EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VII KOIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1958, NR. 2

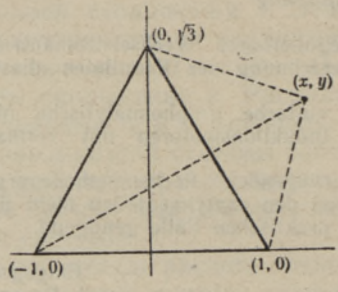
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VII
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1958, № 2
https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1958.2.08

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПОМПЕЙЮ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. К. ХУМАЛ,
академик АН ЭССР

Как известно, теорема Помпейю в первоначальном виде утверждает, что расстояния от вершин равностороннего треугольника до любой точки его плоскости удовлетворяют требованию $|u-v| \leqslant w \leqslant u+v$ (т. е. они совместимы как стороны некоего треугольника). Теорема оказывается правильной и в n-мерном пространстве:

расстояния от вершин равностороннего треугольника до любой точки пространства удовлетворяют тому же требованию $|u-v| \leqslant w \leqslant u+v$.



Для доказательства можно подобрать декартову систему координат таким образом, чтобы две вершины данного равностороннего треугольника находились на одной координатной оси и третья вершина на другой оси, а длина стороны треугольника равнялась двум единицам. Если на плоскости треугольника обозначить проекцию любой точки пространства через (x, y), а самое эту точку пространства, соответственно, через $(x, y, z_3, z_4, \ldots, z_n)$, то ее расстояния от вершин треугольника будут

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+z_3^2+z_4^2+\ldots+z_n^2}, \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2+z_3^2+z_4^2+\ldots+z_n^2}$$

$$\text{и } \sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2+z_3^2+z_4^2+\ldots+z_n^2}.$$

Вопрос состоит явно в следующем: существуют ли такие точки, координаты которых удовлетворяют требованию (причем $z_3^2+z_4^2+\ldots+z_n^2$ обозначается через Σz^2):

$$\left|\sqrt{(x+1)^2+y^2+\Sigma z^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2+\Sigma z^2}\right| \leqslant \sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2+\Sigma z^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(x+1)^2+y^2+\Sigma z^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2+\Sigma z^2},$$

и если существуют, то что они собой в совокупности представляют?

Поскольку неравенство неотрицательных чисел равносильно неравенству их квадратов, то указанное требование равносильно следующему:

$$(x+1)^2+y^2+\Sigma z^2-2\sqrt{(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-4x^2}+(x-1)^2+y^2+\Sigma z^2 \leqslant x^2+$$
$$+(y-\sqrt{3})^2+\Sigma z^2 \leqslant (x+1)^2+y^2+\Sigma z^2+2\sqrt{(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-4x^2}+$$
$$+(x-1)^2+y^2+\Sigma z^2,$$

а, стало быть, и требованию

$$-2\sqrt{(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-4x^2} \leqslant 1-x^2-y^2-2y\sqrt{3}-$$
$$-\Sigma z^2 \leqslant 2\sqrt{(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-4x^2}$$

или, короче,

$$\left|1-x^2-y^2-2y\sqrt{3}-\Sigma z^2\right| \leqslant 2\sqrt{(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-4x^2}.$$

Но это, в свою очередь, равносильно требованию

$$(1-x^2-y^2-2y\sqrt{3}-\Sigma z^2)^2 \leqslant 4(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-16x^2,$$

которое, явно, можно написать и следующим образом:

$$4(x^2+1+y^2+\Sigma z^2)^2-16x^2-(1-x^2-y^2-2y\sqrt{3}-\Sigma z^2)^2 \geqslant 0.$$

Путем непосредственной проверки легко убедиться в том, что последнее означает только:

$$3\left(x^2+y^2+\Sigma z^2-\frac{2y}{\sqrt{3}}-1\right)^2+16\Sigma z^2 \geqslant 0.$$

Такое требование, как видно, удовлетворено при любых значениях координат x, y, z_3, $z_4, \ldots, z_n$. Теорема, следовательно, доказана.

Остается отметить, что вне плоскости данного равностороннего треугольника требование удовлетворяется везде как неравенство. На плоскости же (т. е. при $z_3=z_4=\ldots=z_n=0$) существуют и такие точки, где оно удовлетворяется как равенство, и они составляют окружность

$$x^2+y^2-\frac{2y}{\sqrt{3}}-1=0,$$

проходящую через вершины данного треугольника.

Поступила в редакцию
1 IV 1958