫЕ И КОНУЛЕВЫЕ МЕТОДЫ

Э. И. ЮРИМЯЭ

Введение

Пусть X и Y — некоторые банаховы пространства. Мы будем рассматривать матричные преобразования *

$$(\mathrm{I}) \qquad y_n = \sum_k A_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

где A_{nk} — ограниченные линейные операторы из X в Y.

Обозначим через $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ матрицу преобразования (I) и через c_X^0, c_X и m_X соответственно классы всех (сильно) сходящихся к нулю, (сильно) сходящихся и органиченных последовательностей $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ в X. Они превращаются в банаховы пространства при нормировке $\|\mathfrak{x}\| = \sup\limits_k \|x_k\|$. Классы всех последовательностей, которые при помощи (I) преобразуются в сходящиеся (сходящиеся к нулю) последовательности, обозначим через $\mathfrak{A}^*$ $(\mathfrak{A}_0^*)$. Предел последовательности $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) = \{y_n\}$ назовем $\mathfrak{A}$-суммой последовательности $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ и обозначим через $\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\}$.

Такие преобразования рассматриваются в работах [2, 1, 5, 7], из которых первые две посвящены установлению необходимых и достаточных условий для того, чтобы метод $\mathfrak{A}$ сохранял сходимость, т. е. суммировал все сходящиеся последовательности.

Теорема 1. *Метод $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_n A_{nk} x = A_k x \;\; (x \in X;\; k = 0, 1, \ldots)$,

2° *существует* $\lim\limits_n \sum\limits_k A_{nk} x = A x \;\; (x \in X)$,

3° $\sup\limits_{\|x_k\| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_{k=0}^{p} A_{nk} x_k \right\| \leqslant M \;\; (n, p, = 0, 1, \ldots)$.

В § 1 настоящей статьи рассматривается поле суммируемости $\mathfrak{A}^*$ матричного метода $\mathfrak{A}$ как некоторое FK-пространство; дается формула, которой выражаются все непрерывные линейные функционалы в $\mathfrak{A}^*$.

---

* Для краткости обозначим $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty}$ и $\sup\limits_{0 \leqslant k < \infty}$ соответственно через $\sum\limits_k$, $\lim\limits_k$ и $\sup\limits_k$.

В § 2 все методы, сохраняющие сходимость, разделяются на классы корегулярных и конулевых методов и выясняется, в частности, топологическое значение понятий корегулярного и конулевого методов суммирования числовых рядов, введенных Виланским [3].

Результаты §§ 1 и 2 применяются в §§ 3 и 4 при обобщении некоторых результатов Целлера [4] для абстрактных рядов. При этом оказывается, что во многих случаях доказательства Целлера хорошо применимы не только для числовых рядов, но и в данном общем случае (см. теоремы 5, 6 и 8); при других теоремах (см. теоремы 3, 4 и 7) использование определения конулевого метода, данного в § 2, и теоремы 4.5 [4] несколько упрощает доказательства.

§ 1. Поле матричного метода

Оказывается, что и при вышеуказанных методах поле суммируемости $\mathfrak{A}^*$ метода $\mathfrak{A}$ является FK-пространством [4] (т. е. полным метрическим локально выпуклым пространством, в котором имеет место сходимость по координатам). Доказательство такое же, как и в случае числовых рядов, с заменой непрерывных линейных функционалов на непрерывные линейные операторы. Итак верна

Теорема 2. *Поле суммируемости $\mathfrak{A}^*$ метода $\mathfrak{A}$ является FK-пространством с квазинормами*

$$(1)\quad \sup_m \left\| \sum_{k=0}^{m} A_{nk} x_k \right\| \qquad (n=0,1,\ldots)$$

$$(2)\quad \|x_k\| \qquad (k=0,1,\ldots)$$

$$(3)\quad \sup_n \left\| \sum_k A_{nk} x_k \right\|.$$

При реверсивности метода $\mathfrak{A}$ (метод $\mathfrak{A}$ назовем реверсивным, если система (I) имеет единственное решение при каждой $\mathfrak{y} = \{y_n\} \in c_Y$) $\mathfrak{A}^*$ оказывается банаховым пространством с нормой (3).

В применениях важно узнать общий вид непрерывного линейного функционала в пространстве $\mathfrak{A}^*$. По аналогии с [4] можно доказать, что каждый непрерывный линейный функционал в $\mathfrak{A}^*$ выражается формулой

$$(\mathrm{II})\quad f(\mathfrak{x}) = \sum_k h_k x_k + \sum_n g_n y_n + g y$$

где h_k — непрерывные линейные функционалы в X, а g_n и g — в Y, $y_n = \sum\limits_k A_{nk} x_k$, $y = \lim\limits_n y_n$, причем по теореме Банаха-Штейнхауса должно быть выполнено условие

$$\sum_n \| g_n \| < \infty$$

вытекающее из требования сходимости ряда $\sum\limits_n g_n y_n$ при всех $\mathfrak{y} = \{y_n\} \in c_Y$.

Здесь и в дальнейшем мы пользуемся последовательностями

$$\mathfrak{e}(y) = \{y, y, \ldots, y, \ldots\} \quad (y \in Y)$$

и

$$\mathfrak{e}_k(y) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ нулей}}, y, 0, \ldots\} \quad (y \in Y;\ k=0,1,\ldots)$$

которые составляют основное множество в пространстве c_Y.

§ 2. Корегулярные и конулевые методы

Если метод $\mathfrak{A}$ сохраняет сходимость, то последовательности $\mathfrak{e}(x)$ и $\mathfrak{e}_k(x)$ $(x \in X;\ k = 0,1,\ldots)$ принадлежат полю суммируемости метода $\mathfrak{A}$. Если в пространстве $\mathfrak{A}^*$

$$\mathfrak{e}^*_r(x) = \mathfrak{e}(x) - \sum_{k=0}^{r} \mathfrak{e}_k(x) \quad (r = 0,1,\ldots)$$

слабо сходится к нулю при всех $x \in X$, то мы назовем метод $\mathfrak{A}$ конулевым, в противном случае — корегулярным.

Из равенства (II) видно, что в $\mathfrak{A}^*$ имеет место слабая сходимость к нулю при $\mathfrak{e}_r^*(x)$ тогда и только тогда, когда это справедливо при $\mathfrak{y}_r = \mathfrak{A}[\mathfrak{e}_r^*(x)] = \{y_n^r\}$ в пространстве c_Y. Так же как в [1] (гл. IX), можно доказать, что для слабой сходимости последовательности $\mathfrak{y}_r = \{y_n^r\}$ $(r = 0,1,\ldots)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

1° $\lim\limits_r g(y_n^r) = 0$ при всех n и при всех g в Y;

2° $\lim\limits_r g(\lim\limits_n y_n^r) = 0$ при всех g в Y,

3° последовательность $\{\mathfrak{y}_r\}$ ограничена.

Контролируя эти условия при $\mathfrak{e}_r^*(x)$, видим, что условия 1° и 3° выполнены в силу теоремы 1. Из 2°

$$\lim_r g(\lim_n \sum_{k=r+1}^{\infty} A_{nk}x) = \lim_r g(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0$$

Мы получили следующий результат:

метод $\mathfrak{A}$ — конулевой тогда и только тогда, когда

$$\text{(III)} \qquad \lim_r g\,(Ax - \sum_{k=0}^{r} A_k x) = 0$$

при всех $x \in X$ и при всех g в Y.

Пример 1. Пусть $X = Y = R_1$, где R_1 — поле комплексных чисел и A_{nk} — комплексные числа. Следовательно, речь идет о числовых рядах. В этом случае, как известно, определенная Виланским [3] характеристика $\varrho(\mathfrak{A})$ метода суммирования $\mathfrak{A}$ выражается формулой

$$\varrho(\mathfrak{A}) = A - \sum_k A_k$$

где $A = \lim\limits_n \sum\limits_k A_{nk}$ и $A_k = \lim\limits_n A_{nk}$ $(k = 0,1,\ldots)$.

Условие (III) дает в данном случае

$$\alpha \cdot \lim_r \mathfrak{A}\{e_r^*\} = \alpha \cdot \varrho(\mathfrak{A}) = 0$$

где $\quad e_r^* = e - \sum\limits_{k=0}^{r} e_k,\ e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}\quad$ и

$$e_k = \{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{\text{к нулей}}, 1, 0, \ldots\} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

Из этого ясно, что оба определения конулевого метода совпадают.

Пример 2. Пусть $X = Y$. В этом случае мы можем говорить о регулярных обобщенных методах, как и при числовых рядах. Очевидно, что в этом случае $Ax = x$ и $A_k x = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Из (III) следует, что каждый регулярный метод является корегулярным.

Пусть R_1 и R_2 означают FK-пространства с $R_1 \subseteq R_2$. Тогда из теоремы 4.5 [4] вытекает, что каждый непрерывный линейный функционал в R_1 является непрерывным линейным функционалом и в R_2. Из этого непосредственно следует

Теорема 3. *Корегулярный метод* $\mathfrak{A}$ *не может быть сильнее конулевого метода* $\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{B}^*)$.

При числовых рядах Целлер получил этот результат из формулы $\varrho(\mathfrak{B}) = \alpha \cdot \varrho(\mathfrak{A})$, которая справедлива в случае $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{A}^*$.

§ 3. Совместность методов

Теперь рассмотрим некоторые вопросы совместности обобщенных матричных методов. Докажем три теоремы, обобщающие результаты Целлера [4].

Теорема 4. *Если* $\mathfrak{A}$ *корегулярный и* $\mathfrak{B}$ *конулевой методы, такие, что* $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{B}^*$, *то не найдется совместного с* $\mathfrak{B}$ *метода* $\mathfrak{D}$, *для которого* $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{A}^*$.

Доказательство. Если $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{A}^*$, то из теоремы 3 следует, что метод $\mathfrak{D}$ корегулярен.

Так как метод $\mathfrak{D}$ должен быть совместен с методом $\mathfrak{B}$, то

$$\lim_n \sum_{k=r+1}^{\infty} D_{nk} x = \lim_n \sum_{k=r+1}^{\infty} B_{nk} x$$

и выполнение условия (III) при методе $\mathfrak{D}$ следует из выполнения этого условия при $\mathfrak{B}$. Это значит, что метод $\mathfrak{D}$ должен быть конулевым. Мы получили противоречие, что и доказывает теорему.

Теорема 5. *Пусть последовательность* $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{A}^*$ *является точкой прикосновения множества* c_X *в пространстве* $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^* \supseteq \mathfrak{A}^*$ *и выполнены условия*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_n \sum\limits_k A_{nk} x = \lim\limits_n \sum\limits_n B_{nk} x \\ \lim\limits_n A_{nk} x = \lim\limits_n B_{nk} x \end{cases}$$

при всех $x \in X$. *В этом случае* $\mathfrak{B}\{\mathfrak{x}_0\} = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_0\}$.

Доказательство. Аналогично доказательству Целлера (см. теорему 6.3*a* [4]).

Теорема 6. *Если последовательность* $\mathfrak{x}_0$ *не является точкой прикосновения множества* c_X *в поле суммируемости метода* $\mathfrak{A}$, *то соответственно каждому элементу* $y_0 \in Y$ *найдется такой метод* $\mathfrak{B}$ *с* $\mathfrak{B}^* \supseteq \mathfrak{A}^*$, *что выполнены условия* (IV) *и* $\mathfrak{B}\{\mathfrak{x}_0\} = y_0$.

Доказательство. Учитывая следствие теоремы Банаха-Хана, найдется такой непрерывный линейный функционал $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ в пространстве $\mathfrak{A}^*$, что

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathfrak{x} \in c_X \\ 1 & \text{при } \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 \end{cases}$$

Положим

$$F(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} + (y_0 - \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_0\}) \cdot \mathfrak{f}(\mathfrak{x})$$

Учитывая общий вид непрерывного линейного функционала, можно убедиться, что найдется матричный метод $\mathfrak{B}$ с $\mathfrak{B}^* \supseteq \mathfrak{A}^*$ и $F(\mathfrak{x}) = \mathfrak{B}\{\mathfrak{x}\}$ при всех $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}^*$. Действительно,

$$F(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} + (y_0 - \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_0\}) \cdot \Big(\sum_k h_k x_k + \sum_n g_n y_n + g y\Big) =$$

$$= \lim_n \left[\sum_{k=0}^{n} A_{nk} x_k + (y_0 - \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_0\}) \sum_{k=0}^{n} \varphi_{nk} x_k\right] =$$

$$= \lim_n \sum_{k=0}^{n} B_{nk} x_k = \mathfrak{B}\{\mathfrak{x}\}$$

где

$$\varphi_{nk} = h_k + g_0 A_{0k} + g_1 A_{1k} + \ldots + g_{n-1} A_{n-1,\,k} + g A_{nk}$$

и

$$B_{nk} x_k = A_{nk} x_k + (y_0 - \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_0\}) \cdot \varphi_{nk} x_k$$

§ 4. Существование неограниченной последовательности в поле суммируемости матричного метода

Из определения конулевого метода следует, что $\mathfrak{e}(x)$ является точкой прикосновения множества c_x^0 в $\mathfrak{A}^*$. Так как это несправедливо в m_x, то из теоремы 4.5 [4] непосредственно вытекает

Теорема 7. *В поле суммируемости каждого конулевого метода найдется неограниченная последовательность.*

Решение этого вопроса для корегулярных методов оказывается значительно сложнее. Можно доказать теорему для частного случая.

Теорема 8. *Если регулярный для нулевых последовательностей метод $\mathfrak{A}$ суммирует некоторую ограниченную расходящуюся последовательность $\mathfrak{x}$ к нулю, то метод $\mathfrak{A}$ суммирует и неограниченную последовательность.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$\mathfrak{x}^{(r)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots\} \quad (r = 0, 1, \ldots)$$

и покажем, что в пространстве $\mathfrak{A}^*$ $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(r)}$ слабо сходится к нулю при $r \to \infty$. Так как $\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}\} = 0$, то, учитывая условие регулярности для нулевых последовательностей, имеем $\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}^{(r)}\} = 0$ $(r = 0, 1 \ldots)$. Отсюда

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_k h_k x_k + \sum_n g_n \Big(\sum_k A_{nk} x_k\Big)$$

и

$$f(\mathfrak{x}^{(r)}) = \sum_{k=0}^{r} h_k x_k + \sum_n g_n \Big(\sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k\Big)$$

Надо доказать, что

$$\text{(V)} \qquad \lim_r f(\mathfrak{x}^{(r)}) = f(\mathfrak{x})$$

для каждого непрерывного линейного функционала в $\mathfrak{A}^*$.

Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\mathfrak{y}_r = \Big\{\sum_{k=0}^{r} A_{nk} x_k\Big\}$ слабо сходились в пространстве c_y^0 к $\mathfrak{y} = \{\sum_k A_{nk} x_k\}$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (см. 1° и 3° из § 2):

а) $\lim\limits_{r} g\left(\sum\limits_{k=0}^{r} A_{nk}x_k\right) = g\left(\sum\limits_{k} A_{nk}x_k\right)$ при всех n и при всех непрерывных линейных функционалах g в Y;

б) последовательность $\{\mathfrak{x}_r\}$ ограничена.

Условие а) всегда выполнено при $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}^*$. Условие б) в данном случае выполнено, так как последовательность $\mathfrak{x}$ ограничена и, по условию 3° теоремы 1,

$$\left\|\sum_{k=0}^{r} A_{nk}x_k\right\| = \sup_k \|x_k\| \left\|\sum_{k=0}^{r} A_{nk}\frac{x_k}{\sup\limits_k \|x_k\|}\right\| \leqslant M \cdot \sup_k \|x_k\| \; (n, r = 0, 1, \ldots)$$

Следовательно, выполнено условие (V) и, таким образом, $\mathfrak{x}$ является точкой прикосновения множества $c_X{}^0$ в пространстве $\mathfrak{A}^*$. Так как это не верно в m_X, то и несправедливо соотношение $m_X \supseteq \mathfrak{A}^*$, т. е. найдется такое $\mathfrak{x}_1 \in \mathfrak{A}^*$, что $\mathfrak{x}_1 \bar{\in} m_X$.

Из доказанной теоремы получаем

Следствие I. *Если в поле суммируемости регулярного для нулевых последовательностей метода $\mathfrak{A}$ найдутся такие сходящаяся последовательность $\mathfrak{x}_1$ и ограниченная расходящаяся последовательность $\mathfrak{x}_2$, что $\mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_1\} = \mathfrak{A}\{\mathfrak{x}_2\}$, то метод $\mathfrak{A}$ суммирует и неограниченную последовательность.*

Следствие II. *Если регулярный метод суммирует только ограниченные последовательности, то он суммирует только сходящиеся последовательности.*

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Melvin-Melvin, On Generalized K-Transformations in Banach Spaces, Proc. London Math. Soc., 2, **53**, 1951.
2. A. Robinson, On Functional Transformations and Summability, Proc. London Math. Soc., 2, **52**, 1950.
3. A. Wilansky, An Application of Banach Linear Functionals to Summability, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 1949.
4. K. Zeller, Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., **53**, 1951.
5. K. Zeller, Verallgemeinerte Matrixtransformationen, Math. Z., **56**, 1952.
6. С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, 1948.
7. Г. Ф. Кангро, О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах, Изв. АН ЭССР. Серия технич. и физ.-мат. наук, т. V, № 2, 1956.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 19 I 1959

MÕNINGAID KÜSIMUSI ÜLDISTATUD MAATRIKSMENETLUSTEST

Koregulaarsed ja konull-menetlused

E. Jürimäe

Resümee

Olgu X ja Y mingid Banachi ruumid ning A_{nk} $(n, k = 0,1,\ldots)$ tõkestatud lineaarsed operaatorid. Eeldusel, et read $\sum\limits_{k} A_{nk}x_k$ $(n=0,1,\ldots)$ koonduvad, vaadeldakse maatriks-

menetluste

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x_k \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{I}$$

mõningaid omadusi.

Zeller [4] tõestas funktsionaalanalüüsi meetodite abil arvujadade puhul rea teoreeme maatriksmenetluste kohta. Paljudest neist teoreemidest nähtub, et konull-menetluste puhul esineb erandlik olukord. Käesolevas töös üldistatakse Wilansky [3] poolt arvujadade jaoks sissetoodud koregulaarsete ja konull-menetluste mõiste (§ 2). See võimaldab arvujadade jaoks hästituntud omadusi üle kanda ka ülalmärgitud menetluste juhule, näiteks: menetluste kooskõla (§ 3) ja tõkestamata jada olemasolu summeerimisväljas (§ 4).

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
19. I 1959

EINIGE FRAGEN ÜBER VERALLGEMEINERTE MATRIXVERFAHREN, CO-REGULÄRE UND CO-NULL-VERFAHREN

E. Jürimäe

Zusammenfassung

Es seien X und Y beliebige Banachsche Räume und A_{nk} $(n, k=0,1,\ldots)$ — beschränkte lineare Operatoren, die X in Y abbilden. Unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihen $\sum_k A_{nk} x_k$ $(n=0,1,\ldots)$ werden einige Eigenschaften der Matrixtransformationen

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x_k \quad (n=0,1,\ldots) \tag{I}$$

betrachtet.

Mit Hilfe der Methoden der Funktionalanalyse hat Zeller [4] mehrere Sätze über Matrixtransformationen für Zahlenfolgen bewiesen. Aus verschiedenen dieser Sätze ergibt sich, dass den Co-null-Matrizen eine Ausnahmestellung zukommt. Hier wird nun der Begriff der von Wilansky [3] für Zahlenfolgen eingeführten co-null- und co-regulären Transformationen verallgemeinert (§ 2). Dadurch gelingt es, bei Zahlenfolgen gut bekannte Eigenschaften auch auf die obenerwähnten Transformationen zu übertragen, z. B. die Verträglichkeit der Verfahren (§ 3) und die Existenz unbeschränkter Folgen im Wirkfeld (§ 4).

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen
am 19. Jan. 1959