EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. IX KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1960, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ IX
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1960, № 1

О ПРОЕКЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОЦЕНТРИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

З. РИЙВЕС

Теорема Польке-Шварца констатирует, что любой полный четырехугольник можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра произвольно выбранной формы. При реконструкции оригинала по данному чертежу можно произвольно выбрать пять параметров для того, чтобы получить вполне определенной формы тетраэдр.

Н. Ф. Четверухиным [1] доказана вторая теорема существования. Полный четырехугольник и отрезок, соединяющий одну из его вершин с любой точкой, лежащей внутри треугольника, образованного тремя остальными вершинами, можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, имеющего прямоугольный трехгранный угол, и его высоты, опущенной из вершины упомянутого угла на противолежащую грань.

Возникает вопрос, какие условия можно еще накладывать на тетраэдр, чтобы изображение оставалось правильным и являлось в то же время метрически определенным.

Рассмотрим ортоцентрический тетраэдр, т. е. такой тетраэдр, у которого все высоты пересекаются в одной точке, так называемом ортоцентре тетраэдра.

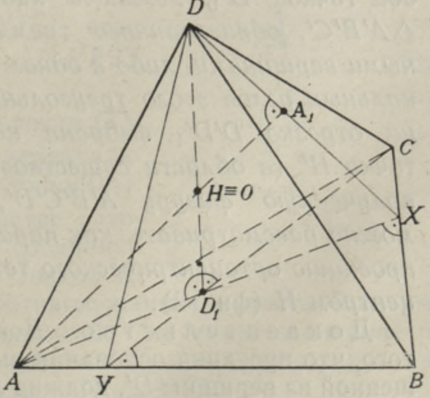
Из элементарной геометрии [2] известно, что основанием высоты ортоцентрического тетраэдра на противолежащей грани является ее ортоцентр, т. е. точка пересечения высот противолежащей грани.

Известно [3], что для того, чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы две пары его противоположных ребер были бы взаимно перпендикулярны.

На основании этой теоремы можно доказать

Лемму 1. *Тетраэдр является ортоцентрическим, если его четвертая вершина находится на перпендикуляре, восстановленном в ортоцентре треугольника, образованного остальными тремя вершинами* (фиг. 1).

Доказательство. Пусть нам дан тетраэдр $ABCD$, у которого вершина D находится на перпендикуляре, восстановленном в ортоцентре D_1 треугольника ABC.



Фиг. 1.

Рассмотрим $\triangle AXD : DD_1 \subset {}'AXD$.

$CB \subset \triangle ABC$, но $DD_1 \perp \triangle ABC$, значит, $DD_1 \perp CB$. По предположению $AX \perp CB$. Следовательно, $\triangle AXD$ находится в плоскости, определяемой двумя перпендикулярными прямыми к прямой CB, значит, $\triangle AXD \perp CB$. Итак, любая прямая, лежащая в этой плоскости, перпендикулярна прямой BC. Следовательно, $AD \perp CB$.

Также можно доказать, что $AB \perp DC$, если рассмотреть расположение $\triangle DCY$ относительно ребра AB.

Итак, лемма доказана, так как выполняется необходимое и достаточное условие для того, чтобы тетраэдр был ортоцентрическим.

Далее можно доказать

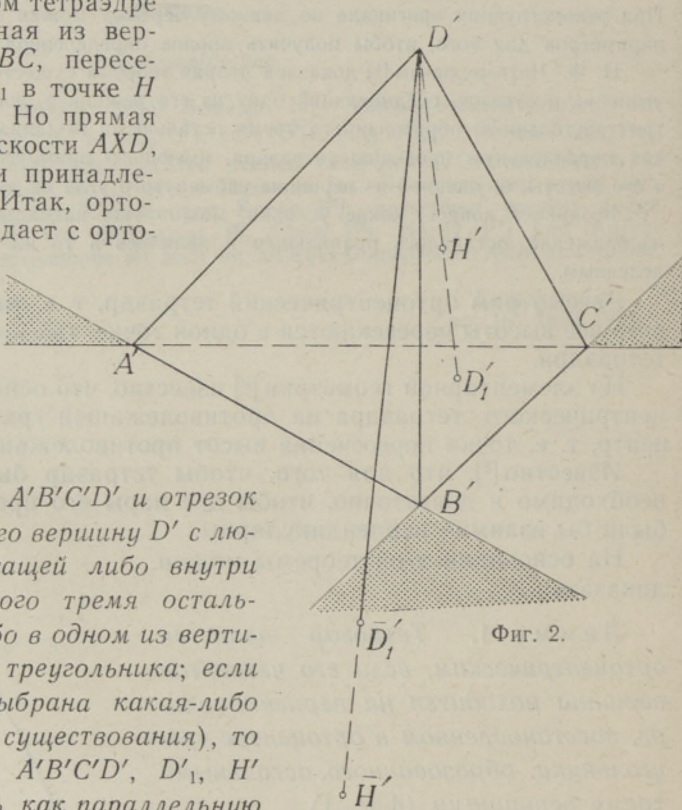
Л е м м у 2. *Ортоцентром сечения ортоцентрического тетраэдра плоскостью, проходящей через одно ребро и высоту тетраэдра, опущенную из какого-нибудь одного конца этого ребра, является ортоцентр данного тетраэдра* (фиг. 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, например, $\triangle AXD$, получающийся при сечении тетраэдра плоскостью, проходящей через высоту DD_1 и ребро AD. Очевидно, $DD_1 \perp AX$, так как $AX \subset \triangle ABC$, а $\triangle ABC \perp DD_1$ по предположению.

В ортоцентрическом тетраэдре высота AA_1, опущенная из вершины A на грань DBC, пересекается с высотой DD_1 в точке H и, значит, $AH \perp DX$. Но прямая AH принадлежит плоскости AXD, так как две ее точки принадлежат этой плоскости. Итак, ортоцентр O $\triangle AXD$ совпадает с ортоцентром тетраэдра H, что и требовалось доказать.

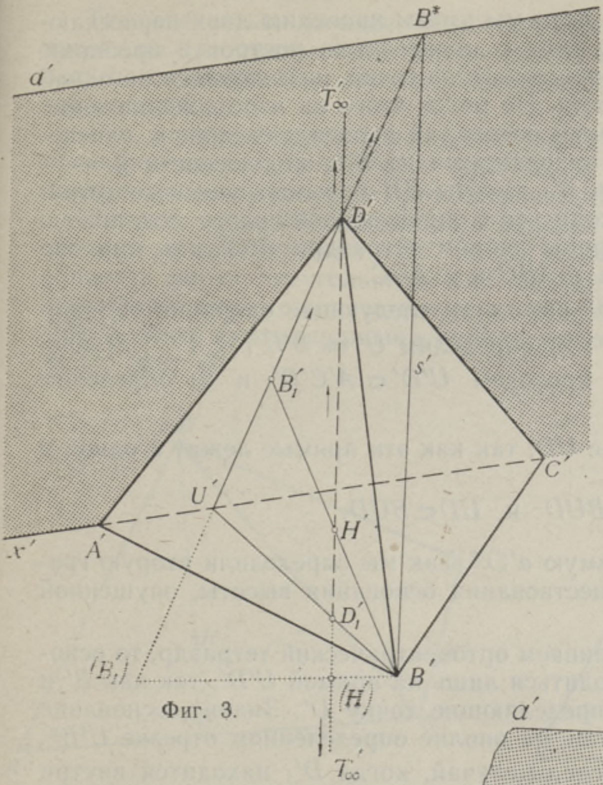
Докажем теперь следующую т е о р е м у:

Пусть даны полный четырехугольник $A'B'C'D'$ и отрезок $D'D'_1$, соединяющий его вершину D' с любой точкой D'_1, лежащей либо внутри $\triangle A'B'C'$, образованного тремя остальными вершинами, либо в одном из вертикальных углов этого треугольника; если на отрезке $D'D'_1$ выбрана какая-либо точка H' (в области существования), то полученную фигуру $A'B'C'D'$, D'_1, H' можно рассматривать как параллельную проекцию ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ и его высоты DD_1 с ортоцентром H (фиг. 2).



Фиг. 2.

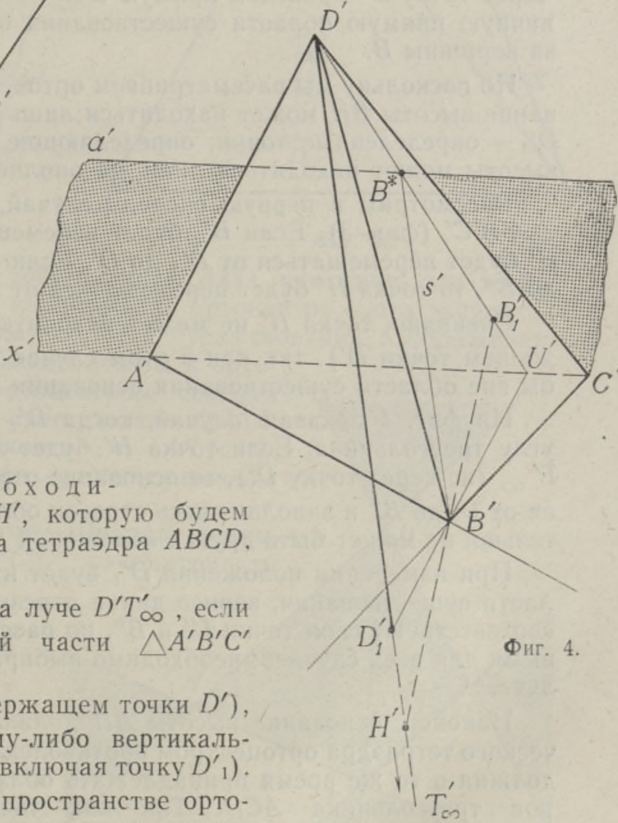
Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, во-первых, н е о б х о д и м о с т ь того, что проекция основания высоты ортоцентрического тетраэдра, опущенной из вершины D', должна лежать либо внутри треугольника $A'B'C'$, либо в одном из его вертикальных углов (фиг. 2, закрашенная часть).



Фиг. 3.

Предположим, что мы имеем параллельную проекцию ортоцентрического тетраэдра и высоты DD_1, опущенной из вершины D.

Как известно из свойств ортоцентрического тетраэдра, его высота, опущенная из вершины на противоположную грань, имеет своим основанием ортоцентр этой грани. Значит, точка D'_1 должна находиться в области существования проекции ортоцентра треугольника ABC. Н. Ф. Четверухиным [4] доказано, что областью существования проекции ортоцентра треугольника является вся внутренняя часть треугольника и внутренняя часть его вертикальных углов. Следовательно, точка D'_1 может находиться лишь внутри $\triangle A'B'C'$ или внутри его вертикальных углов.



Фиг. 4.

Во-вторых, докажем необходимость условия, что точка H', которую будем считать проекцией ортоцентра тетраэдра $ABCD$, должна находиться:

1) на отрезке D'_1D' или на луче $D'T'_\infty$, если D'_1 принадлежит внутренней части $\triangle A'B'C'$ (фиг. 3), и

2) на луче $D'_1T'_\infty$ (не содержащем точки D'), если D'_1 принадлежит какому-либо вертикальному углу $\triangle A'B'C'$ (фиг. 4, не включая точку D'_1).

Если точка H является в пространстве ортоцентром тетраэдра $ABCD$, то прямые, соединяющие остальные вершины тетраэдра с точкой H, должны быть перпендикулярны к противолежащим граням. Возьмем, например, высоту, опущенную из вершины B. Она имеет основание на грани ADC. Проекцию основания B'_1 высоты BB_1 можно построить, так как наше изображение является полным. $BB_1 \perp ADC$.

В работе [4] доказано, что если мы имеем проекцию двух пересекающихся плоскостей α и β, то можно произвольно построить проекцию основания перпендикуляра, опущенного из точки, находящейся на одной плоскости α, к другой плоскости. Но после этого на изображении определяется область существования оснований перпендикуляров к плоскости α, опущенных из точек, находящихся на второй плоскости β.

Итак, проекция основания B'_1 высоты BH ортоцентрического тетраэдра (фиг. 3 и 4) должна находиться в определенной полосе. Эта полоса ограничивается с одной стороны ребром тетраэдра $A'C'$, так как оно является линией пересечения $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$.

Для определения точки B^* выполним следующие операции: 1) проведем прямую $B'D'_1 \subset A'B'C'$; 2) определим $U' \equiv B'D'_1 \times A'C'$; 3) проведем $s' \| D'D'_1$, $B' \subset s'$; 4) проведем $U'D' \subset A'C'D'$ и 5) определим $B^* \equiv s' \times U'D'$.

Очевидно, s пересекается с UD, так как эти прямые лежат в одной и той же плоскости

$$s \subset BUD \quad \text{и} \quad UD \subset BUD.$$

Через точку B^* проведем прямую $a' \| x'$. Так мы определили вторую граничную прямую области существования основания высоты, опущенной из вершины B.

Но поскольку мы рассматриваем ортоцентрический тетраэдр, то основание высоты BH может находиться лишь на прямой $U'D'$, так как B' и D'_1 — определенные точки, определяющие точку U'. Значит, основание высоты может находиться лишь на вполне определенном отрезке $U'B^*$.

Рассмотрим в первую очередь случай, когда D'_1 находится внутри $\triangle A'B'C'$ (фиг. 3). Если B'_1 будет перемещаться от U' в сторону D', то H' будет перемещаться от D'_1 до D'. Если B'_1 будет перемещаться от D' до B^*, то точка H' будет перемещаться от D' до T'_∞.

Очевидно, точка H' не может находиться на луче $D'_1T'_\infty$ (не содержащем точки D'), так как в этом случае основание отрезка $B'H'$ было бы вне области существования основания перпендикуляров.

На фиг. 4 показан случай, когда D'_1 принадлежит вертикальному углу треугольника. Если точка H' будет здесь перемещаться от D'_1 до T'_∞ (не через точку D'), то основание отрезка $B'B'_1$ будет перемещаться от U' до B^* и заполнит весь отрезок области существования, следовательно, не может быть других положений H'.

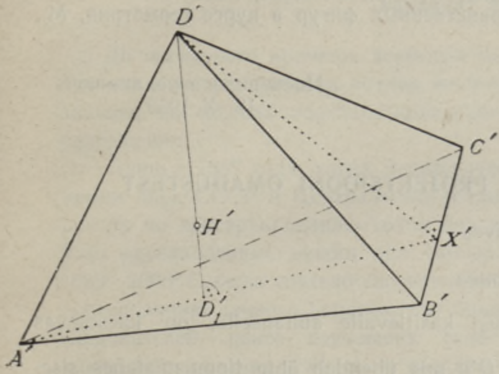
При изменении положения D'_1 будет изменяться ширина полосы области существования, вернее длина отрезка $U'B^*$, так как каждому D'_1 соответствуют свои точки U' и B^*, но рассуждения остаются справедливыми для всех случаев: необходимо выбирать точку H' на определенном луче.

Наконец, основание высоты BH должно быть в случае ортоцентрического тетраэдра ортоцентром противолежащей грани. Значит, точка B'_1 должна в то же время принадлежать области существования ортоцентров треугольника ACD. Так как точка D'_1 лежит в области существования проекций ортоцентров $\triangle ABC$, то $U' \equiv B'D'_1 \times A'C'$ лежит внутри отрезка AC, следовательно, и прямая $U'D'$ будет всегда находиться в области существования проекций ортоцентров $\triangle ACD$. Но поскольку точка $B'_1 \subset U'D'$, то она принадлежит области существования проекций ортоцентров $\triangle ACD$. Все эти рассуждения можно повторить и относительно проекций остальных высот тетраэдра.

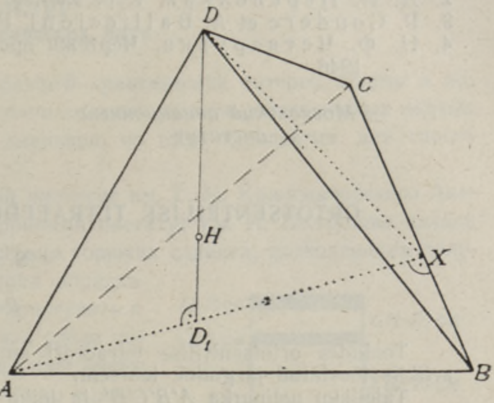
Так полностью доказана необходимость условия, что точку H', как проекцию ортоцентра ортоцентрического тетраэдра, необходимо выбирать на определенном отрезке, в зависимости от выбора основания первой высоты.

Для доказательства д о с т а т о ч н о с т и этого условия рассмотрим проекцию тетраэдра $A'B'C'D'$ (фиг. 5) и покажем, что ее можно рассматривать как проекцию ортоцентрического тетраэдра.

Так как точка D'_1 находится в области существования изображений ортоцентра треугольника ABC, то мы можем единственным образом определить форму треугольника ABC по данному чертежу, применяя для этого родственное соответствие, как это показано Н. Ф. Четверухиным [4]. После этого восстанавливаем перпендикуляр n к плоскости ABC в точке D_1 (фиг. 5).



Фиг. 5а.

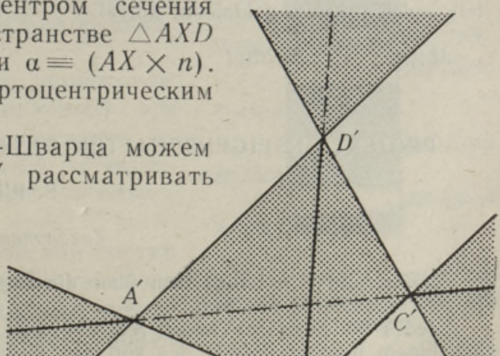


Фиг. 5б.

Далее определяем форму треугольника AXD, учитывая, что точку H' можем рассматривать как изображение ортоцентра этого треугольника, так как она принадлежит области существования изображений ортоцентра $\triangle AXD$, и на основании леммы 2 ортоцентр тетраэдра является ортоцентром сечения AXD. Так можем построить в пространстве $\triangle AXD$ на данном отрезке AX в плоскости $\alpha \equiv (AX \times n)$. Построенный тетраэдр является ортоцентрическим (лемма 1).

На основании теоремы Польке-Шварца можем полный четырехугольник $A'B'C'D'$ рассматривать как проекцию данного тетраэдра. Но при этом точке D_1 будет соответствовать точка D'_1 и точке H точка H', так как отношения в параллельной проекции не меняются.

Итак, необходимость и достаточность условий теоремы доказаны.



Фиг. 6.

С л е д с т в и е 1. Из доказанной теоремы следует, что областью существования проекций ортоцентра ортоцентрического тетраэдра является внутренняя область проекции этого тетраэдра и проекций его вертикальных трехгранных углов (фиг. 6).

Следствие 2. Поскольку в ортоцентрическом тетраэдре центр описанной сферы и ортоцентр симметричны относительно центра тяжести [2], то область существования проекций центра описанной сферы данного тетраэдра $ABCD$ может быть найдена как область $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, расположенная симметрично области существования проекций ортоцентра относительно проекции центра тяжести. Заметим, что проекция центра тяжести (точка T') определяется данной проекцией тетраэдра $A'B'C'D'$ единственным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы современной начертательной геометрии, Под ред. проф. Н. Ф. Четверухина, М.—Л., 1947.
2. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. II, М., 1949.
3. P. Couderc et A. Balliccioni, Premier livre du tétraèdre, Paris, 1935.
4. Н. Ф. Четверухин, Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, М., 1946.

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию 12. X 1959

ORTOTSENTRILISE TETRAEEDRI PROJEKTSIOONI OMADUSTEST

S. Riives

Resümee

Toetudes ortotsentrilise tetraeedri omadusi käsitlevaile abilauseile, on käesolevas artiklis tõestatud järgmine teoreem:

Täielikku nelinurka $A'B'C'D'$ ja lõiku $D'D'_1$, mis ühendab ühte tippu mistahes sisemise punktiga ülejäänud kolme tipuga määratud kolmnurgas või punktiga, mis asetseb selle kolmnurga sisenurkade tippnurkades, ning punkti H' sellel sirgel võime vaadelda ortotsentrilise tetraeedri $ABCD$, tema kõrguse DD_1 ning antud tetraeedri ortotsentri H paralleelprojektsioonina (joon. 2).

Silmas pidades tõestatud teoreemi saab määrata: 1) ortotsentrilise tetraeedri ortotsentri projektsiooni olemasolupiirkonda tetraeedri antud projektsiooni korral, 2) ortotsentrilise tetraeedri ümberjoonestatud kera tsentri O projektsiooni olemasolupiirkonda tetraeedri antud projektsiooni korral.

Moskva Avioinstituut

Saabus toimetusse 12. X 1959

PROJEKTIONSEIGENSCHAFTEN DES ORTHOZENTRISCHEN TETRAEDERS

S. Riives

Zusammenfassung

Auf Grund von Hilfssätzen über die Eigenschaften des orthozentrischen Tetraeders beweist der Autor den Satz:

Jedes vollständige Viereck $A'B'C'D'$ und die Strecke $D'D'_1$, die einen Scheitel mit beliebigem inneren Punkte des von den übrigen drei Punkten gebildeten Dreiecks oder mit dem einer der Scheitelecken der inneren Ecken dieses Dreiecks gehörenden Punkte verbindet, und den der Geraden $D'D'_1$ gehörenden Punkt H' kann man als Parallelprojektion des orthozentrischen Tetraeders $ABCD$, seiner Höhe DD_1 und des Orthozenters H behandeln (Zeichn. 2).

Auf Grund des bewiesenen Satzes kann man feststellen: 1) das Existenzgebiet der Projektion des Orthozenters des orthozentrischen Tetraeders, 2) das Existenzgebiet der Projektion des Zenters O der umschriebenen Kugel des orthozentrischen Tetraeders, wenn die Projektion des Tetraeders gegeben ist.

Institut für Flugwesen zu Moskau

Eingegangen am 12. Okt. 1959