

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ГАЛАКТИКИ *

Г. Г. КУЗМИН,

кандидат физико-математических наук

Задачей настоящей статьи является дать краткий обзор результатов недавних исследований автора этих строк по некоторым вопросам динамики Галактики. В статье будут затронуты как вопросы теоретической, так и вопросы практической звездной динамики. При этом особое внимание мы уделим различным моделям Галактики и применению новейших радионаблюдений галактического вращения к выводу распределения масс в Галактике.

1. Теория третьего интеграла движения звезд

Как известно, распределение скоростей звезд во всех подсистемах Галактики является трехосным, т. е. представляется трехосным эллипсоидом скоростей **. Наиболее длинная ось эллипсоида скоростей направлена приблизительно по галактическому радиусу, наиболее короткая — перпендикулярно галактической плоскости. Теоретическое объяснение этого явления встречалось до сих пор с известными затруднениями. Теория стационарных звездных систем, которая в общем оказывалась хорошо применимой для объяснения основных закономерностей звездных движений, приводила к выводу о двухосности распределения скоростей. Согласно Джинсу обычно предполагалось (см., например, ⁽⁹⁾), что у стационарной звездной системы, обладающей осевой симметрией, фазовая плотность звезд является функцией только двух интегралов движения — интеграла энергии и интеграла площадей. В этом случае распределение скоростей является двухосным. Оно имеет симметрию относительно оси, расположенной в направлении вращения системы, т. е. перпендикулярно ее меридианной плоскости. Чтобы получить трехосное распределение скоростей, нужно рассматривать фазовую плотность как функцию от трех интегралов движения. При стационарности звездной системы эти интегралы не должны включать время. Кроме того, интегралы должны быть однозначными, т. е. данной траектории звезды в фазовом пространстве должно соответствовать только одно определенное значение каждого интеграла, а не бесконечное множество различных значений. Существование таких интегралов

* Статья представляет собой в основном доклад, прочитанный на Первом пленуме Комиссии по звездной астрономии Астрономического совета АН СССР в мае 1955 г. Параграфы 5—7 изложены более подробно.

** Речь идет об эллипсоиде, вычисляемом по тензору дисперсии скоростей. Эллипсоид скоростей не следует смешивать с эллипсоидальным распределением скоростей, как это нередко делается. Допущение об эллипсоидальности распределения скоростей в теории третьего интеграла не обязательно.

связано с ограничениями общности гравитационного потенциала звездной системы. Для существования интегралов энергии и площадей необходима стационарность потенциала и осевая симметрия его. Для того же, чтобы существовал еще третий однозначный, независимый от предыдущих и от времени интеграл, необходимо дополнительное ограничение общности потенциала.

Теория третьего интеграла изложена в недавно опубликованных работах автора (3, 4, 6). В этих работах дается конкретное выражение для третьего интеграла и дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять потенциал для того, чтобы такой интеграл существовал. Уравнение представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными потенциала по координатам. Оно и является тем дополнительным ограничением, которое накладывает на потенциал существование третьего интеграла*.

Если фазовая плотность является функцией всех трех интегралов, упомянутых выше, то распределение скоростей оказывается трехосным. Одна из осей эллипсоида скоростей расположена попрежнему в направлении галактического вращения, но кроме этой оси имеются еще две неравных между собой оси. В точках, расположенных в галактической плоскости, одна из них перпендикулярна этой плоскости, а другая расположена по галактическому радиусу. Вне галактической плоскости же упомянутые оси образуют с ней углы, отличающиеся от 0° и 90° . Таким образом, вне галактической плоскости эллипсоид скоростей оказывается расположенным наклонно. Наклонность эллипсоида скоростей является одним из важных выводов теории третьего интеграла.

Теория третьего интеграла позволяет трактовать пространственно-кинематическую структуру Галактики и ее подсистем более полно, чем это было возможно до сих пор. При этом одним из средств теоретической трактовки пространственно-кинематической структуры может служить обобщенная на три интеграла диаграмма Линдблада. Теория третьего интеграла позволяет также обобщить диаграмму Боттлингера. Кроме того, оказывается возможным найти выражение еще для двух независимых от времени интегралов, получив, таким образом, все пять независимых друг от друга и от времени интегралов. Два новых интеграла, вообще говоря, бесконечно многозначны и поэтому их нельзя включить в выражение фазовой плотности. Но их можно использовать для вычисления галактических орбит звезд в обобщенном трехмерном случае. Возможно получить также шестой интеграл, включающий время и определяющий положение звезды на орбите.

2. Модели Галактики, вытекающие из теории третьего интеграла

Как уже отмечено выше, существование третьего интеграла связано с ограничением общности потенциала. Потенциал должен удовлетворять известному дифференциальному уравнению. Возникает вопрос, выполняется ли это условие в действительности. Так как Галактика является стационарной системой лишь в первом довольно грубом приближении, то в действительности ни условие стационарности потенциала, ни условие его осевой симметрии не выполняются в точности. Поэтому интегралы энер-

* Упомянутое уравнение выводилось уже не раз как условие, при котором возможно трехосное распределение скоростей в стационарной звездной системе с осевой симметрией. Подготавливая настоящую статью к печати, мы узнали о работе фан Албада (Bosscha Obs. Contr., № 1, 1952), в которой дается выражение для третьего интеграла, по сути дела тождественное с нашим, и выводится соответствующее уравнение для потенциала. Однако фан Албада ошибочно считает, что это уравнение не имеет решений, применимых к реальным звездным системам.

гии и площадей являются лишь приближенными интегралами. Большого, очевидно, нельзя требовать и от третьего интеграла. Этот интеграл можно применять с тем же правом, как и первые два, если потенциал лишь приближенно удовлетворяет упомянутому дифференциальному уравнению. Чтобы проверить, возможно ли хотя бы приближенное соответствие теории с действительностью, мы построили модели звездной системы, в которых выполняется условие существования всех трех интегралов (3, 6).

Дифференциальное уравнение, которое получается для потенциала Φ , можно решить в общем виде. Пользуясь вместо цилиндрических координат R и z эллиптическими координатами ξ_1 и ξ_2 , можем записать это решение в следующем простом виде:

$$\Phi = \frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad (1)$$

где φ — произвольная функция. Фокусы эллиптической координатной системы следует считать лежащими на галактической оси симметрично по обе стороны от галактической плоскости на некотором расстоянии z_0 от последней.*

При помощи уравнения Пуассона можно получить также выражение для плотности вещества. Оказывается, что, подобрав подходящим образом произвольную функцию φ , будем иметь модели звездной системы, имеющие конечную массу и повсеместно неотрицательную плотность. Кроме того, оказывается возможным варьировать сплюснутость модели.

Если модель имеет значительную сплюснутость, подобную сплюснутости Галактики, то потенциал изменяется в галактической плоскости ($z=0$) согласно приближенной формуле

$$\Phi_{z=0} = \Phi_0 \left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{-1/2}, \quad (2)$$

причем Φ_0 — потенциал в центре Галактики. В соответствии с формулой (2) для круговой скорости имеет место приближенное выражение

$$V = V_0 \frac{R}{z_0} \left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{-3/4}, \quad (3)$$

где $V_0 = \sqrt{\Phi_0}$. Для плотности же в галактической плоскости $\rho_{z=0}$ и для спроецированной на галактическую плоскость плотности δ получаются формулы

$$\rho_{z=0} = \rho_0 \left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{-2} \quad (4)$$

и

$$\delta = \delta_0 \left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{-3/2}, \quad (5)$$

где ρ_0 и δ_0 — значения $\rho_{z=0}$ и δ при $R=0$.

Все эти формулы независимы от конкретного вида функции φ . Необходимо только, чтобы она соответствовала достаточно сплюснутой модели. Но чтобы получить модель, у которой плотность и потенциал известны во всех точках пространства, нужно, разумеется, взять какое-то конкретное выражение для этой функции. В последней из цитированных выше работ (6) мы предложили для φ некоторое двухпараметрическое выражение, дающее двухпараметрическое семейство моделей. Параметры

* Координаты ξ_1 и ξ_2 определены так, что в этом случае на галактической оси $z = z_0 \xi_2$ при $|z| < z_0$ и $|z| = z_0 \xi_1$ при $|z| > z_0$.

определяют сплюснутость модели и характеризуют изменение плотности в направлении, перпендикулярном галактической плоскости.

Наиболее простой из этих моделей в отношении распределения плотности является модель, представляющая собой неоднородный сфероид, в котором плотность убывает при удалении от центра в любом направлении по закону, аналогичному закону (4). Другая подробно рассмотренная нами модель интересна сравнительно простым выражением для функции φ и потенциала Φ . Функция φ в данном случае пропорциональна $(\xi_0^2 + \xi^2)^{1/2}$, где ξ_0 — постоянная. Изоповерхности плотности модели несколько отличаются от эллипсоидов вращения. Их меридианные сечения имеют у вершин большую кривизну, чем эллипсы той же сплюснутости. Кроме упомянутых моделей, сделаны предварительные расчеты и для других моделей. У некоторых из них сечения изоповерхностей плотности имеют точки перегиба и напоминают контуры спиральных галактик, видимых с ребра. В общем модели получаются довольно правдоподобными. Поэтому можно думать, что условие существования третьего интеграла движения приблизительно выполняется для Галактики.

Недостатком моделей Галактики, основанных на теории третьего интеграла, является то, что падение плотности в них на больших расстояниях от центра происходит очень медленно, как это видно из формул (4) и (5). Кроме того, сплюснутость изоповерхностей плотности получается вблизи центра столь же большой, как и вдали от него, что не вяжется с нашими представлениями о строении галактического ядра как довольно округлого образования. Однако, если изменить закон плотности на очень больших и очень малых расстояниях от центра, то поведение потенциала в остальных частях модели существенно не изменится и тем существенно не нарушится условие существования третьего интеграла. Поэтому упомянутые недостатки не представляют собой непреодолимых трудностей для теории.

3. Сфероидальные модели Галактики

Модели Галактики, вытекающие из теории третьего интеграла движения звезд, могут быть использованы для целей практической звездной динамики при различных приближенных расчетах. Но ввиду указанных выше недостатков этих моделей более пригодны другие модели.

Одним из методов построения моделей Галактики является примененный Оортом (¹²) метод наложения соосных однородных сфероидов различных размеров и сплюснутостей. Метод имеет тот недостаток, что модели получаются весьма грубыми, с большими скачками плотности. Поэтому целесообразно представлять распределение масс в Галактике наложением неоднородных сфероидов, в которых плотность плавно убывает от центра к периферии. Свойства надлежащим образом выбранных неоднородных сфероидов могут быть столь же простыми, как и свойства однородных сфероидов. Но число неоднородных сфероидов, необходимых для удовлетворительного представления распределения масс в Галактике, значительно меньше. Если не требуется большой точности, то можно воспользоваться даже просто одним неоднородным сфероидом.

Неоднородный сфероид характеризуется отношением ε малой полуоси изоповерхности плотности к большой и зависимостью плотности $\rho(a)$ от большой полуоси изоповерхности плотности a . Наряду с плотностью можно пользоваться функцией $\mu(a)$ или функцией $\rho_s(a)$, связанными с плотностью следующим образом:

$$\frac{\mu(a)}{4\pi a^2} = \rho_s(a) = \varepsilon \rho(a). \quad (6)$$

Функция $\mu(a)$ представляет собой массу, приходящуюся на единичный интервал a , а функция $\rho_s(a)$ — плотность, вычисленную по $\mu(a)$ в предположении сферического распределения масс. Эти функции уместно называть соответственно функцией массы и сферической плотностью.

Зная функцию массы сфероидальной модели, можем вычислить соответствующую круговую скорость по формуле (см. (2))

$$V^2 = G \int_0^R \frac{\mu(a) da}{\sqrt{R^2 - a^2 e^2}}, \quad (7)$$

причем G — гравитационная постоянная, а

$$e^2 = 1 - \varepsilon^2. \quad (8)$$

Для потенциала же в плоскости симметрии модели (в галактической плоскости) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{z=0} &= G \int_0^\infty \mu(a) \chi \left(\frac{a}{R} \right) \frac{da}{a}, \\ \chi \left(\frac{a}{R} \right) &= \begin{cases} \frac{1}{e} \arcsin \frac{ae}{R}, & a \leq R, \\ \frac{1}{e} \arcsin e, & a \geq R. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Функция массы позволяет вычислить еще спроецированную плотность δ и полную массу M модели. Вычисление происходит по формулам (см. (2))

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_R^\infty \frac{\mu(a) da}{a \sqrt{a^2 - R^2}}, \quad (10)$$

$$M = \int_0^\infty \mu(a) da. \quad (11)$$

К моделям Галактики в виде одного неоднородного сфероида относится наша сфероидальная модель, наиболее простая из моделей, основанных на теории третьего интеграла. Другие модели в виде неоднородного сфероида были рассмотрены раньше Переком (13), а недавно Г. М. Идлис предложил новую модель звездной системы (1). Модель Идлеса представляет большой интерес, и на ней стоит остановиться особо.

4. Модель звездной системы, предложенная Г. М. Идлисом

При построении своей модели Г. М. Идлис исходит из выражения потенциала, которое было использовано П. П. Паренаго в его работах о потенциале Галактики (7, 8). Упомянутое выражение для потенциала и соответствующее выражение для круговой скорости имеют вид:

$$\Phi_{z=0} = \Phi_0 \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-1} \quad (12)$$

$$V = V_0 \frac{R}{R_0} \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-1}, \quad (13)$$

где R_0 , Φ_0 и V_0 — постоянные, причем $V_0 = \sqrt{2\Phi_0}$.

Эти формулы выводятся из допущения, что у плоских подсистем Галактики распределение скоростей звезд строго эллипсоидально. Тогда согласно теории Оорта—Линдблада (см., например, ⁽⁹⁾) они вращаются по закону вида (13), причем V можно считать равным круговой скорости, поскольку у плоских подсистем скорость центраида практически совпадает с круговой скоростью. Здесь, однако, необходимо подчеркнуть, что в действительности, конечно, не обязательно, чтобы у плоских подсистем распределение скоростей было строго эллипсоидальным. Поэтому закону (13) нельзя придавать большего значения, чем удобной интерполяционной формуле*. Последнее справедливо, разумеется, и в отношении выведенного нами закона (3), поскольку не обязательно, чтобы условие существования третьего интеграла строго выполнялось.

Закон (13) имеет тот недостаток, что соответствующее ускорение по галактическому радиусу убывает при больших R слишком быстро и невозможно подобрать такую конфигурацию неотрицательных масс, которая вызвала бы это ускорение. Но можно допустить, как это сделано Идлисом, что закон (13) имеет место только внутри Галактики, тогда как за ее пределами имеет место другой закон. Тогда получается вполне приемлемая модель Галактики в виде неоднородного сфероида.

Если сфероид очень сплюснен, то нетрудно получить выражение для его плотности. В этом случае в формуле (7) следует положить $e = 1$. Тогда имеем по отношению к $\mu(a)$ интегральное уравнение типа Абея. Решая его и применяя формулу (6), получаем такое выражение для плотности модели Идлиса в плоскости ее симметрии:

$$\rho_{z=0} = \rho_0 \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-2} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - 2 \frac{R^2}{R_0^2} \right) \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-1/2} \cdot \frac{R_0}{R} \operatorname{Arsh} \frac{R}{R_0} \right]. \quad (14)$$

Выражение, фигурирующее в формуле (14) в квадратных скобках, делается при $R = R^0 \approx 2.7R_0$ равным нулю, а при $R > R^0$ становится отрицательным. Значение $R = R^0$ можно считать поэтому радиусом модели, принимая плотность вне поверхности нулевой плотности равной повсеместно нулю. Так как вне пределов модели выражение (12) уже не имеет места, то для того, чтобы потенциал был непрерывным на границе модели и становился на бесконечности равным нулю, необходимо внутри модели к выражению (12) прибавить некоторую постоянную. Г. М. Идлис нашел, что у очень сплюсненной модели эта постоянная равна $\frac{1}{8} \Phi_0$. Такая добавка к потенциалу заметно увеличивает его значение, что особенно сильно сказывается при больших R . Поэтому при больших R скорость освобождения превышает значительно больше круговую, чем по вычислениям П. П. Паренаго ^(7, 8).

Закон (14) дает весьма правдоподобное изменение плотности. При малых R плотность убывает приблизительно по тому же закону, как и в наших моделях. Но при увеличении R падение плотности происходит быстрее и она, становясь очень малой, постепенно сходит на нет при приближении R к R^0 . Конечность радиуса модели Идлиса является ее существенным преимуществом по сравнению с нашими моделями.

* Этот вопрос мы уже обсудили довольно подробно в одной из предыдущих работ ⁽³⁾.

Различие между нашими моделями и моделью Идлisa демонстрирует рисунок 1. Сплошная кривая дает функцию массы для модели Идлisa, а прерывистая кривая — для нашей сфероидальной модели. При этом центральные сферические плотности обеих моделей взяты равными, и положено $z_0 = 0.8R_0$. Из рисунка видно, как распределяется масса по сфероидальным слоям в обоих случаях.

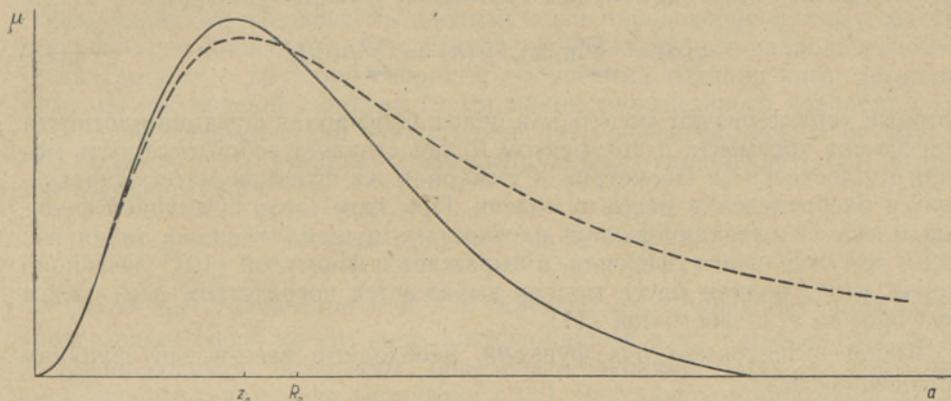


Рис. 1.

Имея в виду практические применения модели Идлisa, желательно было обобщить ее на конечные значения отношения полуосей сфероида ϵ . Обобщение можно провести, принимая по-прежнему для круговой скорости выражение (13). Тогда уравнение (7) нужно рассматривать как интегральное уравнение для нахождения функции массы. Но имея в виду, что формуле (13) нельзя придавать большего значения, чем интерполяционной формуле, выгоднее поступить иначе, а именно взять функцию массы в соответствии с формулой (14) для плотности и вычислить круговую скорость путем интегрирования (7). Мы проделали эти вычисления, причем оказалось, что потенциал в плоскости симметрии модели и круговая скорость выражаются в общем случае через элементарные функции как внутри, так и вне модели. Аналогичные вычисления проделаны и для нашей сфероидальной модели.

5. Обобщенная сфероидальная модель

Хотя модель Идлisa представляет реальную Галактику, вероятно, лучше, чем наши модели, но и она едва ли может претендовать на большее, чем быть первым грубым приближением к действительности. Чтобы представить реальное распределение масс в Галактике с большей точностью, нужно пользоваться наложением нескольких надлежащим образом подобранных неоднородных сфероидов. В виде таких сфероидов можно взять, например, модели Идлisa с различными сплюснутостями и радиусами.

Но, представляя распределение массы в Галактике в виде некоторой составной модели, можно поступить и по-другому. Мы вовсе не обязаны исходить из специальных моделей с наперед заданным распределением плотности. Напротив, имеется возможность пользоваться составной моделью значительно более общего характера, функция массы которой определяется прямо на основании наблюдательных данных, без посредства каких-либо специальных моделей.

Такую составную модель можно построить также из неоднородных сфероидов (2, 5). Но распределение плотности в сфероидах заранее не задается, а сфероидов берется очень много, в пределе бесконечное множество.

Каждый сфероид, входящий в состав модели, характеризуется отношением его полуосей ε_i и функцией плотности $\rho_i(a)$ или функцией массы $\mu_i(a)$. Суммируя ρ_i и μ_i , получим суммарные функции плотности и массы

$$\rho(a) = \sum \rho_i(a), \quad \mu(a) = \sum \mu_i(a), \quad (15)$$

которые характеризуют модель как целое. Суммарная функция плотности при замене аргумента a аргументом R представляет собой плотность модели в плоскости ее симметрии. Суммарная же функция массы характеризует распределение массы в модели. При этом связь суммарной функции массы со спроецированной плотностью модели, очевидно, такая же, как и для отдельного сфероида, и выражается формулой (10)*. Очевидно также, что и полная масса модели выражается посредством $\mu(a)$ таким же образом, т. е. формулой (11).

Кроме вышеупомянутых функций, необходимо ввести еще функции сплюсненности

$$\varepsilon_1(a) = \frac{\sum \varepsilon_i \rho_i(a)}{\rho(a)}, \quad \varepsilon_2(a) = \frac{\sum \varepsilon_i \mu_i(a)}{\mu(a)}, \quad (16)$$

т. е. усредненные с весом ρ_i и μ_i значения ε . Эти функции, каждая по-особому, характеризуют сплюсненность модели. Функция $\varepsilon_1(a)$ связана с функциями массы и плотности так же, как ε для отдельного сфероида, т. е. формулой

$$\frac{\mu(a)}{4\pi a^2} = \rho_s(a) = \varepsilon_1(a) \rho(a), \quad (17)$$

причем $\rho_s(a)$ — сферическая плотность в прежнем смысле. Если все $\rho_i > 0$, то, очевидно, $\varepsilon_2(a) > \varepsilon_1(a)$.

Если модель достаточно сплюснена, то связь функции массы с круговой скоростью и потенциалом в плоскости симметрии также аналогична соответствующей связи для отдельного сфероида. Она попрежнему выражается формулами (7) и (9). Но в данном случае нужно использовать функцию сплюсненности $\varepsilon_2(a)$, подставляя в упомянутые формулы

$$e^2 = 1 - \varepsilon_2^2(a). \quad (18)$$

Пользуясь формулой (7) как интегральным уравнением, имеем возможность определить функцию массы по круговой скорости как некоторую эмпирическую функцию. Зная функцию массы, можем, далее, вычислить потенциал в галактической плоскости и соответствующую ему скорость освобождения, а также спроецированную плотность и сферическую плотность. От последней можно перейти к функции плотности. Но для этого нужно знать функцию $\varepsilon_1(a)$ с достаточно большой точностью, тогда как при вычислении функции массы можем ограничиться лишь приближенной оценкой функции $\varepsilon_2(a)$.

* Формулу (10) можно рассматривать как определение функции массы в общем случае.

6. Распределение масс в Галактике

В опубликованной несколько лет тому назад работе ⁽²⁾ мы определили суммарную функцию массы и спроецированную плотность Галактики, исходя из данных о вращении подсистемы долгопериодических цефеид. Однако эти данные охватывают лишь довольно небольшой диапазон значений R и обременены, повидимому, значительными систематическими ошибками. Недавно мы сделали новое определение функции массы и спроецированной плотности, исходя из более точных радиоастрономических данных о круговой скорости, полученных голландскими астрономами из наблюдений контура 21 см линии межзвездного водорода ⁽¹⁰⁾.

Радиоастрономические наблюдения дают непосредственно не круговую скорость V , а функцию дифференциального вращения $U(x)$, выражаемую формулой

$$U(x) = V(x) - V_{\odot}x, \quad x = \frac{R}{R_{\odot}}, \quad (19)$$

где R_{\odot} и V_{\odot} — значения R и V в окрестностях Солнца. Функция $U(x)$ представляет собой не что иное, как функцию Камма, умноженную на x . Радионаблюдения позволяют определить функцию $U(x)$ с той или иной точностью для всего диапазона $x \leq 1$. Результаты наблюдений, сглаженные надлежащим образом, даны в таблице 1. Для $x > 1$ радионаблюдения не дают возможности определить $U(x)$. Поэтому, пользуясь этой функцией, мы можем вычислить функцию массы только для внутренних по отношению к Солнцу частей Галактики. Для внешних же частей Галактики функция массы должна быть проэкстраполирована.

При вычислении функции массы необходимо знать околосолнечную круговую скорость, чтобы от U перейти к V , а также функцию $\varepsilon_2(a)$, входящую в интегральное уравнение (7).

От $\varepsilon_2(a)$ результаты, получаемые для функции массы, зависят довольно слабо. Поэтому при вычислениях было принято $\varepsilon_2(a) = \text{const}$ и использовано округленное значение $\varepsilon_2 = 0.2$. Оно больше выведенного нами недавно значения $\varepsilon = 0.16$ ⁽⁵⁾, но последнее является значением ε_1 , а ε_2 должно быть больше ε_1 (см. выше).

Что касается околосолнечной круговой скорости, то от нее функция массы зависит очень сильно. Для определения V_{\odot} обычно используется формула

$$V_{\odot} = (A - B)R_{\odot}, \quad (20)$$

где A и B — параметры Оорта в окрестностях Солнца. Из фигурирующих в этой формуле величин A известно лучше всего. Оно близко к 20 км/сек/кпс. Значение R_{\odot} известно несколько хуже. Однако радионаблюдения позволяют определить произведение

$$AR_{\odot} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=1}. \quad (21)$$

Оно оказывается близким к 150 км/сек (табл. 1). Беря для A вышеуказанное значение, получаем отсюда $R_{\odot} = 7.5$ кпс, что является вполне приемлемым результатом. Хуже всего известно значение B . На основании собственных движений в системе ГС имеем $B = -13$ км/сек/кпс. Собственные же движения в системе FK3 дают $B = -7$ км/сек/кпс. Беря для B первое или второе значение, получим для V_{\odot} сильно различающиеся результаты, а именно в первом случае $V_{\odot} \approx 250$ км/сек, а во втором $V_{\odot} \approx 200$ км/сек.

Использование формулы (20) не дает, следовательно, возможности достаточно уверенно определить околосолнечную круговую скорость. Однако ее значение может быть существенным образом уточнено в процессе вычисления и экстраполяции функции массы.

Экстраполяция функции массы должна быть произведена, конечно, по возможности плавно, без резких скачков и изломов. Кроме того, должны быть удовлетворены три условия. Во-первых, функция массы должна приближаться к нулю при приближении a к некоторому верхнему пределу $R_m = R_\odot x_m$, представляющему собой практический радиус Галактики. Во-вторых, средняя скорость убывания функции массы с увеличением a должна согласоваться в широких окрестностях Солнца с имеющимися данными о радиальном градиенте плотности звезд. Наконец, в-третьих, потенциал, соответствующий функции массы, должен быть таким, чтобы упомянутый выше практический радиус Галактики согласовался с практическим верхним пределом скорости звезд в окрестностях Солнца. Другими словами, звезды,двигающиеся в окрестностях Солнца с наибольшими галактоцентрическими скоростями, должны достигать в апогалактии как раз границы Галактики*.

Математическое выражение второго условия имеет следующий вид:

$$\frac{d \log \rho_s}{da} = \frac{1}{\mu(a)} \sum \frac{d \log \rho_i}{da} \mu_i(a). \quad (22)$$

Правая часть этого выражения представляет собой усредненное с весом μ_i значение радиального градиента логарифма плотности отдельных сфероидов, входящих в состав обобщенной сфероидальной модели. С некоторым приближением можем отождествить их с отдельными подсистемами Галактики.

Математическое выражение третьего условия получим, применяя интегралы энергии и площадей к звездам,двигающимся в галактической плоскости с максимальными галактоцентрическими скоростями. Оно имеет вид

$$\Phi_\odot - \Phi_m = \left(1 - \frac{1}{x_m^2}\right) (V_\odot + v_m)^2, \quad (23)$$

где v_m — превышение верхнего предела околосолнечной скорости звезд над круговой скоростью, а Φ_\odot и Φ_m — значения $\Phi_{z=0}$ в окрестностях Солнца и на границе Галактики.

При вычислениях мы приняли, согласно Оорту⁽¹¹⁾, $v_m = 65$ км/сек. Средний радиальный градиент логарифма плотности считался в широких окрестностях Солнца приблизительно равным — 0.2 на кпс. При выборе этого значения мы исходили из существующих данных⁽⁹⁾ и учитывали, что наибольший вклад в функцию массы должны вносить промежуточная и сферическая составляющие Галактики, как наиболее массивные. Для радиуса Галактики было принято значение $x_m = 2.5$, при котором пространственная плотность примерно в сто раз меньше околосолнечной (при вышеуказанном градиенте плотности).

Вычисления показали, что функцию массы можно проэкстраполировать достаточно плавно и в соответствии с вышеуказанными значениями v_m , x_m и градиента плотности лишь тогда, когда околосолнечная круговая скорость близка к 250 км/сек. При этом неточность принятых в основу

* Обычно ошибочно считается, что верхний предел скорости звезд равен скорости оскободнения. При этом, однако, не учитывается, что Галактика имеет конечные размеры.

вычислений данных позволяет варьировать V_{\odot} только примерно в пределах ± 15 км/сек. Таким образом, наиболее вероятное значение около-солнечной круговой скорости близко к ее значению при B в системе ГС.

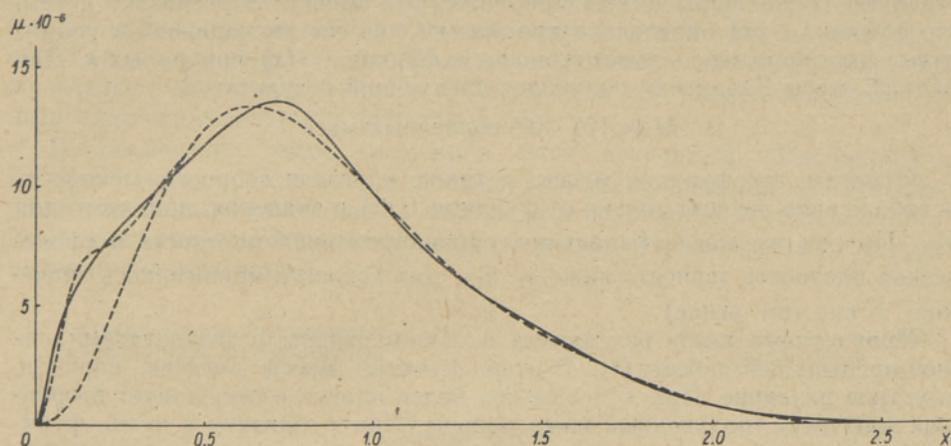


Рис. 2.

Если взять в точности $V_{\odot} = 250$ км/сек, то получим функцию массы $\mu(a)$ такой, как она представлена графически сплошной линией на рисунке 2. Соответствующие числовые значения приведены в таблице 1 (заменяя аргумент a аргументом x). В той же таблице даны значения круговой скорости V , скорости освобождения в галактической плоскости

Таблица 1

$x = R/R_{\odot}$	U	V км/сек	V_k	$\mu \cdot 10^{-6}$ ☉/пс	$\delta \cdot 10^{-3}$ ☉/пс ²	q_s ☉/пс ³
0.0	0	0	610	0.0	6.	11.
0.1	118	143	573	5.2	2.1	0.74
0.2	128	178	542	7.5	1.39	0.26
0.3	124	199	515	9.0	1.01	0.141
0.4	114	214	490	10.4	0.77	0.092
0.5	102	227	467	11.7	0.61	0.066
0.6	88	238	445	12.9	0.49	0.050
0.7	72	247	424	13.5	0.38	0.039
0.8	53	253	404	13.0	0.28	0.029
0.9	28	253	385	11.4	0.20	0.020
1.0	0	250	367	9.6	0.146	0.0135
1.1		245	351	8.0	0.106	0.0093
1.2		240	336	6.7	0.078	0.0066
1.3		234	322	5.6	0.057	0.0047
1.4		228	309	4.7	0.040	0.0034
1.5		221	298	3.8	0.028	0.0024
1.6		215	287	3.0	0.019	0.0017
1.7		208	278	2.3	0.013	0.0011
1.8		201	269	1.6	0.008	0.0007
1.9		195	261	1.1	0.005	0.0004
2.0		189	254	0.7	0.003	0.0002
2.1		183	247	0.4	0.001	0.0001
2.2		178	241	0.2	0.001	0.0001
2.3		173	235	0.1	0.000	0.0000
2.4		168	230	0.0	0.000	0.0000

$V_k = \sqrt{2\Phi_{z=0}}$, спроецированной плотности δ и сферической плотности ρ_s . Значения спроецированной и сферической плотностей при $x = 0$ представляют собой лишь весьма приближенные оценки. Это связано с тем, что функция $U(x)$ определена при малых x не совсем надежно, а упомянутые плотности очень чувствительны к функции $U(x)$ при малых x . Для полной массы Галактики получен следующий результат

$$M = 107 \cdot 10^9 \text{ солнечных масс.}$$

Отметим, что функция массы, а также круговая скорость и скорость освобождения зависят только от функции $U(x)$ и значения, принятого для V_{\odot} . Полная же масса Галактики, спроецированная плотность и сферическая плотность зависят также от R_{\odot} , для которого принималось значение 7.5 кпс (см. выше).

Приведенные выше результаты в общем сходны с результатами нашей предыдущей работы (2). В ходе функции массы имеется, впрочем, заметное различие. При $x > 1$ ее ход более плавен и отсутствует вторичный максимум, полученный нами раньше. При x , близких к нулю, функция массы получается теперь значительно большей, вследствие чего центральная плотность Галактики также оказывается большей и выявляется наличие галактического ядра.

7. Применение модели Идлisa

Сравнение функции массы, выведенной из наблюдений (рис. 2), с функциями массы для модели Идлisa и нашей модели (рис. 1) показывает сходство лишь в самых общих чертах. Видно, что модель Идлisa несколько лучше соответствует наблюдениям. Но значительно лучшее согласие можно получить, представив распределение масс в Галактике наложением двух моделей Идлisa: одной с меньшим, другой с большим радиусом.

Беря функции массы для моделей Идлisa в соответствии с выражением (14) для плотности, мы нашли, что наилучшее согласие с эмпирической функцией массы получается, если

$$m_1 = 1 - m_2 = 0.07, \quad x_1 = 0.46, \quad x_2 = 2.27,$$

причем m_1 и m_2 — относительные массы малой и большой модели, а x_1 и x_2 — их радиусы. Кривая $\mu(a)$ для суммы обеих моделей изображена на рис. 2 пунктиром. Пунктиром изображено также продолжение кривой $\mu(a)$ для большей модели при малых a . Рисунок показывает, что наложением двух моделей Идлisa наблюдательные данные представляются довольно неплохо.

Меньшую модель можно условно отождествить с ядром Галактики. Как масса, так и радиус этой модели более или менее соответствуют тому, что можно ожидать у галактического ядра. Правда, радиус меньшей модели, на первый взгляд, слишком велик. Однако нужно иметь в виду, что малая модель начинает доминировать лишь тогда, когда $x < 0.2$.

*

Все упомянутые выше расчеты автор предполагает более подробно изложить в последующих работах. Возможно, что в эти расчеты придется внести некоторые уточнения. Кроме того, можно надеяться, что наряду с радионаблюдениями удастся использовать и другие данные о вращении Галактики, исправив их надлежащим образом. Особенно было бы желательно знать ход функции U для $x > 1$, где радионаблюдения не позволяют определить эту функцию.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность Я. Э. Эйнасто, проделавшему большую часть вычислений и высказавшему ряд ценных замечаний, в частности о возможности уточнения значения околосолнечной круговой скорости в процессе вычисления и экстраполяции функции массы.

*Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
20 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Идлис, Космические силовые поля и некоторые вопросы структуры и эволюции галактической материи, Диссертация, Алма-Ата, 1954; Астр. журн., 33, 20, 1956.
2. Г. Г. Кузмин, Публ. Тартуской астр. obs., 32, 211, 1952.
3. Г. Г. Кузмин, Известия АН Эст. ССР, 2, 368, 1953.
4. Г. Г. Кузмин, Публ. Тартуской астр. obs., 32, 332, 1953.
5. Г. Г. Кузмин, Публ. Тартуской астр. obs., 33, 3, 1955.
6. Г. Г. Кузмин, Астр. журн., 33, 27, 1956.
7. П. П. Паренаго, Астр. журн., 27, 329, 1950.
8. П. П. Паренаго, Астр. журн., 29, 245, 1952.
9. П. П. Паренаго, Курс звездной астрономии, 3-е изд., Гостехиздат, Москва, 1954.
10. К. К. Kwee, C. A. Muller, G. Westerhout, Bull. Astr. Inst. Neth., 12, 211, 1954.
11. J. H. Oort, Bull. Astr. Inst. Neth., 4, 269, 1928.
12. J. H. Oort, Bull. Astr. Inst. Neth., 6, 249, 1932; 9, 185, 1941; Astroph. Journ., 116, 233, 1952.
13. L. Perek, Contr. Astr. Inst. Masaryk Univ., Brno, 1, № 6, 1948; № 8, 1951; № 13, 1954.

MÕNINGAID KÜSIMUSI GALAKTIKA DÜNAAMIKA ALALT

G. KUZMIN,

füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Resümee

1. Tähtede liikumise kolmanda integraali teooria

Vaatlustest tuntud fakt, et tähtede kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline, on seletatav statsionaarse telgsümmeetrilise Galaktika dünaamika raames. Selleks on vaja võtta arvesse peale kahe senikasutatud liikumise integraali — energia ja pindade integraali — veel kolmas ühene, ajast sõltumatu integraal. Kolmanda integraali teooria on esitatud autori kolmes hiljuti avaldatud töös (3, 4, 6). Teooria üheks oluliseks tulemuseks on järeldus kiiruste ellipsoidi kalde olemasolu kohta väljaspool Galaktika tasandit. Teooria võimaldab üldistada Lindbladi ja Bottlingeri diagramme ja käsitleda senisest palju täielikumalt Galaktika ruumilis-kinemaatilist struktuuri. Peale selle võimaldab ta arvutada tähtede galaktilisi orbiite üldisel kolmemõõtmelisel juhul.

2. Kolmanda integraali teooriast tulenevad Galaktika mudelid

Kolmanda integraali olemasolu seab teatava kitsendava tingimuse tähesüsteemi gravitatsiooni potentsiaalile. Kuid, arvestades seda tingimust, osutub siiski võimalikuks konstrueerida tähesüsteemi lapikuid mudeleid, millel on teatav sarnasus reaalse Galaktikaga (^{3, 6}). Siit järgneb, et mainitud kitsendavast tingimusest hoolimata võib kolmas integraal olla kasutatav ligikaudse liikumise integraalina, nagu seda on reaalse Galaktika puhul ka energia ja pindade integraalid. Tähesüsteemi lapikutel mudelitel, mis tulenevad kolmanda integraali teooriast, muutub potentsiaal süsteemi sümmeetria tasandis $\Phi_{z=0}$, ringiline kiirus V , tihedus sümmeetria tasandis $\rho_{z=0}$ ja sümmeetria tasandile projitseeritud tihedus δ valemite (2)–(5) kohaselt (R — kaugus sümmeetria teljest, $z_0, \Phi_0, V_0, \rho_0, \delta_0$ — konstandid). Kõige lihtsamad nendest mudelitest kuuluvad mittehomoogeensete sferoidide hulka, kuid ka teistsugused mudelid on võimalikud.

3. Sferoidilised Galaktika mudelid

Kolmanda integraali teooriast tulenevatel Galaktika mudelitel on teatavaid puudusi, mistõttu nad pole eriti sobivad praktikas rakendamiseks. Et saada praktikas paremini rakendatavaid mudeleid, on otstarbekohane kasutada ühisteljeliste mittehomoogeensete sferoidide superpositsiooni või isegi ühtainsat sobiva tiheduse jaotusega mittehomoogeenset sferoidi. Mittehomoogeenne sferoid on iseloomustatav samatiheduse pindade pooltelgede suhtega ε ja tiheduse funktsiooniga $\rho(a)$, kus a on samatiheduse pinna suur pooltelg. Tiheduse funktsiooni asemel on võimalik kasutada massifunktsiooni $\mu(a)$ või sfäärilist tihedust $\rho_s(a)$, mis mõlemad on seotud tiheduse funktsiooniga valemi (6) kaudu. Ringiline kiirus, potentsiaal sümmeetria tasandis, projitseeritud tihedus ja kogu mass väljenduvad massifunktsiooni kaudu valemitega (7)–(11) (²).

4. G. M. Iddis'e poolt esitatud tähesüsteemi mudel

Võrdlemisi sobiva tiheduse jaotusega on G. M. Iddis'e (¹) poolt esitatud tähesüsteemi sferoidiline mudel. Mudeli potentsiaal sümmeetria tasandis, ringiline kiirus ja tihedus sümmeetria tasandis on antud valemitega (12)–(14) (R_0, Φ_0, V_0, ρ_0 — konstandid). Kui lugeda potentsiaali lõpmatuses võrdseks nulliga, siis tuleb valemis (12) potentsiaalile lisada teatav konstant. Iddis'e mudeli raadius on lõplik, mis on selle mudeli oluliseks eeliseks võrreldes kolmanda integraali teooriast tulenevate mudelitega. Iddis'e mudeli massifunktsioon on graafiliselt esitatud joonisel 1. Võrdluseks on katkendjoonega märgitud ka massifunktsioon sferoidilisel mudelil, mis tuleneb kolmanda integraali teooriast.

5. Üldistatud sferoidiline mudel

Väga üldist laadi Galaktika mudeli saame superponeerides suurt hulka erineva lapikusega mittehomoogeenseid sferoide, mille tiheduse funktsioonid pole eelnevalt fikseeritud (^{2, 5}). Mudelit tervikuna võib iseloomustada summaarse tiheduse funktsiooniga $\rho(a)$ ja summaarse massifunktsiooniga $\mu(a)$ ning lapikuse funktsioonidega $\varepsilon_1(a)$ ja $\varepsilon_2(a)$, mis on defineeritud valemitega (15) ja (16). Summaarne massifunktsioon on seotud summaarse projitseeritud tihedusega, kogu massiga ja summaarse tihedusega valemite (10), (11) ja (17) kaudu. Summaarse massifunktsiooni seos ringilise kiirusega ja potentsiaaliga sümmeetria tasandis väljendub valemitega (7), (9) ja (18). Valem (7) võimaldab määrata ringilise kiiruse järgi summaarset massifunktsiooni empiirilise funktsioonina.

6. Massi jaotus Galaktikas

Galaktika massifunktsioon ja projitseeritud tihedus olid autori poolt varem määratud pikaperioodiliste tsefeiidide liikumise põhjal (²). Galaktika pöörlemise radiovaatlused (¹⁰) avasid selleks soodsama võimaluse. Need

vaatlused võimaldavad määrata Galaktika sisemiste piirkondade jaoks (Päikese suhtes) diferentsiaalse pöörlemise funktsiooni $U(x)$, mis on defineeritud valemiga (19) (R_{\odot} ja V_{\odot} on R ja V väärtused Päikese ümbruses). Minnes diferentsiaalse pöörlemise funktsioonilt üle ringilisele kiirusele, võime arvutada massifunktsiooni Galaktika sisemiste piirkondade jaoks. Välimiste piirkondade puhul tuleb aga massifunktsiooni sujuvalt ekstrapoleerida kuni väärtuseni null Galaktika piiril. Massifunktsioonile vastav keskmine radiaalse tiheduse gradient Päikese laiemas ümbruses peab seejuures sobima teiste olemasolevate andmetega. Peale selle peab massifunktsioonile vastav potentsiaal olema selline, et tähed, mis liiguvad Päikese ümbruses maksimaalse galaktotsentrilise kiirusega, saavutaksid apogalaktikumis parajasti Galaktika piiri. Neid tingimusi osutub võimalikuks rahuldada siis, kui võtta ringiline kiirus Päikese ümbruses võrdseks umbes 250 km/sekundiga. Nimetatud kiiruse väärtusele vastav massifunktsioon μ on antud tabelis 1 ja graafiliselt joonisel 2. Tabelis 1 on antud veel diferentsiaalse pöörlemise funktsioon U , ringiline kiirus V , paokiirus Galaktika tasandis V_k , projitseeritud tihedus δ ja sfääriline tihedus ρ_s . Galaktika kogumass osutub võrdseks $107 \cdot 10^9$ Päikese massiga.

7. Iddis'e mudeli rakendamine

Empiiriline massifunktsioon on võrdlemisi hästi esitatav Iddis'e kahe mudeli massifunktsiooni superpositsiooniga. Viimane on märgitud joonisel 2 punktiirjoonega. Iddis'e väiksema mudeli mass on 0.07 Galaktika kogumassist ja raadius 0.46 Päikese kaugusest Galaktika keskmest. See väiksem mudel hakkab domineerima siis, kui kaugus keskmest on väiksem kui 0.2 Päikese kaugusest. Väiksem mudel on tingimisi identifitseeritav Galaktika tuumaga.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Füüsika ja Astronoomia Instituut

Saabus toimetusse
20. III 1956

SOME PROBLEMS CONCERNING THE DYNAMICS OF THE GALAXY

G. KUZMIN

Summary

1. Theory of the Third Integral of the Motion of Stars

The observed fact that the velocity ellipsoid is triaxial can be explained on the basis of the theory of the steady Galaxy with axial symmetry. The explanation is possible if allowance is made for a third single valued integral of motion independent of time in addition to the energy integral and the integral of angular momentum used hitherto. The theory of the third integral has been presented by the author in his three recent papers (3, 4, 6). One of the important results of the theory is the conclusion concerning the existence of the obliquity of the velocity ellipsoid outside the galactic plane. The theory enables us to generalize Lindblad's and Bottlinger's diagrams and to obtain a more general insight into the spatio-kinematic structure of the Galaxy. Furthermore the theory renders possible the calculation of the galactic orbits of stars in the general three-dimensional case.

2. Models of the Galaxy Resulting from the Theory of the Third Integral

The existence of the third integral puts certain restrictions on the gravitational potential of the star system. However, it is possible to find flattened models of the star system where these restrictions are met and which bear a certain resemblance to the real Galaxy (^{3, 6}). This fact means that notwithstanding the above restrictions the third integral can be applied as an approximate integral of motion to the real Galaxy on equal terms with the energy integral and the integral of angular momentum. In the case of flattened models of the star system resulting from the theory of the third integral the potential in the plane of symmetry $\Phi_{z=0}$, the circular velocity V , the density in the plane of symmetry $\rho_{z=0}$, and the density projected upon the plane of symmetry δ vary according to the formulae (2) to (5) (R is the distance from the axis of symmetry, z_0 , Φ_0 , V_0 , ρ_0 , δ_0 are constants). The simplest of these models belong to the nonhomogeneous spheroids, but there may be models of other kinds as well.

3. Spheroidal Models of the Galaxy

The models of the Galaxy resulting from the theory of the third integral have certain deficiencies which make them unsuitable for practical purposes. In practical use it is convenient to employ the superposition of coaxial nonhomogeneous spheroids or even a single nonhomogeneous spheroid with suitable density distribution. A nonhomogeneous spheroid is characterized by the ratio of the semiaxis of the equidensity surfaces ε and by the density function $\rho(a)$ where a means the great semiaxis of the equidensity surface. Instead of the density function it is possible to use the mass function $\mu(a)$ or the spherical density $\rho_s(a)$ both connected with the density function by formula (6). The circular velocity, the potential in the plane of symmetry, the projected density, and the total mass of the model expressed in terms of the mass function are given by formulae (7) to (11) (²).

4. G. M. Iddis' Model of the Star System

A spheroidal model of the star system possessing a comparatively acceptable density distribution has been presented by G. M. Iddis (¹). The potential of the model in the plane of symmetry, the circular velocity and the density in the plane of symmetry are given by the formulae (12) to (14) (R_0 , Φ_0 , V_0 and ρ_0 being constants). In the formula (12) a constant should be added, if the potential is assumed to vanish in infinity. The radius of the Iddis model being finite, this model is to be preferred to those resulting from the theory of the third integral. The mass function of the Iddis model is graphically presented in Fig. 1. For comparison, the same function for the spheroidal model resulting from the theory of the third integral is plotted as a dashed curve.

5. Generalized Spheroidal Model

A quite general type of models for the Galaxy can be obtained by the superposition of a great number of nonhomogeneous spheroids with different flattening and whose density functions have not been fixed in advance (^{2, 5}). The model as a whole can be characterized by the integrated density function $\rho(a)$, the integral mass function $\mu(a)$, and the flattening functions $\varepsilon_1(a)$ and $\varepsilon_2(a)$ defined by formulae (15) and (16). The integrated mass function is connected with the total projected density, with the total mass, and with the integrated density function by formulae (10), (11) and (17). The connection of the integrated mass function with the circular velocity and with the potential in the galactic plane is expressed by formulae (7), (9) and (18). Formula (7) enables us to determine the integrated mass function in an empirical form in terms of the circular velocity.

6. Distribution of Masses in the Galaxy

Previously the mass function and the projected density of Galaxy were determined by the author from the motions of the long period cepheids (2). The radio observations of the galactic rotation (10) have furnished more reliable data for determination of these functions. From radio observations it is possible to establish the differential rotation function $U(x)$, defined by formula (19), for the inner part of the Galaxy as regards the Sun (R_{\odot} and V_{\odot} are the values of R and V respectively for the vicinity of the Sun). When we turn from the differential rotation function to the circular velocity, we are in position to find the mass function for the inner regions of the Galaxy. For the outer regions the mass function must be smoothly extrapolated on condition that it vanish on the boundary of the Galaxy. The mean radial density gradient corresponding to the mass function in the broader regions around the Sun must be in accordance with the other available data. Besides, the corresponding potential must be such as to permit the maximum velocity stars in the vicinity of the Sun to reach their apogalaxy just on the boundary of the system. The above conditions can be fulfilled, if we assume that the circular velocity in the vicinity of the Sun equals nearly 250 km/sec. The mass function μ referred to this quantity is given in Table 1 and in the graphical form in Fig. 2. Table 1 gives also the differential rotation function U , the circular velocity V , the velocity of escape in the galactic plane V_k , the projected density δ , and the spherical density ρ_s . The total mass of the Galaxy amounts to $107 \cdot 10^9$ solar masses.

7. Application of Idlis' Model

The empirical mass function can be comparatively well described by the superposition of the mass functions of two Idlis models. The latter is presented in Fig. 2 by the dotted curve. The mass of the less extensive of the two Idlis models equals 0.07 of the total mass of the Galaxy and its radius is 0.46 of the distance between the Sun and centre of the Galaxy. This model becomes predominant, if the distance from the centre is less than 0.2 of that of the Sun. It can be conditionally identified with the nucleus of the Galaxy.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Physics and Astronomy

Received
March 20, 1956