EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. V KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1956, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ V
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1956, № 2

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1956.2.02

О МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г. Ф. КАНГРО,
доктор физико-математических наук

Введение

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — некоторые классы последовательностей. Мы будем говорить, что преобразование *

$$y_n = \sum_{\nu} a_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

обладает свойством $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, если каждая последовательность $\mathfrak{x} = \{x_\nu\}$ класса $\mathfrak{X}$ преобразуется при помощи (1) в последовательность $\mathfrak{y} = \{y_n\}$ класса $\mathfrak{Y}$. При этом предполагается, что ряды $\sum\limits_{\nu} a_{n\nu} x_\nu$ $(n = 0, 1, \ldots)$ сходятся при $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$. В теории суммирования числовых (вещественных или комплексных) рядов матричными методами большую роль играют преобразования (1), обладающие свойствами $c \to c$, $m \to c$, $l \to c$, $l \to l$, где c, m — классы всех сходящихся, соответственно ограниченных числовых последовательностей, а l — класс тех числовых последовательностей $\mathfrak{x}$, при которых $\sum |x_\nu| < \infty$. Свойства $c \to c$, $m \to c$, $l \to c$, $l \to l$ характеризуются известными теоремами Кожима-Шура (1), Шура (1), Хана (2) и Кноппа-Лоренца (3).

В связи с потребностями других областей анализа в теории рядов, возникла необходимость исследовать более общие матричные преобразования

$$y_n = \sum_{\nu} A_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $A_{n\nu}$ — ограниченные линейные операторы из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Обозначим через c_X, m_X классы всех (сильно) сходящихся, соответственно ограниченных последовательностей в X, а через l_X — класс тех последовательностей $\mathfrak{x} = \{x_\nu\}$ в X, при которых $\sum \| x_\nu \| < \infty$. Нетрудно

* Если пределы суммирования не указаны, то индексы суммирования пробегают все целочисленные значения 0, 1, ...

проверить, что при нормировке $\|\mathfrak{x}\| = \sup_{\nu} \|x_\nu\|$ классы c_X, m_X, а при $\|\mathfrak{x}\| = \sum \|x_\nu\|$ и класс l_X превращаются в банаховы пространства. Мелвин-Мелвин ([4]) и Целлер ([5]) установили необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (2) обладало свойством $c_X \to c_Y$*. Приводим их результат.

Теорема 1. *Преобразование* (2) *обладает свойством* $c_X \to c_Y$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} A_{n\nu} x = A_\nu x \quad (x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} \sum_\nu A_{n\nu} x = Ax \quad (x \in X),$$

$$3^\circ \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{p} A_{n\nu} x_\nu \right\| = O(1) \quad (n, p = 0, 1, \ldots).$$

Если условия 1°—3° *выполнены, то для всех* $\mathfrak{x} \in c_X$ *мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = Ax + \sum_\nu A_\nu (x_\nu - x), \tag{3}$$

где $x = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$.

В § 1 настоящей статьи устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (2) обладало свойствами $m_X \to c_Y$, $l_X \to c_Y$, $l_X \to l_Y$. Результаты § 1 (а также теорема 1) применяются в § 2 при изучении проблемы об абстрактных множителях суммируемости и в § 3 при изучении проблемы об умножении абстрактных рядов.

При этом оказывается, что многие теоремы о числовых множителях суммируемости и об умножении числовых рядов допускают обобщения на абстрактные ряды **. В частности, тем самым становится возможным трактовать с единой точки зрения разные вопросы о тех или иных видах суммируемости (равномерной суммируемости, суммируемости в среднем и т. д.) функциональных рядов.

§ 1. Некоторые теоремы о матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах

1. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (2) обладало свойствами $m_X \to c_Y$, $l_X \to c_Y$, $l_X \to l_Y$, даются следующими теоремами.

Теорема 2. *Если существует* $\lim_{n\to\infty} A_{n\nu} = A_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *по норме,*

---

* Случай $X = Y$ вместе с требованием регулярности $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$ рассматривался Робинсоном ([6]).

** В статье приводятся лишь некоторые примеры таких обобщений.

то преобразование (2) *обладает свойством* $m_X \to c_Y$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\sum_\nu A_{n\nu} x_\nu$ *сходится при всех* $\mathfrak{x} \in m_X$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

2° $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_{\nu=0}^{p} (A_{n\nu} - A_\nu) x_\nu \right\| = 0$ *равномерно относительно* $p = 0, 1, \ldots$.

Если условия 1° и 2° *выполнены, то для всех* $\mathfrak{x} \in m_X$ *мы имеем*

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \sum_\nu A_\nu x_\nu, \tag{4}$$

причем $\sum A_\nu x_\nu$ *равномерно сходится при* $\|x_\nu\| \leqslant 1$.

Теорема 3. *Преобразование* (2) *обладает свойством* $l_X \to c_Y$ *тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_{n \to \infty} A_{n\nu} x = A_\nu x$ $(x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots)$,

2° $\|A_{n\nu}\| = O(1)$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$.

Если условия 1° и 2° *выполнены, то для всех* $\mathfrak{x} \in l_X^*$ *справедливо соотношение* (4).

Теорема 4. *Преобразование* (2) *обладает свойством* $l_X \to l_Y$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n \left\| A_{n\nu} x \right\| \leqslant M \left\| x \right\| \quad (x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots),$$

где M — *постоянная, не зависящая от* x *и* ν.

Если это условие выполнено, то для всех $\mathfrak{x} \in l_X$ *справедливо соотношение*

$$\sum_n y_n = \sum_\nu G_\nu x_\nu, \tag{5}$$

где $G_\nu = \sum\limits_n A_{n\nu}$.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства достаточности условий 1° и 2° теоремы 2 покажем, прежде всего, что из этих условий вытекает сходимость ряда $\sum A_\nu x_\nu$ при всех $\mathfrak{x} \in m_X$.

Действительно, из условия 2° теоремы 2 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ и $\mathfrak{x} \in m_X$ можно указать такое натуральное число n_0, чтобы неравенство

$$\left\| \sum_{\nu=q}^{p} (A_{n_0\nu} - A_\nu) x_\nu \right\| < \varepsilon \tag{6}$$

удовлетворялось независимо от q и $p > q$. С другой стороны, вследствие условия 1° теоремы 2 существует натуральное число Q, такое, что неравенство

$$\left\| \sum_{\nu=q}^{p} A_{n_0\nu} x_\nu \right\| < \varepsilon \tag{7}$$

справедливо при $p > q > Q$. Поскольку пространство Y полно, то из (6) и (7) и вытекает сходимость ряда $\sum A_\nu x_\nu$ при всех $\mathfrak{x} \in m_X$.

Справедливость соотношения (4) и, тем самым, достаточность условий 1°, 2° теоремы 2 получается теперь из условия 2° при $p \to \infty$.

Необходимость условия 1° теоремы 2 очевидна. Для доказательства необходимости условия 2° достаточно показать необходимость следующего условия: каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что неравенство

$$\left\| \sum_\nu (A_{m\nu} - A_{n\nu}) x_\nu \right\| < \varepsilon \tag{8}$$

имеет место при $\| x_\nu \| \leqslant 1$, если $m > n > N$. В самом деле, условие 2° теоремы 2 получается из (8) при $x_\nu = 0$ для $\nu > p$ и при последующем предельном переходе $m \to \infty$.

Предположим теперь, что преобразование (2) обладает свойством $m_X \to c_Y$, а условие (8) не выполняется. Тогда существуют $\delta > 0$, возрастающие последовательности натуральных чисел $\{m_r'\}$, $\{n_r'\}$ $(m_r' > n_r')$ и последовательность $\{\mathfrak{x}_r'\}$, где $\mathfrak{x}_r' = \{x_{\nu r}'\}$ $(\|x_{\nu r}'\| \leqslant 1,\ x_{\nu r}' \in X)$, удовлетворяющие неравенству

$$\left\| \sum_\nu (A_{m_r'\nu} - A_{n_r'\nu}) x_{\nu r}' \right\| > \delta. \tag{9}$$

Построим индуктивно две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{\nu_k\}$ и $\{n_k\} \subset \{n_r'\}$. А именно, задав ν_0 произвольно, предположим, что числа

$$n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$$
$$\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k$$

уже определены и выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы неравенство

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\nu_k} B_{k\nu} x_\nu \right\| < 2^{-k}, \tag{10}$$

где

$$B_{k\nu} = A_{m_k\nu} - A_{n_k\nu},$$

выполнялось при $\| x_\nu \| \leqslant 1$. Это возможно ввиду сходимости по норме последовательности $\{A_{n\nu}\}$ при $n \to \infty$. При этом, если $n_k = n_r'$, то положим $m_k = m_r'$.

Далее, выберем $\nu_{k+1} > \nu_k$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{\nu=\nu_{k+1}+1}^{\infty} B_{k\nu} x_\nu \right\| < 2^{-k} \tag{11}$$

при $\| x_\nu \| \leqslant 1$. Если матрица $(A_{n\nu})$ треугольна (т. е. $A_{n\nu} = 0$ для $\nu > n$), то условие (11) выполняется при $\nu_{k+1} \geqslant m_k$. Впоследствии мы покажем, что условию (11) всегда можно удовлетворять.

Поскольку

$$\left\| \sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} B_{k\nu} x_{\nu k} \right\| \geqslant \left\| \sum_\nu B_{k\nu} x_{\nu k} \right\| - \left\| \sum_{\nu=0}^{\nu_k} B_{k\nu} x_{\nu k} \right\| - \left\| \sum_{\nu=\nu_{k+1}+1}^{\infty} B_{k\nu} x_{\nu k} \right\|,$$

то, в силу неравенств (9)—(11), мы имеем

$$\left\| \sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} B_{k\nu} x_{\nu k} \right\| > \delta - 2^{1-k}, \tag{12}$$

где $x_{\nu k} = x_{\nu r}'$ (если $n_k = n_r'$).

Определим теперь последовательность $\mathfrak{x}' = \{x_\nu'\}$ следующим образом:

$$x_\nu' = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant \nu \leqslant \nu_0 \\ x_{\nu k} \text{ при } \nu_k < \nu \leqslant \nu_{k+1} \ (k = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

Тогда $\| x_\nu' \| \leqslant 1$, и при помощи неравенств (10)—(12) мы находим:

$$\left\| \sum_\nu B_{k\nu} x_\nu' \right\| > \left\| \sum_{\nu=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} B_{k\nu} x_{\nu k} \right\| - \left\| \sum_{\nu=0}^{\nu_k} B_{k\nu} x_\nu' \right\| -$$

$$- \left\| \sum_{\nu=\nu_{k+1}+1}^{\infty} B_{k\nu} x_\nu' \right\| > \delta - 2^{2-k}.$$

Отсюда вытекает, что построенная нами последовательность $\mathfrak{x}' \in m_X$ преобразуется при помощи (2) в последовательность $\mathfrak{y}' \bar{\in} c_Y$. Следовательно, необходимость условия 2° теоремы 2 доказана в предположении, что матрица $(A_{n\nu})$ треугольна.

Переходя к общему случаю, когда $(A_{n\nu})$ не треугольна, отметим, что если ряд

$$\sum_\nu C_\nu x_\nu,$$

где C_ν — ограниченные линейные операторы из X в Y, сходится при всех $\mathfrak{x} \in m_X$, т. е. если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu x_\nu$$

при всех $\mathfrak{x} \in m_X$, то преобразование (2) с

$$A_{n\nu} = \begin{cases} C_\nu \text{ при } \nu \leqslant n \\ 0 \text{ при } \nu > n \end{cases} \tag{13}$$

обладает свойством $m_X \to c_Y$. Но поскольку $(A_{n\nu})$ тут треугольна, то справедливо неравенство (8), которое в силу (13) гласит:

$$\left\| \sum_{\nu=n+1}^{m} C_\nu x_\nu \right\| < \varepsilon$$

при $\| x_\nu \| \leqslant 1$, если $m > n > N$. При $C_\nu = B_{k\nu}$ мы убедимся, что условию (11) всегда можно удовлетворять, а при $C_\nu = A_\nu$, что $\sum A_\nu x_\nu$ равномерно сходится при $\| x_\nu \| \leqslant 1$. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что ряды $\sum_{\nu} A_{n\nu} x_{\nu}$ $(n=0, 1, \ldots)$ сходятся при $\mathfrak{x} \in l_X$. Поскольку

$$y_n = \lim_{p \to \infty} \sum_{\nu=0}^{p} A_{n\nu} x_{\nu},$$

то y_n является ограниченным линейным оператором из l_X в Y, который мы обозначим через $U_n \mathfrak{x}$, т. е. $y_n = U_n \mathfrak{x}$. Преобразование (2) обладает теперь свойством $l_X \to c_Y$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{U_n \mathfrak{x}\}$ сходится при всех $\mathfrak{x} \in l_X$. Согласно теореме Банаха и Штейнгауса, для этого необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\{U_n \mathfrak{x}\}$ сходилась на некотором основном множестве в l_X,

б) $\| U_n \| = O(1)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Поскольку для всех $\mathfrak{x} \in l_X$ мы имеем

$$\mathfrak{x} = \sum_{\nu} \mathfrak{e}_{\nu}(x_{\nu}), \tag{14}$$

где

$$\mathfrak{e}_{\nu}(x) = \{\underbrace{0, \ldots, 0,}_{\nu \text{ нулей}}\ x, 0, \ldots\}, \tag{15}$$

то множество $\{\mathfrak{e}_{\nu}(x)\}$ $(x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots)$ является основным множеством в l_X и условие а) сводится к условию 1° теоремы 3.

С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$\| U_n \| = \sup_{\nu} \| A_{n\nu} \|,$$

вследствие чего условие б) сводится к условию 2° теоремы 3, которое также обеспечивает сходимость рядов $\sum_{\nu} A_{n\nu} x_{\nu}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ при $\mathfrak{x} \in l_X$.

Наконец, так как при условиях теоремы 3 $U\mathfrak{x} = \lim_{n \to \infty} U_n \mathfrak{x}$ представляет собой ограниченный линейный оператор из l_X в Y, то для $\mathfrak{x} \in l_X$, ввиду (14) и (15), мы имеем:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = U\mathfrak{x} = \sum_{\nu} U \mathfrak{e}_{\nu}(x_{\nu}) = \sum_{\nu} A_{\nu} x_{\nu}.$$

Доказательство теоремы 4. Если преобразование (2) обладает свойством $l_X \to l_Y$, то $y_n = U_n \mathfrak{x}$ является ограниченным линейным оператором из l_X в Y, причем

$$\sum_{n} \| U_n \mathfrak{x} \| < \infty \quad (\mathfrak{x} \in l_X).$$

Тогда, согласно одной из теорем Бозанкет и Кэстелмана ([7]), существует такая постоянная M, что

$$\sum_{n} \| U_n \mathfrak{x} \| \leqslant M \| \mathfrak{x} \| \quad (\mathfrak{x} \in l_X).$$

Отсюда при $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_\nu(x)$ и вытекает необходимость условия теоремы 4. Достаточность этого условия следует из соотношений

$$\sum_{n=0}^{m} \| y_n \| \leqslant \sum_{n=0}^{m} \sum_{\nu} \| A_{n\nu} x_\nu \| = \sum_{\nu} \sum_{n=0}^{m} \| A_{n\nu} x_\nu \| \leqslant M \| \mathfrak{x} \|.$$

Наконец, для $\mathfrak{x} \in l_X$ мы имеем:

$$\sum_{n} y_n = \sum_{n} \sum_{\nu} A_{n\nu} x_\nu = \sum_{\nu} G_\nu x_\nu,$$

где $G_\nu = \sum\limits_{n} A_{n\nu}$.

2. Ради краткости будем обозначать

$$S_{np} = \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{p} A_{n\nu} x_\nu \right\|.$$

Следующие примечания облегчают применение теорем 1 и 2.

Примечание 1. Если $A_{n\nu}$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$ является функционалом из пространства X, то мы имеем

$$S_{np} = \sum_{\nu=0}^{p} \| A_{n\nu} \|. \tag{16}$$

Действительно, с одной стороны, справедливо неравенство

$$S_{np} \leqslant \sum_{\nu=0}^{p} \| A_{n\nu} \|. \tag{17}$$

С другой стороны, соответственно произвольному $\varepsilon > 0$ выберем элементы $x_\nu^0 \in X$ $(\| x_\nu^0 \| = 1)$ так, чтобы

$$| A_{n\nu} x_\nu^0 | > \| A_{n\nu} \| - \varepsilon \cdot 2^{-\nu-1}$$

и положим *

$$x_\nu' = \operatorname{sgn} (A_{n\nu} x_\nu^0) x_\nu^0.$$

Тогда $\| x_\nu' \| = 1$, и мы находим

$$S_{np} \geqslant \left\| \sum_{\nu=0}^{p} A_{n\nu} x_\nu' \right\| > \sum_{\nu=0}^{p} \| A_{n\nu} \| - \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ вытекает

$$S_{np} \geqslant \sum_{\nu=0}^{p} \| A_{n\nu} \|. \tag{18}$$

---

* Функция $\operatorname{sgn} z$ от комплексного переменного z определяется формулой

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \dfrac{|z|}{z} & \text{при } z \neq 0 \\ 1 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Из (17) и (18) и следует (16).

В силу (16) из теорем 1 и 2 получаются следующие теоремы, более сходные с теоремами Кожима-Шура и Шура [1].

Теорема 1′. *Преобразование* (2) *обладает свойством* $c_X \to c$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} A_{n\nu}x \ (x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \text{ существует } \lim_{n\to\infty} \sum_\nu A_{n\nu}x \ (x \in X),$$

$$3^\circ \ \sum_\nu \|A_{n\nu}\| = O(1) \ (n = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 2′. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n\nu} = A_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *по норме, то преобразование* (2) *обладает свойством* $m_X \to c$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \ \sum_\nu \|A_{n\nu}\| < \infty \ (n = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \ \lim_{n\to\infty} \sum_\nu \|A_{n\nu} - A_\nu\| = 0.$$

Примечание 2. Если $A_{n\nu}$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$ является оператором умножения на комплексную функцию $a_{n\nu}(t)$, ограниченную на некотором множестве E, т. е. $A_{n\nu}x = a_{n\nu}(t)x$, а $Y = M_X$, где M_X — пространство ограниченных на E функций $y(t)$ со значениями в X и с нормой $\|y\| = \sup\limits_{t\in E} \|y(t)\|$, то мы имеем

$$S_{np} = \sup_{t\in E} \sum_{\nu=0}^{p} |a_{n\nu}(t)|. \tag{19}$$

Действительно, с одной стороны, справедливо неравенство

$$S_{np} \leqslant \sup_{t\in E} \sum_{\nu=0}^{p} |a_{n\nu}(t)|. \tag{20}$$

С другой стороны, если $t^\circ \in E$ произвольный, а $x^\circ \in X$ — некоторый нормированный элемент, то при $x_\nu' = \operatorname{sgn}(a_{n\nu}(t^\circ))x^\circ$, в силу $\|x_\nu'\| = 1$, мы находим

$$S_{np} \geqslant \left\| \sum_{\nu=0}^{p} a_{n\nu}(t^0)x_\nu' \right\| = \sum_{\nu=0}^{p} |a_{n\nu}(t^0)|,$$

откуда

$$S_{np} \geqslant \sup_{t\in E} \sum_{\nu=0}^{p} |a_{n\nu}(t)|. \tag{21}$$

Из (20) и (21) и вытекает (19).

Используя (19), нетрудно проверить, что если $A_{n\nu}$ ($n, \nu = 0, 1, \ldots$) представляет собой оператор умножения на комплексную функцию $a_{n\nu}(t)$, ограниченную на E, то свойства $c_X \to c_Y$, $m_X \to c_Y$, $l_X \to c_Y$, $l_X \to l_Y$, где $Y = M_X$, не зависят от пространства X. Для свойства $c_X \to c_Y$ (вместе с требованием регулярности) это показал в частном случае, когда $A_{n\nu}$ является числовым множителем (и, следовательно, $Y = X$), Вулих ([8]).

§ 2. Об абстрактных множителях суммируемости

Разные проблемы теории суммирования числовых рядов, в том числе проблемы о лимитирующих теоремах методов суммирования, о включении и совершенстве методов суммирования, о множителях суммируемости, об умножении суммируемых рядов и другие, нередко можно решить при помощи теорем Кожима-Шура, Шура, Хана и Кноппа-Лоренца. Применение теорем 1—4 позволяет решить такие же вопросы для рядов в любых банаховых пространствах. В качестве примера рассмотрим коротко вопросы об абстрактных множителях суммируемости и об умножении абстрактных суммируемых рядов.

1. Пусть $A = (a_{n\nu})$ ($n, \nu = 0, 1, \ldots$) — некоторая числовая (вещественная или комплексная) матрица. Мы будем называть ряд $\sum x_\nu$ в пространстве X A-суммируемым (A-ограниченным, $|A|$-суммируемым), если последовательность $\{x_n'\}$, определяемая преобразованием

$$x_n' = \sum_\nu a_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{22}$$

существует * и (сильно) сходится (ограничена, абсолютно сходится) в X. Под A-суммой ряда $\sum x_\nu$ понимается предел последовательности $\{x_n'\}$ и пишется

$$A\left\{\sum x_\nu\right\} = \lim_{n \to \infty} x_n'.$$

Если, например,

$$a_{n\nu} = \frac{P_{n-\nu}}{P_n},$$

где $\{P_n\}$ — данная числовая последовательность с $P_n \neq 0$, $P_{-n} = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), то преобразование (22) определяет метод суммирования Вороного-Нёрлунда, частным случаем которого является метод Чезаро C^α при $P_n = A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$.

Пусть, далее, $\{\varepsilon_\nu\}$ — некоторая последовательность ограниченных линейных операторов из X в Y, а $B = (\beta_{n\nu})$ — числовая матрица. Последовательность $\{\varepsilon_\nu\}$ называется последовательностью множителей суммируемости типа (A, B) ((A_0, B), $(|A|, B)$), если при каждом A-суммируемом (A-ограниченном, $|A|$-суммируемом) ряде $\sum x_\nu$ ряд $\sum \varepsilon_\nu x_\nu$ является

---

* Т. е. если ряды $\sum_\nu a_{n\nu} x_\nu$ ($n = 0, 1, \ldots$) (сильно) сходятся.

B-суммируемым. Аналогично определяются множители суммируемости типа $(|A|, |B|)$.

Ради простоты ограничимся в дальнейшем случаем, когда матрица B треугольна (т. е. $\beta_{n\nu} = 0$ при $\nu > n$) и A нормальна (т. е. треугольна и $a_{nn} \neq 0$). Тогда существуют матрицы $A^{-1} = (a_{n\nu}')$ и $\bar{A}^{-1} = (a''_{n\nu})$, обратные соответственно к A и $\bar{A} = (\bar{\Delta}_n a_{n\nu})$, где $\bar{\Delta}_n a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n-1,\nu}$ $(a_{-1,\nu} = 0)$, и нетрудно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Если A нормальна и B треугольна, то для того, чтобы $\{\varepsilon_\nu\}$ была последовательностью множителей суммируемости типа (A, B) $((A_O, B), (|A|, B), (|A|, |B|))$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование* (2) *с треугольной матрицей $(A_{n\nu})$, где*

$$A_{n\nu} = \sum_{k=\nu}^{n} \bar{\beta}_{nk} \bar{a}_{k\nu} \varepsilon_k, \tag{23}$$

обладало свойством $c_X \to c_Y$ $(m_X \to c_Y,\ l_X \to c_Y,\ l_X \to l_Y)$. При этом в случае множителей суммируемости типов (A, B), (A_O, B) $\bar{a}_{k\nu} = a_{k\nu}'$, $\bar{\beta}_{nk} = \beta_{nk}$, а в случае $(|A|, B)$, $(|A|, |B|)$ $\bar{a}_{k\nu} = a''_{k\nu}$, причем $\bar{\beta}_{nk} = \beta_{nk}$ при $(|A|, B)$ и $\bar{\beta}_{nk} = \bar{\Delta}_n \beta_{nk}$ при $(|A|, |B|)$.

Согласно примечанию 2, из (23) вытекает, что если ε_k $(k = 0, 1, \ldots)$ является оператором умножения на комплексную функцию, ограниченную на данном множестве E, а $Y = M_X$, то соответствующие множители суммируемости не зависят от пространства X. В частности, если B включает A (в символах $B \supset A$), т. е. если все A-суммируемые ряды $\sum x_\nu$ в пространстве X являются также B-суммируемыми, то это равносильно тому, что $\varepsilon_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ являются множителями суммируемости типа (A, B). Отсюда заключаем, что соотношение включения $B \supset A$ не зависит от пространства X. Аналогично можно показать, что включения $B \supset A_O$, $B \supset |A|$ и $|B| \supset |A|$ также не зависят от X.

2. В качестве применения теоремы 5 и вместе с тем теорем 1—4 приводим следующие теоремы, дающие абстрактные множители суммируемости типов (C^α, C^β), $(C_O{}^\alpha, C^\beta)$, $(|C^\alpha|, C^\beta)$, $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, где C^α — метод суммирования Чезаро порядка α. При этом мы будем пользоваться обозначением

$$\Delta^\alpha \varepsilon_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} \varepsilon_k,$$

откуда, в частности,

$$\Delta \varepsilon_\nu = \Delta^1 \varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}.$$

Теорема 6. *Если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то $\{\varepsilon_\nu\}$ является последовательностью множителей суммируемости типа (C^α, C^β) тогда и только тогда, когда*

1° $\|\varepsilon_\nu\| = O(\nu^{\beta-\alpha})$,

2° $\sup\limits_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_{\nu=0}^{p} \nu^\alpha (\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu) x_\nu \right\| = O(1)$ $(p = 0, 1, \ldots)$.

Теорема 7. *Если* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, *то* $\{\varepsilon_\nu\}$ *является последовательностью множителей суммируемости типа* $(C_0{}^\alpha, C^\beta)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\|\varepsilon_\nu\| = o(\nu^{\beta-\alpha})$,

2° $\sum\limits_\nu \nu^\alpha (\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_\nu) x_\nu$ *сходится равномерно при* $\|x_\nu\| \leqslant 1$.

Теорема 8. *Если* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то $\{\varepsilon_\nu\}$ *является последовательностью множителей суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta)$ *или* $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \ \|\varepsilon_\nu\| = O(\nu^{\beta-\alpha}),$$

$$2^\circ \ \|\Delta^\alpha \varepsilon_\nu\| = O(\nu^{-\alpha}).$$

Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, то условия теорем 6—8 являются такими же, как при $\alpha = \beta$.

Если ε_ν — числовые множители, то при помощи формулы (19) из теорем 6 и 7 вытекают соответствующие теоремы Шура ([1]), которые были им сформулированы без доказательства и впоследствии доказаны Бозанкет ([9, 10]) и Кноппом ([11]), а из теоремы 8 — соответствующая теорема Бозанкет ([9]) и Пейеримхоффа ([12]).

Если ε_ν — операторы из пространства * M в M, определяемые при помощи обыкновенных функций $\varepsilon_\nu(t)$, ограниченных на сегменте $[a, b]$, равенством $\varepsilon_\nu x = \varepsilon_\nu(t) x(t)$, то при $\alpha = \beta = 0$ из теорем 6 и 7 при помощи (19) получается обобщение классической теоремы Дедекинда и Адамара на случай равномерной сходимости, изученное Огиевецким ([13, 14]). При этом из теоремы 6 следует условие

$$\sum_\nu |\Delta\varepsilon_\nu(t)| = O(1) \quad (t \in [a, b]),$$

вместо которого в ([14]) требуется равномерная сходимость ряда $\sum |\Delta\varepsilon_\nu(t)|$ при $t \in [a, b]$. Причиной этого несогласия является одна неточность в доказательстве Огиевецкого.

Наконец, если ε_ν — операторы из R_1 в M, определяемые равенством $\varepsilon_\nu x = \varepsilon_\nu(t) x$ $(t \in E)$, то при $\alpha = \beta$ (целое число) из теоремы 6 при помощи (19) вытекает одна теорема Обрешкова ([15]). В ([15]) дополнительно предполагается равномерная ограниченность при $t \in E$ сумм рядов

$$\sum_\nu \nu^\gamma |\Delta^{\gamma+1} \varepsilon_\nu(t)| \quad (\gamma = 0, 1, \ldots, \alpha - 1),$$

являющаяся на деле следствием остальных условий теоремы Обрешкова.

Поскольку доказательство теоремы 8, по существу, такое же, как в случае числовых множителей суммируемости, то опустим это доказательство. При доказательстве достаточности условий теорем 6 и 7 ограничимся случаем, когда α целое число **, используя метод Кноппа ([11]).

---

* $M = M_{R_1}$, где R_1 — одномерное эвклидово пространство.

** Если α не является целым числом, то достаточность условий теорем 6 и 7 можно доказать методом Бозанкет ([10]).

Доказательство теоремы 6. Согласно теореме 5, для того, чтобы $\{\varepsilon_\nu\}$ была последовательностью множителей суммируемости типа (C^α, C^β), необходимо и достаточно, чтобы преобразование (2) с *

$$A_{n\nu} = \frac{A_\nu^{\ \alpha}}{A_n^{\ \beta}} \Delta_\nu^{\ \alpha+1} (A^\beta_{n-\nu} \varepsilon_\nu) \tag{24}$$

удовлетворяло условиям 1°—3° теоремы 1.

Из условия 3° теоремы 1 в частности следует, что $\| A_{n\nu} \| = O(1)$, откуда при $\nu = n$ получается необходимость условия 1° теоремы 6, если иметь в виду, что

$$A_n^\alpha \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \ (\alpha \neq -1, -2, \ldots).$$

Далее, из условия 3° теоремы 1 при $n \to \infty$ вытекает

$$\sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{p} A_\nu^{\ \alpha} (\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu) x_\nu \right\| = O(1). \tag{25}$$

Теперь из неравенства

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{p} \nu^\alpha (\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu) x_\nu \right\| \leqslant - \sum_{\nu=0}^{p-1} \left(\Delta \frac{\nu^\alpha}{A_\nu^{\ \alpha}} \right) \left\| \sum_{\mu=0}^{\nu} A_\mu^{\ \alpha} (\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\mu) x_\mu \right\| +$$
$$+ \frac{p^\alpha}{A_p^{\ \alpha}} \left\| \sum_{\mu=0}^{p} A_\mu^{\ \alpha} (\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\mu) x_\mu \right\|,$$

получаемого при помощи преобразования Абеля, следует необходимость условия 2° теоремы 6.

Отметим, что из условия 2° теоремы 6, наоборот, вытекает (25), так что условие 2° теоремы 6 и условие (25) эквивалентны.

Для доказательства достаточности условий теоремы 6 приводим следующее обобщение одной леммы Андерсена.

Лемма 1. *Из условий*

1° $\|\varepsilon_\nu\| = O(1)$,

2° $\left\| \sum_{\nu=0}^{p} A_\nu^{\ \alpha} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu \right\| = O(1) \quad (p = 0, 1, \ldots)$

вытекает

$$\| \Delta^\gamma \varepsilon_\nu \| = O(\nu^{-\gamma}) \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha).$$

Доказательство. Поскольку при $\alpha = 0$ лемма 1 тривиальна, то будем предполагать, что $\alpha > 0$. Покажем, что тогда

$$\lim_{\nu \to \infty} \Delta^\alpha \varepsilon_\nu = 0. \tag{26}$$

Действительно, при $p > q$ мы имеем:

---

* Ср. ([11]).

$$\| \Delta^\alpha \varepsilon_q - \Delta^\alpha \varepsilon_{p+1} \| = \left\| \sum_{\nu=q}^{p} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=q}^{p-1} \left(\Delta_\nu \frac{1}{A_\nu^\alpha} \right) \left\| \sum_{\mu=q}^{\nu} A_\mu^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\mu \right\| + \frac{1}{A_p^\alpha} \left\| \sum_{\mu=q}^{p} A_\mu^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\mu \right\| =$$

$$= o(1) \quad (q \to \infty),$$

вследствие чего существует $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Delta^\alpha \varepsilon_\nu$, причем справедливо равенство (26), так как в противном случае из тождества

$$\Delta^{\alpha-1} \varepsilon_0 - \Delta^{\alpha-1} \varepsilon_{p+1} = \sum_{\nu=0}^{p} \Delta^\alpha \varepsilon_\nu$$

следовала бы неограниченность последовательности $\{\Delta^{\alpha-1} \varepsilon_{p+1}\}$, что, в силу условия 1°, невозможно.

Далее, из тождества

$$A_q^\alpha (\Delta^\alpha \varepsilon_q - \Delta^\alpha \varepsilon_{p+1}) = \sum_{\nu=q}^{p} \frac{A_q^\alpha}{A_\nu^\alpha} A_\nu^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu$$

после применения преобразования Абеля мы находим

$$A_q^\alpha \| \Delta^\alpha \varepsilon_q - \Delta^\alpha \varepsilon_{p+1} \| = O(1),$$

откуда при $p \to \infty$, ввиду (26), вытекает

$$A_q^\alpha \| \Delta^\alpha \varepsilon_q \| = O(1). \tag{27}$$

Но поскольку в силу легко проверяемого тождества

$$\sum_{\nu=0}^{q} A_\nu^{\alpha-1} \Delta^\alpha \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{q} A_\nu^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu + A_q^\alpha \Delta^\alpha \varepsilon_{q+1},$$

то условие 2° леммы 1, а вместе с ним и соотношение (27) имеют место и в том случае, если заменить α через $\alpha - 1$. Повторяя эти рассуждения, мы и доказываем лемму 1.

Покажем теперь, что условия 1°, 2° теоремы 6 обеспечивают выполнение условий теоремы 1. Выполнение условий 1° и 2° теоремы 1 проверить нетрудно. Для изучения условия 3° теоремы 1 перепишем (24) в виде

$$A_{n\nu} = \frac{A_\nu^\alpha}{A_n^\beta} \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\mu} \Delta_\nu^\mu \left(A_{n-\nu}^\beta \right) \cdot \Delta_\nu^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_{\nu+\mu} =$$

$$= \frac{A_\nu^\alpha}{A_n^\beta} \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\mu} A_{n-\nu}^{\beta-\mu} \Delta^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_{\nu+\mu}$$

и оценим отдельно норму каждого выражения

$$T_\mu = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{\beta-\mu}}{A_n^\beta} \Delta^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_{\nu+\mu} x_\nu \quad (\mu = 0, 1, \ldots, \alpha+1) \tag{28}$$

при $\| x_\nu \| \leqslant 1$.

1) Если $\mu=0$, то при помощи преобразования Абеля, ввиду условия 2° теоремы 6, мы находим

$$\| T_0 \| = O(1).$$

2) Если $1 \leqslant \mu \leqslant \beta+1$, то $0 \leqslant \alpha+1-\mu \leqslant \alpha$ и, согласно лемме 1,

$$\| \Delta^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_{\nu+\mu} \| \leqslant M (\nu+\mu)^{\mu-\alpha-1},$$

где M — постоянная. Так как, в силу $\beta-\mu \geqslant -1$, имеем $A_{n-\nu}^{\beta-\mu} \geqslant 0$, то

$$\| T_\mu \| \leqslant M \sum_{\nu=0}^{p} \frac{A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{\beta-\mu}}{A_n^\beta} (\nu+\mu)^{\mu-\alpha-1} = O(1).$$

3) Если $\beta+1 < \mu \leqslant \alpha+1$, то из условия 1° теоремы 6 следует

$$\| \Delta^{\alpha+1-\mu} \varepsilon_{\nu+\mu} \| = O((\nu+\mu)^{\beta-\alpha}),$$

вследствие чего существует такая постоянная N, что

$$\| T_\mu \| \leqslant N \sum_{\nu=0}^{p} | A_{n-\nu}^{\beta-\mu} | = O(1).$$

Поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{p} A_{n\nu} x_\nu = \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\mu} T_\mu,$$

то этим завершается доказательство теоремы 6.

Доказательство теоремы 7. Для того, чтобы $\{\varepsilon_\nu\}$ была последовательностью множителей суммируемости типа (C_0^α, C^β), необходимо и достаточно, чтобы преобразование (2), где операторы $A_{n\nu}$ даются формулой (24), удовлетворяло условиям 1° и 2° теоремы 2. Действительно, так как

$$A_{n\nu} - A_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} \left(\frac{A_{n-k}^\beta}{A_n^\beta} - 1 \right) \varepsilon_k,$$

где ряд в правой части равенства, в силу $\| \varepsilon_k \| = O(1)$, сходится по норме равномерно относительно n, то

$$\lim_{n\to\infty} \| A_{n\nu} - A_\nu \| = 0.$$

Из условия 2° теоремы 2, в частности, следует $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_{nn} \| = 0$, откуда вытекает необходимость условия 1° теоремы 7. Необходимость же условия 2° теоремы 7 получается из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{\nu} A_\nu x_\nu$ при $\| x_\nu \| \leqslant 1$.

Для доказательства достаточности условий теоремы 7 приводим следующую лемму, доказательство которой получается из доказательства леммы 1 при замене $O(1)$ через $o(1)$.

Лемма 2. *Из условий*

1° $\|\varepsilon_\nu\| = O(1)$,

2° $\sum_\nu A_\nu^\alpha \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_\nu$ *сходится по норме,*

вытекает

$$\|\Delta^\gamma \varepsilon_\nu\| = o(\nu^{-\gamma}) \quad (0 < \gamma \leqslant \alpha).$$

Мы имеем:

$$\sum_{\nu=0}^{p} (A_{n\nu} - A_\nu)\, x_\nu = \bar{T}_0 + \sum_{\mu=1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\mu} T_\mu,$$

где

$$\bar{T}_0 = \sum_{\nu=0}^{p} \left(\frac{A_{n-\nu}^{\beta}}{A_n^{\beta}} - 1 \right) A_\nu^\alpha (\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_\nu)\, x_\nu,$$

а T_μ определяется формулой (28). При помощи преобразования Абеля нетрудно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \bar{T}_0 \right\| = 0.$$

Так же, как при доказательстве достаточности условий теоремы 6, можно, используя лемму 2 и условие 1° теоремы 7, показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| T_\mu \right\| = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha + 1).$$

Этим доказано выполнение условия 2° теоремы 2. Поскольку условие 1° теоремы 2 автоматически выполнено, то теорема 7 доказана.

В случае $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ достаточность условий теорем 6 и 7 вытекает из включения $C^\beta \supset C^\alpha$. Необходимость условий 2° теорем 6 и 7 уже доказана нами. Необходимость же условия 1° теоремы 6 (7), т. е. необходимость условия $\|\varepsilon_\nu\| = O(1)$ ($\|\varepsilon_\nu\| = o(1)$) следует из включения $^*C^\alpha \supset C^0 (C_O{}^\alpha \supset C_O{}^0)$, вследствие чего $\{\varepsilon_\nu\}$ должна быть также последовательностью множителей суммируемости типа (C^0, C^β) $\big((C_O{}^0, C^\beta)\big)$.

§ 3. Об умножении абстрактных рядов

Под произведением (в смысле Коши) ряда $\sum \varepsilon_\nu$ на ряд $\sum x_\nu$, где $x_\nu \in X$, $\varepsilon_\nu \in (X \to Y)$, подразумевается ряд $\sum y_n$, где

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{n-\nu} x_\nu. \tag{29}$$

Будем называть $\sum \varepsilon_\nu$ рядом типа (A, B) $\big((A_O, B), (|A|, B)\big)$, если при каждом A-суммируемом (A-ограниченном, $|A|$-суммируемом) ряде $\sum x_\nu$

* C^0 представляет собой метод обыкновенной сходимости.

ряд $\sum y_n$ является B-суммируемым. Аналогично определяется ряд типа $(|A|, |B|)$. Нетрудно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 9. *Если $A=(a_{n\nu})$ нормальна и $B=(\beta_{n\nu})$ треугольна, то для того, чтобы $\sum \varepsilon_\nu$ был рядом типа* (A, B) $((A_O, B), (|A|, B), (|A|, |B|))$, *необходимо и достаточно, чтобы преобразование* (2) *с треугольной матрицей* $(A_{n\nu})$, *где*

$$A_{n\nu}=\sum_{\mu=\nu}^{n}\bar{\beta}_{n\mu}\sum_{k=0}^{\mu-\nu}\bar{a}_{\mu-k,\nu}\,\varepsilon_k, \tag{30}$$

обладало свойством $c_X\to c_Y$ $(m_X\to c_Y,\ l_X\to c_Y,\ l_X\to l_Y)$. *При этом* $\bar{a}_{\mu\nu}$ *и* $\bar{\beta}_{n\mu}$ *имеют такое же значение, как в теореме 5.*

Пусть P, Q, R, S — методы суммирования Вороного-Нёрлунда, определяемые соответственно последовательностями $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$, $\{S_n\}$, где P_n и Q_n произвольно заданы, а

$$R_n=\sum_{\nu=0}^{n}P_{n-\nu}Q_\nu,\quad S_n=\sum_{\nu=0}^{n}P_{n-\nu}q_\nu\quad (q_\nu=\Delta Q_\nu),$$

причем $P_n\neq 0$, $Q_n\neq 0$, $R_n\neq 0$, $S_n\neq 0$. В качестве применения теоремы 9 приводим следующие теоремы, которые в случае числовых рядов доказала Мэарс ([16, 17]). При этом предполагается, что пространство операторов $(X\to Y)$ не вырождено в нульоператор.

Теорема 10. *Произведение рядов $\sum\varepsilon_\nu$ и $\sum x_\nu$ является R-суммируемым для каждого P-суммируемого ряда $\sum x_\nu$ и Q-суммируемого везде ряда $\sum\varepsilon_\nu$ тогда и только тогда, когда $R\supset P$, $R\supset Q$.*

Теорема 11. *Произведение рядов $\sum\varepsilon_\nu$ и $\sum x_\nu$ является S-суммируемым для каждого $|P|$-суммируемого ряда $\sum x_\nu$ и Q-суммируемого везде ряда $\sum\varepsilon_\nu$ тогда и только тогда, когда $S\supset|P|$, $S\supset Q$.*

Теорема 12. *Произведение рядов $\sum\varepsilon_\nu$ и $\sum x_\nu$ является $|S|$-суммируемым для каждого $|P|$-суммируемого ряда $\sum x_\nu$ и $|Q|$-суммируемого везде ряда $\sum\varepsilon_\nu$ тогда и только тогда, когда $|S|\supset|P|$, $|S|\supset|Q|$.*

Ограничимся доказательством теоремы 12, поскольку доказательства теорем 10 и 11 в основном аналогичны. Отметим лишь, что при доказательстве теорем 10 и 11 роль формулы (35) играют соответственно формулы

$$A_{n\nu}=\frac{P_\nu Q_{n-\nu}}{R_n}\varepsilon'_{n-\nu},\qquad A_{n\nu}=\sum_{k=0}^{n}\frac{S_{n-k}}{S_n}\varepsilon_k-\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{P_k}{S_n}\Delta_k(Q_{n-k}\varepsilon'_{n-k}).$$

Доказательство теоремы 12. Для доказательства необходимости условия $|S| \supset |P|$ рассмотрим ряд $\sum \varepsilon_\nu^0$ из $(X \to Y)$, где $\varepsilon_\nu^0 = 0$ при $\nu > 0$, $\varepsilon_0^0 = \varepsilon \neq 0$. Так как $\sum \varepsilon_\nu^0 \sum x_\nu = \sum \varepsilon x_\nu$, а $\sum \varepsilon_\nu^0$ $|Q|$-суммируем везде, то для справедливости утверждения теоремы 12 необходимо, чтобы $\{\varepsilon\}$ служила последовательностью множителей суммируемости типа $(|P|, |S|)$. Согласно теореме 5, для этого необходимо, чтобы преобразование (2) с треугольной матрицей $A_{n\nu}$, где $A_{n\nu} = a_{n\nu}\varepsilon$ с

$$a_{n\nu} = \bar{\Delta}_n \sum_{k=\nu}^{n} \frac{q_{n-k} P_k}{S_n}, \tag{31}$$

удовлетворяло условию теоремы 4, вследствие чего

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1) \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{32}$$

т. е. $|S| \supset |P|$.

Рассматривая, далее, ряд $\sum x_\nu^0$ из X, где $x_\nu^0 = 0$ при $\nu > 0$, $x_0^0 = x \neq 0$, аналогично предыдущему заключаем, что для справедливости утверждения теоремы 12 необходимо, чтобы последовательность операторов $\{U_x\}$ из пространства $(X \to Y)$ в Y, где $U_x\varepsilon = \varepsilon x$, служила последовательностью множителей суммируемости типа $(|Q|, |S|)$. Для этого необходимо, чтобы

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |b_{n\nu}| = O(1) \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{33}$$

где

$$b_{n\nu} = \bar{\Delta}_n \sum_{k=\nu}^{n} \frac{p_{n-k} Q_k}{S_n} \quad (p_\nu = \bar{\Delta} P_\nu), \tag{34}$$

т. е. чтобы $|S| \supset |Q|$.

Предположим, наоборот, что $|S| \supset |P|$, $|S| \supset |Q|$ и покажем, что тогда каждый везде $|Q|$-суммируемый ряд $\sum \varepsilon_\nu$ является рядом типа $(|P|, |S|)$.

Формула (30) при $A = P$, $B = S$ дает:

$$A_{n\nu} = \bar{\Delta}_n \sum_{k=\nu}^{n} \frac{P_k}{S_n} \sum_{\mu=0}^{n-k} q_{n-k-\mu} \varepsilon_\mu$$

или

$$A_{n\nu} = \bar{\Delta}_n \sum_{k=0}^{n-\nu} \sum_{\mu=\nu}^{n-k} \frac{p_\mu^* Q_{n-\mu}}{S_n} \bar{\Delta} \varepsilon_k',$$

где

$$\varepsilon_k' = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{Q_{k-\nu}}{Q_k} \varepsilon_\nu, \quad p_\mu^* = \begin{cases} p_\mu \text{ при } \mu > \nu \\ P_\nu \text{ при } \mu = \nu. \end{cases}$$

Но поскольку

$$\sum_{\mu=\nu}^{n-k} p_\mu^* Q_{n-\mu} = \sum_{\mu=0}^{n-k} p_\mu Q_{n-\mu} - \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu (Q_{n-\mu} - Q_{n-\nu}) =$$

$$= \sum_{\mu=k}^{n} p_{n-\mu} Q_\mu + \sum_{\mu=\nu}^{n} q_{n-\mu} P_\mu - S_n,$$

то, в силу (31) и (34), мы находим

$$A_{n\nu} = \sum_{k=0}^{n-\nu-1} (a_{n\nu} + b_{nk}) \bar{\Delta} \varepsilon_k' + \frac{P_\nu Q_{n-\nu}}{S_n} \bar{\Delta}_n \varepsilon'_{n-\nu} \tag{35}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \| A_{n\nu} x \| \leqslant \sum_k \| \bar{\Delta} \varepsilon_k' x \| \sum_{n=k+\nu+1}^{\infty} (|a_{n\nu}| + |b_{nk}|) +$$

$$+ \sum_{n=\nu}^{\infty} \left| \frac{P_\nu Q_{n-\nu}}{S_n} \right| \| \bar{\Delta}_n \varepsilon'_{n-\nu} x \|.$$

В силу (32) и (33) отсюда следует выполнение условия теоремы 4, если иметь в виду соотношения

$$|P_\nu Q_{n-\nu}| = O(S_n) \quad (\nu \leqslant n;\ n = 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_k \| \bar{\Delta} \varepsilon_k' x \| \leqslant M \| x \| \quad (x \in X),$$

первое из которых следует из (31)—(34), а второе — из теоремы Бозанкет и Кэстелмана ([7]), поскольку ряд $\Sigma \varepsilon_\nu$ $|Q|$-суммируем везде. Тем самым теорема 12 полностью доказана.

Примечание 3. Пусть $x' = P\{\Sigma x_\nu\}$, $\varepsilon' = Q\{\Sigma \varepsilon_\nu\}$, а $y' = R\{\Sigma y_n\}$ в случае теоремы 10 и $y' = S\{\Sigma y_n\}$ в случае теорем 11 и 12, где y_n определяется равенством (29). При помощи формул (3)—(5) нетрудно показать, что в условиях теорем 10—12 соотношение $y' = \varepsilon' x'$ справедливо тогда и только тогда, когда соответствующие включения имеют место в узком смысле, т. е. вместе с совпадением сумм, получаемых обоими методами суммирования.

Примечание 4. Условия теорем 10—12 не зависят от пространств X и Y. Если же искать необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\Sigma \varepsilon_\nu$ служил рядом типа (P, R) $((|P|, S), (|P|, |S|))$, то соответствующие условия будут зависеть от X и Y. Например, известно, что если $X = Y = R_1$, то числовой ряд $\Sigma \varepsilon_\nu$ представляет собой ряд типа (C°, C°) тогда и только тогда, когда $\Sigma \varepsilon_\nu$ сходится абсолютно. Нетрудно показать, что в случае любых X, Y ряд $\Sigma \varepsilon_\nu$ является рядом типа (C°, C°) тогда и только тогда, когда

1° $\Sigma \varepsilon_\nu$ сходится везде в X,

2° $\sup\limits_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon_\nu x_\nu \right\| = O(1) \quad (p = 0, 1, \ldots).$

Но из условий 1°, 2° не вытекает, вообще говоря, абсолютная сходимость везде ряда $\Sigma\varepsilon_\nu$.

Действительно, если $X = Y = c_0$, где c_0 — пространство всех числовых нульпоследовательностей $x = \{\xi_\nu\}$ с нормой $\| x \| = \sup\limits_\nu |\xi_\nu|$, а

$$\varepsilon_\nu x = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{\nu \text{ нулей}}, \xi_\nu, 0, \ldots\},$$

то условия 1°, 2° выполнены, а ряд $\Sigma \| \varepsilon_\nu x \| = \Sigma | \xi_\nu |$, однако, при всех $x \epsilon X$ не сходится.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
4 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, J. reine und angew. Math., **151**, 1921, 79—111.
2. H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatsh. Math. und Phys., **32**, 1922, 3—88.
3. K. Knopp, G. Lorentz, Beiträge zur absoluten Limitierung, Arch. Math., **2**, 1949, 10—16.
4. H. Melvin-Melvin, On generalized K-transformations in Banach spaces, Proc. London Math. Soc., 2, **53**, 1951, 83—108.
5. K. Zeller, Verallgemeinerte Matrixtransformationen, Math. Z., **56**, 1952, 18—20.
6. A. Robinson, On functional transformations and summability, Proc. London Math. Soc., 2, **52**, 1950, 132—160.
7. L. S. Bosanquet, H. Kestelman, The absolute convergence of series of integrals, Proc. London Math. Soc., 2, **45**, 1939, 88—97.
8. Б. З. Вулих, О линейных методах суммирования в абстрактных пространствах, Зап. Харьк. мат. т-ва, 4, **15**, 1938, 65—70.
9. L. S. Bosanquet, Note on convergence and summability factors, J. London Math. Soc., **20**, 1945, 39—48.
10. L. S. Bosanquet, Note on convergence and summability factors, III, Proc. London Math. Soc., 2, **50**, 1949, 482—496.
11. K. Knopp, Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes, J. reine und angew. Math., **187**, 1950, 70—74.
12. A. Peyerimhoff, Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen, Math. Z., **59**, 1954, 417—424.
13. И. Е. Огиевецкий, О признаке Дирихле для равномерной сходимости, Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, 1941, 441—444.
14. И. Е. Огиевецкий, Обобщение теоремы Hadamard'a о сходимости рядов, ДАН СССР, **31**, 1941, 206—207.
15. N. Obrechkoff, Sur la sommation uniforme par les moyennes arithmétiques des séries, Ann. Univ. Sofia, **1**, 1944, 139—172.
16. F. M. Mears, Some multiplication theorems for the Nörlund mean, Bull. Amer. Math. Soc., **41**, 1935, 875—880.
17. F. M. Mears, Absolute regularity and the Nörlund mean. Ann. Math., 2, **38**, 1937, 594—601.

JADADE MAATRIKSTEISENDUSTEST BANACHI RUUMIDES

G. KANGRO
füüsika-matemaatikateaduste doktor

Resümee

Olgu $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ teatavad hulgad jadadest, mille elemendid kuuluvad vastavalt Banachi ruumidesse X, Y, ja $A_{n\nu}$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$ — tõkestatud lineaarsed operaatorid ruumist X ruumi Y. Me ütleme, et jadateisendusel

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

on omadus $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, kui (2) kujutab iga jada $\{x_\nu\} \in \mathfrak{X}$ jadaks $\{y_n\} \in \mathfrak{Y}$. Siinjuures eeldatakse ridade $\sum_{\nu} A_{n\nu} x_\nu$ $(n = 0, 1, \ldots)$ koonduvust iga jada $\{x_\nu\} \in \mathfrak{X}$ puhul.

Märgime sümboliga $c_X (m_X)$ kõigi ruumis X koonduvate (tõkestatud) jadade hulga ja sümboliga l_X kõigi nende jadade $\{x_\nu\} \subset X$ hulga, kus $\sum \|x_\nu\| < \infty$. Melvin-Melvin ([4]) ja Zeller ([5]) andsid tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et teisendusel (2) oleks omadus $c_X \to c_Y$.

Paragrahvis 1 tuletatakse tarvilikud ja piisavad tingimused omadustele $m_X \to c_Y$, $l_X \to c_Y$ ja $l_X \to l_Y$. Saadud tingimusi (aga samuti Melvin-Melvini ja Zelleri tingimusi) rakendatakse abstraktsetele summeeruvusteguritele Cesàro menetluse puhul (§ 2) ja Voronoi-Nörlundi menetlusega summeeruvate abstraktsete ridade korrutisreale (§ 3).

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
4. VI 1956

ÜBER MATRIXTRANSFORMATIONEN VON FOLGEN IN BANACHSCHEN RÄUMEN

G. KANGRO

Zusammenfassung

Es seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ gewisse Mengen von Folgen, deren Elemente dem Banachschen Raum X, beziehungsweise Y angehören, und $A_{n\nu}$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$ — beschränkte lineare Operatoren, die X in Y abbilden. Man sagt, dass die Folgentransformation

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

die Eigenschaft $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ besitze, wenn (2) jede Folge $\{x_\nu\} \in \mathfrak{X}$ in eine Folge $\{y_n\} \in \mathfrak{Y}$ überführt. Dabei wird die Konvergenz der Reihen $\sum_{\nu} A_{n\nu} x_\nu$ $(n = 0, 1, \ldots)$ für jede Folge $\{x_\nu\} \in \mathfrak{X}$ vorausgesetzt.

Bezeichnen wir mit $c_X(m_X)$ die Menge aller konvergenten (beschränkten) Folgen in X und mit l_X die Menge von Folgen $\{x_\nu\} \subset X$, bei denen $\sum \|x_\nu\| < \infty$. Melvin-Melvin ([4]) und Zeller ([5]) haben notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, die (2) erfüllen muss, damit sie die Eigenschaft $c_X \to c_Y$ besitze.

In §. 1 sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eigenschaften $m_X \to c_Y$, $l_X \to c_Y$ und $l_X \to l_Y$ abgeleitet. Die erhaltenen Bedingungen nebst den Bedingungen von Melvin-Melvin und Zeller finden Anwendungen auf abstrakte Summierbarkeitsfaktoren in bezug auf das Cesàro-Verfahren (§ 2) und auf die Produktreihe von Voronoi-Nörlund-summierbaren abstrakten Reihen (§ 3).

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen
am 4. Juni 1956