EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. IX KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1960, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ IX
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1960, № 1
https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1960.1.05

НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ

С. БАРОН

Введение

Числа ε_n называются множителями суммируемости типа * (C^α, C^β) (или (C_0^α, C^β), или $(|C^\alpha|, C^\beta))$, если при каждом C^α-суммируемом (или C^α-ограниченном, или $|C^\alpha|$-суммируемом) ряде ** Σu_n ряд $\Sigma \varepsilon_n u_n$ является C^β-суммируемым. Аналогично определяются множители суммируемости типов $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$, $(C^\alpha, |C^\beta|)$ и $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$.

В настоящей статье дадим новые доказательства достаточности условий следующих теорем. При этом будем пользоваться обозначениями

$$A_n^\sigma = \begin{cases} \binom{n+\sigma}{n} & \text{при } n = 0, 1, \ldots, \\ 0 & \text{при } n = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$\Delta^\sigma \varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{-\sigma-1} \varepsilon_\nu, \qquad \Delta\varepsilon_n = \Delta^1\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Метод доказательства следующих теорем удобен тем, что он легко переносится на двойные ряды.

Теорема 1. *Если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа $(|C^\alpha|, C^\beta)$ или $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, необходимы и достаточны условия*

$$\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha}), \tag{D}$$

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n = O(n^{-\alpha}). \tag{J}$$

Теорема 2. *Если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа (C^α, C^β), необходимы и достаточны условия* (D) *и*

$$\Sigma (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n| < \infty. \tag{B}$$

Теорема 3. *Если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа (C_0^α, C^β), необходимы и достаточны условия* (B) *и*

$$\varepsilon_n = o(n^{\beta-\alpha}). \tag{H}$$

---

* C^α означает метод Чезаро порядка α.

** Если пределы изменения индексов у знака Σ не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 0 до $+\infty$, а у знаков O и o — от 1 до $+\infty$.

Величины u_n и ε_n считаем комплексными числами.

Теорема 4. *Если* $\beta \leqslant \alpha + 1$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$, *то для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типа* $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ *или* $(C^\alpha, |C^\beta|)$, *необходимы и достаточны условия* (B) *и*

$$\Sigma (n+1)^{\alpha - \beta} |\varepsilon_n| < \infty. \tag{M}$$

Возникновение теории множителей суммируемости относится к началу нынешнего столетия, когда были опубликованы теорема Дедекинда-Адамара [14] (случай $\alpha = \beta = 0$ теорем 2 и 3) и первые ее обобщения.

Теорему Дедекинда-Адамара начали обобщать для рядов, суммируемых методом Чезаро целочисленного порядка, различные авторы. Возникшая на базе этого теория получила название теории множителей суммируемости. Упомянем основные этапы развития этой теории, оставив в стороне менее важные результаты. Также не будем рассматривать те теоремы о множителях суммируемости, в которых частные суммы ряда Σu_n или числа ε_n предполагаются зависящими от некоторого параметра, так как их доказательство ничего нового, кроме технической работы, не требует.

Первые важные обобщения теоремы Дедекинда-Адамара получены в 1907—1909 гг. Они принадлежат Бору [4, 5], Харди [16, 17] (случай $\beta = \alpha$ теорем 2 и 3) и Бромвичу [10] (случай $\beta = 0$ теоремы 2). При этом они (также Чепмен [11] и Андерсен [1, 2]) находили лишь достаточные условия, всюду заменяя условие (D) условием (H). Необходимость условий теоремы Бора-Харди доказал в 1916 г. Фекете [13], а теоремы Бромвича (в 1917 г.) — Кожима [22].

Для случая произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$ теоремы 2 и 3 были сформулированы в 1918 г. Шуром [27]. Опуская их доказательство, Шур замечает, что оно «требует довольно затруднительных вычислений», хотя на вид условия этих теорем несложные. Доказаны эти теоремы были Бозанкет [7] в 1944 г.

Уже в 1910 г. Чепмен [11] обобщил для произвольных $\alpha \geqslant 0$ теорему Бромвича (доказав заодно случай $\beta = 0$ теоремы 3), а в 1921 г. Андерсен ([1], стр. 45—53) обобщил на произвольные $\alpha \geqslant 0$ теорему Бора-Харди. Другие доказательства теоремы Бора-Харди для произвольных $\alpha \geqslant 0$ дали в 1926 г. Андерсен [2] и в 1942 г. Бозанкет [6], которая доказала также необходимость ее условий.

Полное доказательство теорем 2 и 3 для произвольных вещественных $\alpha, \beta \geqslant 0$ дала в 1946 г. Бозанкет [8]. Независимо от нее, в 1949 г., Кнопп [20] доказал эти теоремы, предполагая все же $\alpha \geqslant 0$ целым числом.

Теорему 1 (исключая множители суммируемости типа $(|C^\alpha|, C^\beta)$) доказали Фекете [13] в 1916 г. для случая $\beta = \alpha$ (α целое), Бозанкет [7] в 1944 г. для произвольных целых $\alpha, \beta \geqslant 0$, Андерсен [3] (только достаточность) и Пейеримхофф [25] в 1953 г. для произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Теорема 4 дана Фекете [13] в 1916 г. для случаев $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha + 1$ ($\alpha \geqslant 0$ целое) и Бозанкет [7] в 1944 г. для произвольных целых $\alpha, \beta \geqslant 0$. Полное доказательство теоремы 4 в случае произвольных вещественных $\alpha, \beta \geqslant 0$ дал Пейеримхофф [26] в 1956 г.

В 1952 г. Чжоу [12] также доказал теоремы, подобные теоремам 1 и 4, однако условия его теорем внешне отличаются от теорем 1 и 4. В 1957 г. Бозанкет и Чжоу [9] показали, что теоремы Чжоу из [12] равносильны теоремам 1 и 4 (хотя вместо теоремы 4 Чжоу рассматривал иной тип множителей суммируемости).

Остановимся на методах, примененных различными авторами для доказательства достаточности условий теорем 1 и 4, так как доказательство необходимости их особых затруднений не составляет.

Существуют в основном два общих метода доказательства достаточности условий теорем для множителей суммируемости: 1) непосредственный метод и 2) метод обратного преобразования.

Первый метод — это тот, которым пользовались Харди [16, 17], Бор [5], Бромвич [10], Чепмен [11], Фекете [13], Андерсен [1—3], Бозанкет [6—8].

Методом обратного преобразования непосредственно для метода Чезаро впервые * пользовался Кнопп [20], а затем Чжоу [12] и Пейеримхофф [25]. Основная идея этого метода заключается в том, что при помощи обратной матрицы проблема нахождения множителей суммируемости сводится к исследованию некоторого матричного преобразования. Путем применения к этому преобразованию соответствующей теоремы Хана [15], Кноппа-Лоренца [21], Кожима-Шура [22, 27], Шура [27, 18] или Пейеримхоффа [26] находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости соответствующего типа. Однако полученные таким путем условия неэффективны в том смысле, что их практически трудно проверять. Но из этих условий обычно легко вывести эффективные необходимые условия, из которых, в свою очередь, выводятся те неэффективные необходимые и достаточные условия, о которых говорилось выше.

Следует отметить, что каждый автор использовал этот метод по-своему и тем самым создавал свой метод доказательства теорем о множителях суммируемости. Простейшим из таких методов является метод Кноппа [20], которым он доказал теоремы 2 и 3. При этом Кнопп обязан был ограничиться целым $\alpha \geqslant 0$, так как формула

$$\Delta^{\alpha} x_n \varepsilon_n = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} \Delta^{\alpha-i} x_{n+i} \cdot \Delta^i \varepsilon_n, \tag{1}$$

которая им применяется, для нецелого α очевидно не действительна.

В 1956 г. Пейеримхофф [26] нашел новый метод доказательства теорем 1, 2 и 4. Его метод основывается на целом ряде обобщений формулы (1), так как каждая теорема (и даже отдельные части теоремы) требует для доказательства особой формулы. Однако, видимо для того, чтобы применять свои формулы, Пейеримхофф вводит последовательность δ_ν, от которой впоследствии освобождается. Формулы свои он применяет к произведению $\delta_\nu \varepsilon_\nu$, так как применение их непосредственно к произведению ** $A^{\gamma}_{n-\nu} \varepsilon_\nu$ $(\gamma = \beta,\ \beta - 1)$ не дает нужных оценок. Таким образом, метод Пейеримхоффа все же оказывается слишком сложным.

Несколько ранее (в 1951—1953 гг.) Пейеримхофф и Юркат [19, 23, 24] методами функционального анализа также находили некоторые теоремы о множителях суммируемости, но главным образом лишь при ограничении $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ случаи $\beta = 0$ и $\beta = \alpha$.

Потребность решения проблемы о множителях суммируемости относительно метода Чезаро для двойных рядов заставляет искать такой метод доказательства теорем 1—4, который не налагает ограничения на ряды Σu_n или числа α, β, так как сложность доказательства всякой теоремы для простых рядов при переходе к двойным рядам увеличивается в несколько раз. В этом смысле наилучшим для доказательства теорем о множителях суммируемости является метод Кноппа [20].*** В настоящей статье метод Кноппа обобщается для произвольных $\alpha \geqslant 0$ и полученным новым методом почти однообразно доказываются не только теоремы 2 и 3, но и теоремы 1 и 4. Этот метод основывается не на обобщении формулы (1) (для разности нецелого порядка), а на формулах (4), (14) и (29), являющихся видоизменениями формулы Чжоу ([12], формула (17)), при помощи которых соотношения для нецелого α сводятся к соотношениям для целого α. Для получения отдельных оценок применяются также другие формулы из работ [8, 12, 17, 1, 2].

Порядок теорем таков, что условия каждой из них необходимы для всех последующих.

---

* На метод обратного преобразования для нахождения множителей суммируемости указал уже Шур ([27], стр. 106).

** См. доказательство формул (4), (14) и (29).

*** Методом Чжоу [12] также легко доказать непосредственно теорему 1, но теорему 4 уже затруднительно.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Сведя (при помощи обратной матрицы*) проблему нахождения множителей суммируемости типа $(|C^\alpha|, C^\beta)$ к исследованию некоторого матричного преобразования ряда в последовательность и применяя к этому преобразованию теорему Хана ([15], стр. 29), легко доказать, что

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta)$ *тогда и только тогда, если*

$$\varepsilon_n = O(1), \tag{A}$$

$$\nu A_\nu^\alpha \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} \frac{A_{n-k}^{\beta}}{A_n^{\beta}} \frac{\varepsilon_k}{k} = O(1) \qquad (n \geqslant \nu). \tag{2}$$

Из (2) непосредственно вытекает необходимость условия (D), а из (A) и (2) можно вывести необходимость условия (J) (см.[25], леммы 3 и 4).

С другой стороны, сведя проблему нахождения множителей суммируемости типа $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$ к исследованию некоторого матричного преобразования ряда в ряд и применяя к этому преобразованию теорему Кноппа-Лоренца [21], легко доказать, что *

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$ *тогда и только тогда, если*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{nA_n^{\beta}} \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k \right| = O(\nu^{-\alpha-1}). \tag{3}$$

Оказывается, что условия (D) и (J), необходимые для множителей суммируемости типа $(|C^\alpha|, C^\beta)$, достаточны и для множителей суммируемости типа $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$. Поэтому (следуя схеме, указанной во введении) для доказательства теоремы 1 надо из условий (D) и (J) вывести условие (3), так как условие (A) следует из (D). При этом будем применять следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $\sigma > -1$, $\alpha \geqslant 0$ *и* $\alpha + \sigma \geqslant 0$, *то из условия* (A) *следует соотношение* **

$$\Delta^\sigma(\Delta^\alpha \varepsilon_n) = \Delta^{\alpha+\sigma} \varepsilon_n.$$

Лемма 2. *Из условий* (A) *и* (J) *вытекает*

$$\Delta^\sigma \varepsilon_n = O(n^{-\sigma}) \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant \alpha).$$

Лемма 1 доказана в [1] (стр. 20) и передоказана в [6]; лемма 2 доказана в [12], а для целых α, $\sigma \geqslant 0$ уже в [7].

В дальнейшем будем применять обозначения $a = [\alpha]$, $b = [\beta]$.

Имеет место формула

$$\sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} \sum_{k=\nu}^{n-i} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-i-k}^{i+\beta-a-1} \Delta^i \varepsilon_k. \tag{4}$$

---

* См. [12], стр. 465; [25], стр. 421; [26], стр. 146.

** Также существование обеих частей равенства.

Доказательство. Применяя последовательно преобразование Абеля, по формуле (1) получаем

$$\sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^a (A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k) =$$

$$= \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} \Delta^{a-i} A_{n-k-i}^{\beta-1} \cdot \Delta^i \varepsilon_k,$$

откуда непосредственно следует (4).

Так как по условию (D)

$$\sum_{n=\nu}^{\nu+a} \frac{1}{n A_n^\beta} \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k \right| = O(\nu^{-\alpha-1}),$$

то, в силу (4) и формулы

$$n A_n^{\chi-1} = \chi (A_n^\chi - A_n^{\chi-1}) = \chi A_{n-1}^\chi, \tag{5}$$

можем для доказательства теоремы 1 вместо соотношения (3) выводить из условий (D) и (J) следующие соотношения

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |B_i| = O(\nu^{-\alpha-1}) \qquad (i = 0, \ldots, a), \tag{6}$$

где

$$B_i = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-k}^{i+\beta-a-1} \Delta^i \varepsilon_k.$$

При доказательстве последнего, т. е. при выводе соотношений (6) из условий (D) и (J), нам придется, в зависимости от поведения чисел $A_n^{i+\beta-a-1}$ в выражениях (6), отдельно исследовать три случая.

1. Легче всего оцениваются те члены в (6), для которых i таково, что $|A_n^{i+\beta-a-1}|$ являются членами сходящегося ряда. Поэтому для всех $i = 0, \ldots, a-b-1$ при* $\beta > b$ и всех $i = 0, \ldots, a-b$ при $\beta = b$ из условия (D) вытекает

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |B_i| = \sum_{k=\nu}^{\infty} \left| A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k \right| O(k^{-\beta-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \left| A_{n-k}^{i+\beta-a-1} \right| = O(\nu^{-\alpha-1}).$$

2. Для тех членов выражения (6), для которых $|A_n^{i+\beta-a-1}|$ не являются членами сходящегося ряда, на помощь приходит следующая известная формула **

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n A_n^\sigma} A_{n-\nu}^\delta = \frac{1}{\nu A_\nu^{\sigma-\delta-1}} \qquad (\sigma > -1;\ \sigma - \delta > 0;\ \nu = 1, 2, \ldots),$$

* В случае $a = b < \beta$ такого i нет.

** См. [12], стр. 461; [25], стр. 418.

откуда при помощи (5) легко получить

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\tau}} A_{n-\nu}^{\delta} = \frac{\tau}{\tau-\delta-1} \frac{1}{A_{\nu}^{\tau-\delta-1}} \quad (\tau > 0;\ \tau-\delta > 1;\ \nu = 0, 1, \ldots). \quad (7)$$

Так как

$$B_i = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k \sum_{\varkappa=0}^{n-k} A_{\varkappa}^{i+\beta-a-2} = \sum_{\varkappa=0}^{n-\nu} A_{\varkappa}^{i+\beta-a-2} \sum_{k=\nu}^{n-\varkappa} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k,$$

то по лемме 1 из условия (A) следует

$$B_i = C_i - D_i, \quad (8)$$

где

$$C_i = A_{n-\nu}^{i+\beta-a-1} \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_{\nu},$$

$$D_i = \begin{cases} \sum_{\varkappa=0}^{n-\nu} A_{\varkappa}^{i+\beta-a-2} \sum_{k=n-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k & \text{при } \alpha > a, \\ 0 & \text{при } \alpha = a. \end{cases}$$

По формуле (7) и лемме 2 из условий (A) и (J) для всех $i = a-b, \ldots, a$ (т. е. для тех i, при которых $A_n^{i+\beta-a-1} \geqslant 0$) получаем

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |C_i| \leqslant |\Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_{\nu}| \frac{\beta+1}{A_{\nu}^{a+1-i}} = O(\nu^{-\alpha-1}).$$

Если $\alpha > a$, то для всех* $i = a-b+1, \ldots, a$ (т. е. для тех i, при которых $A_n^{i+\beta-a-2} \geqslant 0$) по лемме 2 из условия (A) и формуле (7) имеем

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |D_i| \leqslant \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \sum_{\varkappa=0}^{n-\nu} A_{\varkappa}^{i+\beta-a-2} \sum_{k=n-\nu-\varkappa+1}^{\infty} |A_k^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_{k+\nu}| =$$

$$= O(\nu^{-i}) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \sum_{\varkappa=0}^{n-\nu} A_{\varkappa}^{i+\beta-a-2} A_{n-\nu-\varkappa}^{a-\alpha} =$$

$$= O(\nu^{-i}) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} A_{n-\nu}^{i+\beta-\alpha-1} = O(\nu^{-\alpha-1}).$$

3. Остается доказать соответствующую оценку для D_{a-b} при $\alpha > a$, $\beta > b$. Этот член приходится отдельно оценивать потому, что при $i = a-b$ числа $A_n^{i+\beta-a-1}$ не являются членами сходящегося ряда, а числа $A_{\varkappa}^{i+\beta-a-2}$ не являются знакопостоянными. Вместо D_{a-b} удобнее рассматривать B_{a-b}. Применяя преобразование Абеля, по условию (A) из леммы 1 получаем

$$B_{a-b} = E + F, \quad (9)$$

* В случае $a = 0$ такого i нет.

где

$$E = A_{n-\nu}^{\beta-b+a-\alpha-1}\,\Delta^{a-b}\,\varepsilon_{n+1},$$

$$F = \sum_{k=\nu}^{n} \Delta^{a+1-b}\,\varepsilon_k \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha-1}\,A_{n-\varkappa}^{\beta-b-1}.$$

Выражение E оценивается просто. Если $\beta - b + a - \alpha \leqslant 0$, то из условия (D) следует

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |E| = \frac{1}{A_\nu^{\beta+1}}\, O(\nu^{\beta-\alpha}) \sum_{n=\nu}^{\infty} \left| A_{n-\nu}^{\beta-b+a-\alpha-1} \right| = O(\nu^{-\alpha-1}).$$

Если же $\beta - b + a - \alpha > 0$, то по лемме 2 из условий (A) и (J) и формулы (7) вытекает

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |E| = O(\nu^{b-a}) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} A_{n-\nu}^{\beta+b+a-\alpha-1} = O(\nu^{-\alpha-1}).$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается оценить выражение F. Оценка этого выражения требует сравнительно длинных вычислений. По лемме 1 из условия (A) имеем

$$\Delta^{a+1-b}\,\varepsilon_k = \sum_{s=k}^{\infty} A_{s-k}^{\alpha-a-2}\,\Delta^{\alpha-b}\,\varepsilon_s.$$

Вставляя последнее в выражение F, находим

$$F = G + H,$$

где

$$G = \sum_{s=\nu}^{n} \Delta^{\alpha-b}\,\varepsilon_s \sum_{k=\nu}^{s} A_{s-k}^{\alpha-a-2} \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha-1}\,A_{n-\varkappa}^{\beta-b-1},$$

$$H = \sum_{s=n+1}^{\infty} \Delta^{\alpha-b}\,\varepsilon_s \sum_{k=\nu}^{n} A_{s-k}^{\alpha-a-2} \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha-1}\,A_{n-\varkappa}^{\beta-b-1}.$$

Нетрудно (заменами порядка суммирования и применением преобразования Абеля) убедиться в том, что

$$G = C_{a-b} + J,$$

и, следовательно,

$$F = C_{a-b} + J + H, \tag{10}$$

где

$$J = \sum_{\varkappa=\nu}^{n} A_{n-\varkappa}^{\beta-b-2} \sum_{s=\varkappa+1}^{n} \Delta^{\alpha-b}\,\varepsilon_s \sum_{p=\nu}^{\varkappa} A_{s-p}^{\alpha-a-1}\,A_{p-\nu}^{a-\alpha-1}.$$

Выражение C_{a-b} уже оценено в случае 2. Для оценки выражения J воспользуемся следующей известной формулой Бозанкет *

$$\sum_{\rho=\mu}^{\nu} A_{n-\rho}^{\beta-1}\,A_{\rho-\mu}^{-\alpha-1} = O(1)\,A_{n-\mu}^{\beta-1}\,A_{\nu-\mu}^{-\alpha} \quad (0 \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant n;\ 0 \leqslant \alpha < 1;\ 0 < \beta < 1). \tag{11}$$

---

* См.[8], стр. 487.

Применяя формулу (11), находим

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_n^{\beta+1}}\,|J| = O(1)\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_n^{\beta+1}}\sum_{\varkappa=\nu}^{n}\left|A_{n-\varkappa}^{\beta-b-2}\right|\sum_{s=\varkappa+1}^{n}\left|\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_s\right|A_{s-\nu}^{\alpha-a-1}\,A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha} =$$

$$= O(1)\sum_{s=\nu}^{\infty}A_{s-\nu}^{\alpha-a-1}\left|\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_s\right|\sum_{\varkappa=\nu}^{s}A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha}\sum_{n=s}^{\infty}\frac{1}{A_n^{\beta+1}}\left|A_{n-\varkappa}^{\beta-b-2}\right| =$$

$$= O(1)\sum_{s=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_s^{\beta+1}}A_{s-\nu}^{\alpha-a-1}\left|\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_s\right|\sum_{\varkappa=\nu}^{s}A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha}\,A_{s-\varkappa}^{\beta-b-1},$$

откуда, так как $a-\alpha+\beta-b>-1$, применяя формулу (7) и лемму 2, из условий (A) и (J) получаем

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_n^{\beta+1}}\,|J| = O(1)\sum_{s=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_s^{\beta+1}}A_{s-\nu}^{\beta-b-1}\left|\Delta^{\alpha-b}\varepsilon_s\right| \tag{12}$$

$$= O(\nu^{-\alpha-1}).$$

Что касается выражения H, то оно здесь оценивается легко. Применяя лемму 2, формулы (11) и (7), из условий (A) и (J) выводим

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_n^{\beta+1}}\,|H| = O(\nu^{b-a})\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{A_n^{\beta+1}}A_{n-\nu}^{\beta-b-1}\sum_{k=\nu}^{n}A_{k-\nu}^{a-\alpha}\sum_{s=n+1}^{\infty}\left|A_{s-k}^{\alpha-a-2}\right| = O(\nu^{-\alpha-1}).$$

Таким образом, мы из условий (A), (D) и (J) вывели соотношение (6), и, следовательно, соотношение (3) для всех $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$. Так как из условия (D) следует (A), то теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Сведя проблему нахождения множителей суммируемости типа (C^α, C^β) к исследованию некоторого матричного преобразования последовательности в последовательность * и применяя к этому преобразованию известную теорему Кожима-Шура ([22], стр. 297; [27], стр. 82, теорема I), легко доказать, что

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа (C^α, C^β) тогда и только тогда, если выполнены условия (A) *и*

$$\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^\alpha\left|\sum_{k=\nu}^{n}A_{k-\nu}^{-\alpha-2}\,A_{n-k}^{\beta}\,\varepsilon_k\right| = O(n^\beta). \tag{13}$$

Из условий (A) и (13) непосредственно вытекает необходимость условий ** (B) и (D).

Для доказательства теоремы 2 по схеме, указанной во введении, надо из условий (B) и (D) вывести условие (13). Доказательство теоремы 2 в основном опирается на формулы (1) и (11), лемму 1 и следующие леммы.

* См. [20], стр. 72.
** См. [20], стр. 73.

Лемма 3. *Из условий* (A) *и* (B) *следует*

$$\sum (n+1)^{\sigma-1} \left| \Delta^{\sigma} \varepsilon_n \right| < \infty \qquad (0 < \sigma \leqslant \alpha + 1).$$

Лемма 4. *Из условий* (A) и (B) *следует*

$$\Delta^{\sigma} \varepsilon_n = o(n^{-\sigma}) \qquad (0 < \sigma \leqslant \alpha).$$

Леммы 3 и 4 доказаны Андерсеном ([1], стр. 31) и передоказаны Бозанкет [6]. Лемма 3 в предположении $\varepsilon_n = o(1)$ для целочисленных $\sigma \geqslant 1$ доказал уже Бромвич ([10], стр. 361).

Можно доказать (аналогично как (4)), что *имеет место*

$$\sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta} \varepsilon_k = \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} \sum_{k=\nu}^{n-i} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-i-k}^{i+\beta-a-1} \Delta^i \varepsilon_k. \qquad (14)$$

Поэтому вместо соотношения (13) можем очевидно из условий (B) и (D) вывести соотношения

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha} \left| B_i \right| = O(n^{\beta}) \qquad (i = 0, \ldots, a+1). \qquad (15)$$

При доказательстве последнего, т. е. при выводе соотношений (15) из (B) и (D), будем по тем же причинам, что при доказательстве теоремы 1, рассматривать отдельно три случая.

1. Для всех $i = 0, \ldots, a-b-1$ при* $\beta > b$ и всех $i = 0, \ldots, a-b$ при $\beta = b$ из условия (D) непосредственно следует

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha} \left| B_i \right| = O(n^{\beta}).$$

2. Для упрощения дальнейших рассуждений нам нужна

Лемма 5. *Из условий* (A) *и* (B) *следует равномерная сходимость (относительно индекса n) рядов*

$$\sum_{\nu} (A_n^{\beta})^{-1} A_{\nu}^{\alpha} \left| C_i \right| \qquad (i = a-b+1, \ldots, a+1).$$

Доказательство. Так как $i + \beta - a - 1$, $a + 1 - i \geqslant 0$, то

$$A_{\nu}^{\alpha} \frac{|C_i|}{A_n^{\beta}} = O(1) \left(\frac{n+1-\nu}{n+1} \right)^{i+\beta-a-1} \left(\frac{\nu+1}{n+1} \right)^{a+1-i} (\nu+1)^{i+\alpha-a-1} \left| \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_{\nu} \right| =$$

$$= O(1)\ (\nu+1)^{i+\alpha-a-1} \left| \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_{\nu} \right|,$$

откуда по лемме 3, в силу условий (A) и (B), вытекает утверждение леммы.

Так как и здесь из условия (A) следует (8), то по лемме 5 для всех $i = a-b+1, \ldots, a+1$ из условий (A) и (B) непосредственно вытекает

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha} \left| C_i \right| = O(n^{\beta}).$$

---

* В случае $a = b < \beta$ такого i нет.

Далее, приступая к оценке D_i при $\alpha > a$, заметим предварительно, что для всех $i = a - b + 1, \ldots, a + 1$ по леммам 1 и 3 из условий* (A) и (B) получаем

$$\sum_{k=n-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k = \sum_{k=n-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \sum_{s=k}^{\infty} A_{s-k}^{\alpha-a-1} \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_s =$$

$$= - \sum_{s=n-\varkappa+1}^{\infty} \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_s \sum_{k=\nu}^{n-\varkappa} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{s-k}^{\alpha-a-1},$$

откуда по формуле (11) находим

$$\sum_{k=n-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \varepsilon_k = O(1) A_{n-\nu-\varkappa}^{a-\alpha} \sum_{s=\nu}^{\infty} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1} |\Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_s|. \tag{16}$$

Следовательно, для всех $i = a - b + 1, \ldots, a + 1$ имеем

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |D_i| = K_i + L_i,$$

где

$$K_i = \sum_{s=0}^{n} |\Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_s| \sum_{\nu=0}^{s} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{i+\beta-\alpha-1} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1},$$

$$L_i = \sum_{s=n+1}^{\infty} |\Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_s| \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{i+\beta-\alpha-1} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1}.$$

Последние два выражения оценим сначала в случае $i > a - \beta + 1$ (и, значит, при $\beta > 0$).

Если $i > a - \beta + 1$, то можем выбрать некоторое число x такое, что $x \leqslant \beta$ и $a + 1 - i < x < \alpha + 1 - i$ (и, следовательно, $x > 0$, $-1 < i + x - \alpha - 1 < 0$ и $i + x - a - 2 > -1$). Так как в этом случае

$$(n+1)^{x-\beta} A_{n-\nu}^{i+\beta-\alpha-1} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1} = O(1) \left(\frac{n+1-\nu}{n+1}\right)^{\beta-x} A_{n-\nu}^{i+x-\alpha-1} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1} =$$

$$= O(1) A_{s-\nu}^{i+x-a-2}$$

при $s \leqslant n$ и

$$A_{n-\nu}^{i+\beta-\alpha-1} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1} = O(1) A_{n-\nu}^{i+\beta-a-2}$$

при $s > n$, то по лемме 3 из условий (A) и (B) вытекает**

$$\lim (n+1)^{-\beta} K_i = \lim O(1) \sum_s \left(\frac{s+1}{n+1}\right)^x (s+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_s| = 0$$

---

* Лемма 3 применяется лишь для оправдания перестановки порядка суммирования.

** Под $\lim S_n$ мы понимаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

(в силу равномерной сходимости последнего ряда относительно n) и

$$\lim (n+1)^{-\beta} L_i = \lim O(1)\,(n+1)^{-\beta} \sum_{s=n+1}^{\infty} |\Delta^{i+\alpha-a}\varepsilon_s| \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{i+\alpha-a-2} = 0.$$

Если же $\beta = b \geqslant 1$ (тогда $0 < a - \beta + 1 \leqslant \alpha$), то по лемме 4 из условий (A) и (B) непосредственно получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |D_{a-\beta+1}| = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^{a-\beta+1}\varepsilon_k \right|$$

$$= o(n^{\beta-a-1}) \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{a-\alpha} = o(n^\beta).$$

Таким образом, мы доказали, что для всех $i = a - b + 1, \ldots, a + 1$ при $\beta > 0$ (конечно, если $\alpha > a$) из условий (A) и (B) следует

$$\lim (A_n^\beta)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |D_i| = 0. \tag{17}$$

Если же $\beta = 0$ (и $\alpha > a$), то из условий (B) и (D) легко вывести непосредственно соотношение (13), ибо

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} \varepsilon_k \right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_\nu| + \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} \varepsilon_k \right| =$$

$$= O(1) + \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-\nu)^{-\alpha-2} O(k^{-\alpha}) = O(1).$$

3. Остается доказать соответствующую оценку для B_{a-b} при $\alpha \geqslant a$, $\beta > b$. В силу (9) нам достаточно отдельно оценить выражения E и F.

Если $\beta - b + a - \alpha \leqslant 0$, то из условия (D) следует

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |E| \leqslant A_n^\alpha |\Delta^{a-b}\varepsilon_{n+1}| \sum_{\nu=0}^{n} |A_{n-\nu}^{\beta-b+a-\alpha-1}| \tag{18}$$

$$= O(n^\beta).$$

Если же $\beta - b + a - \alpha > 0$ (тогда также $a - b > 0$), то из (18) по лемме 4, в силу условий (A) и (B), вытекает

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |E| = o(n^\beta). \tag{19}$$

Далее, применяя к F формулу (11) и соотношение

$$\Delta^{a+1-b}\varepsilon_k = \sum_{s=k}^{\infty} A_{s-k}^{\alpha-a-1} \Delta^{\alpha+1-b}\varepsilon_s,$$

вытекающее из условия (A) по лемме 1, находим

$$F = O(1) A_{n-\nu}^{\beta-b-1} \sum_{s=\nu}^{\infty} | \Delta^{\alpha+1-b} \varepsilon_s | \tag{20}$$

$$= O(1)(\nu+1)^{b-\alpha} A_{n-\nu}^{\beta-b-1} \sum_{s=\nu}^{\infty} (s+1)^{\alpha-b} | \Delta^{\alpha+1-b} \varepsilon_s |,$$

откуда, в силу условий (A) и (B), по лемме 3 следует *

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha | F | = o(n^\beta). \tag{21}$$

Таким образом, из условий (A), (B) и (D) мы вывели соотношение (15), а для случая $\beta = 0$, $\alpha > a$ — соотношение (13). Следовательно, соотношение (13) доказано для всех $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Так как из (D) следует (A), то теорема 2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Заменяя в доказательстве теоремы 2 теорему Кожима-Шура теоремой из статьи [18] (стр. 156), являющейся вариантом теоремы Шура ([27], теорема III), легко доказать, что

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типа* (C_0^α, C^*) *тогда и только тогда, если выполнены условия* (A), (13) *и*

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \left| (A_n^\beta)^{-1} \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^\beta - \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu \right| = 0. \tag{22}$$

Из условий (22) и (B) непосредственно вытекает необходимость условия (H).

Учитывая, что в § 2 мы доказали, что из условий (B) и (D) следует соотношение (13), а из условия (H) — условие (D), то для доказательства теоремы 3 нам остается из условий (B) и (H) вывести лишь соотношение (22).

В силу условия (A) имеем

$$\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu = \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} \Delta^{a+1-i} 1 \cdot \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_\nu,$$

откуда и из (14) следует, что вместо соотношения (22) можем из условий (B) и (H) вывести соотношение

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |M_i| = 0 \qquad (i = 0, \ldots, a+1), \tag{23}$$

где

$$M_i = (A_{n+i}^\beta)^{-1} B_i - \Delta^{a+1-i} 1 \cdot \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_\nu .$$

---

* Здесь применяем очевидное соотношение

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\varkappa} A_\nu^\lambda a_\nu = o(A_n^{\varkappa+\lambda+1}) \qquad (a_n = o(1);\ \varkappa,\ \lambda,\ \varkappa+\lambda > -1).$$

При доказательстве последнего, т. е. при выводе соотношения (23) из условий (B) и (H), будем по тем же причинам, что при доказательстве теорем 1 и 2, рассматривать отдельно три случая.

1. Для всех $i = 0, \ldots, a - b - 1$ при* $\beta > b$ и всех $i = 0, \ldots, a - b$ при $\beta = b$ из условия (H) получаем

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |M_i| = \lim (A_{n+i}^\beta)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |B_i| =$$

$$= \lim O(1) \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)^{\alpha-\beta} |\Delta^i \varepsilon_{n-k}| \, |A_k^{i+\beta-a-1}| = 0.$$

2. Сначала заметим, что из (8) непосредственно вытекает

$$M_i = N_i - (A_{n+i}^\beta)^{-1} D_i,$$

где

$$N_i = \left\{ (A_{n+i}^\beta)^{-1} A_{n-\nu}^{i+\beta-a-1} - \Delta^{a+1-i} 1 \right\} \Delta^{i+\alpha-a} \varepsilon_\nu .$$

В силу леммы 5 из условий (A) и (B) для всех $i = a - b + 1, \ldots, a + 1$ находим

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha |N_i| = 0.$$

Как было показано в § 2 для всех $i = a - b + 1, \ldots, a + 1$, из условий (A) и (B) следует (17), если $\beta > 0$ (конечно, если $\alpha > a$). Остается доказать, что (17) имеет место и при $\beta = 0$. Оказывается, однако, что из условия (H) легко вывести непосредственно соотношение (22), так как в силу (H)

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} \varepsilon_k - \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu \right| = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} \varepsilon_k \right| = o\ (1).$$

3. Остается доказать соответственную оценку для B_{a-b} при $\alpha \geqslant a$, $\beta > b$. Оказывается, что эта оценка уже доказана в § 2, так как из условий (A) и (B) следует (19) для $\beta - b + a - \alpha > 0$ и (21), а из условия (H) и (18) следует (19) также для $\beta - b + a - \alpha \leqslant 0$.

Таким образом, из условий (A), (B) и (H) мы вывели соотношение (23), а для случая $\beta = 0$, $\alpha > a$ — соотношение (22). Следовательно, соотношение (22) доказано для всех $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Так как из (H) следуют (A) и (D), то теорема 3 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Сведя проблему нахождения множителей суммируемости типа $(C^\alpha, |C^\beta|)$ или $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ к исследованию некоторого матричного преобра-

* В случае $a = b < \beta$ такого i нет.

зования последовательности в ряд и применяя к этому преобразованию известную теорему Пейеримхоффа ([26], стр. 142), легко доказать, что

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типа* $(C^\alpha, |C^\beta|)$ *или* $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ *тогда и только тогда, если*

$$\sum A_\nu^\alpha \left| \sum_{n \in \mathfrak{N}} \frac{1}{nA_n^\beta} \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta-1} \omega_k \right| \leqslant K, \tag{24}$$

где $\omega_k = k\varepsilon_k$, $\mathfrak{N}$ — всевозможные конечные подмножества последовательности неотрицательных целых чисел, а K не зависит от $\mathfrak{N}$.

Из условия (24) непосредственно вытекает необходимость условия (M), а из условий (A) и (24) — заново необходимость условия (B), так как необходимость условия (A) очевидна из доказательств предыдущих теорем.

Очевидно соотношение (24) вытекает из

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{nA_n^\beta} \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta-1} \omega_k \right| < \infty. \tag{25}$$

Для доказательства теоремы 4 по схеме, указанной во введении, остается из условий (B) и (M) вывести условие (25). Однако, в этом доказательстве будем пользоваться также необходимым условием (A), так как в дальнейшем покажем, что оно следует из условий (B) и

$$\sum \frac{|\varepsilon_n|}{n+1} < \infty. \tag{26}$$

Доказательство теоремы 4 несколько сложнее доказательств предыдущих теорем, так как, во-первых, здесь надо рассматривать не только случай $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, но и случай $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 1$. Во-вторых, если ε_n удовлетворяет условию (A), то, в общем случае, $\omega_n \neq O(1)$. Поэтому нам надо доказать для ω_n леммы, аналогичные леммам 1, 3 и 4 для ε_n. Доказательство теоремы 4 будет в основном опираться на формулы (1), (7) и (11) и следующие леммы.

Л е м м а 6a. *Если* $\sigma \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$, *то из условия** (A) *следует соотношение*

$$\Delta^\sigma(\Delta^\alpha \omega_n) = \Delta^{\alpha+\sigma}\omega_n. \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о**. Заметим, что из условия (A) и формулы (5) следует существование $\Delta^\alpha\omega_n$ для всех $\sigma \geqslant 1$, так как из (5) имеем

$$\Delta^\alpha \omega_n = (n+\alpha)\Delta^\alpha \varepsilon_n - \alpha\Delta^{\alpha-1}\varepsilon_n. \tag{28}$$

Из (28) и (5) и, в силу условия (A), из леммы 1 вытекает

$$\Delta^\sigma(\Delta^\alpha\omega_n) = (n+\alpha+\sigma)\Delta^{\alpha+\sigma}\varepsilon_n - (\alpha+\sigma)\Delta^{\alpha+\sigma-1}\varepsilon_n = \Delta^{\alpha+\sigma}\omega_n.$$

---

* Лемма очевидно имеет место, если (A) заменить условием $\omega_n = O(n)$.

** Лемму 6a можно доказать и непосредственно, в основном так же, как Андерсен [1] доказал лемму 1.

Лемма 6б. *Из условий* (A) *и* $\Delta\omega_n = O(1)$ *следует соотношение* (27) *для всех* $\sigma > -1$, $\alpha \geqslant 1$ *и* $\alpha + \sigma \geqslant 1$.

Доказательство. Так как $\sigma > -1$, $\alpha - 1 \geqslant 0$ и $\alpha - 1 + \sigma \geqslant 0$, то, обозначив $\Delta\omega_n = a_n$, по лемме 1 имеем

$$\Delta^\sigma(\Delta^{\alpha-1} a_n) = \Delta^{\alpha-1+\sigma} a_n.$$

Вставляя здесь вместо a_n ее значение, получаем требуемое, так как при помощи леммы 6а находим

$$\Delta^{\alpha-1} a_n = \Delta^\alpha \omega_n \quad \text{и} \quad \Delta^{\alpha-1+\sigma} a_n = \Delta^{\alpha+\sigma}\omega_n.$$

Лемма 7. *Из условий* (B) *и* (26) *вытекает условие* (A).

Доказательство. Как известно *, из условий (B) и (26) следует сходимость ряда $\sum A_\nu^{\alpha-a} | \Delta^{\alpha+1-a}\varepsilon_\nu |$ и $\Delta^{\alpha-a}\varepsilon_n = o(1)$, откуда, ввиду (26), $\Delta\varepsilon_n = O(1)$. Из (26) также вытекает, что $\varepsilon_n = O(n)$. Поэтому, в силу леммы 6б, имеем

$$\sum | \Delta\varepsilon_n | = \sum_n \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\alpha-a-1} \Delta^{\alpha-a+1}\varepsilon_\nu \right| \leqslant \sum A_\nu^{\alpha-a} \left| \Delta^{\alpha-a+1}\varepsilon_\nu \right| < \infty,$$

откуда вытекает (A).

Лемма 8. *Из условий* (B) *и* (26) *следует*

$$\sum (n+1)^{\sigma-2} | \Delta^\sigma\omega_n | < \infty \qquad (1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha + 1).$$

Доказательство. Из (28) и леммы 3, применимой в силу леммы 7, из условий (B) и (26) для всех $1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha + 1$ вытекает существование $\Delta^\sigma\omega_n$ и утверждение леммы, так как

$$\sum (n+1)^{\sigma-2} | \Delta^\sigma\omega_n | = O(1) \sum (n+1)^{\sigma-1} | \Delta^\sigma\varepsilon_n | + \\ + \sigma \sum (n+1)^{\sigma-2} | \Delta^{\sigma-1}\varepsilon_n | < \infty.$$

Лемма 9. *Из условий* (B) *и* (26) *следует*

$$\Delta^\sigma\omega_n = O(n^{-\sigma+1}) \qquad (1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha).$$

Доказательство. Из (28) и леммы 4, применимой в силу леммы 7, из условий (B) и (26) следует утверждение леммы.

Доказав вышеприведенные леммы, можем приступить к доказательству теоремы 4. Можно доказать (аналогично как формулу (4)), что *имеет место*

$$\sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta-1}\omega_k = \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} \sum_{k=\nu}^{n-i} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-i-k}^{i+\beta-a-2} \Delta^i\omega_k. \tag{29}$$

---

* См. [9], стр. 79.

Так как по условию (М)

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\nu+a+1} \frac{1}{nA_n^\beta} \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta-1} \omega_k \right| < \infty,$$

то, в силу (29) и (5), можно для доказательства теоремы 4 вместо соотношения (25) вывести из условий (В) и (М) следующие соотношения

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \left| B_i' \right| < \infty \qquad (i = 0, \ldots, a+1), \tag{30}$$

где

$$B_i' = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-k}^{i+\beta-a-2} \Delta^i \omega_k.$$

При доказательстве последнего, т. е. при выводе соотношения (30) из условий (В) и (М), будем по тем же причинам, что при доказательстве теорем 1—3, рассматривать отдельно три случая.

1. Для всех $i = 0, \ldots, a-b$ при* $\beta > b$ и всех $i = 0, \ldots, a-b+1$ при $\beta = b$ из условия (М) следует

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \left| B_i' \right| = O(1) \sum (k+1)^{\alpha-\beta-1} \left| \Delta^i \omega_k \right| < \infty.$$

2. Аналогично соотношению (8) по лемме 6а из условия (А) для всех $i \geqslant 1$ имеем

$$B_i' = C_i' - D_i',$$

где

$$C_i' = A_{n-\nu}^{i+\beta-a-2} \Delta^{i+\alpha-a} \omega_\nu,$$

$$D_i' = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{n-\nu} A_\varkappa^{i+\beta-a-3} \sum_{k=n-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} \Delta^i \omega_k & \text{при } \alpha > a, \\ 0 & \text{при } \alpha = a. \end{cases}$$

По формуле (7) и лемме 8 из условий (В) и (26) для всех $i = a-b+2, \ldots, a+1$ вытекает

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \left| C_i' \right| = O(1) \sum (\nu+1)^{i+\alpha-a-2} \left| \Delta^{i+\alpha-a} \omega_\nu \right| < \infty.$$

Далее, приступая к оценке D_i' при $\alpha > a$, заметим предварительно, что из леммы 9 при $\alpha \geqslant 1$ из условий (В) и (26) следует $\Delta\omega_n = O(1)$. Поэтому на основе лемм 6б и 8 отсюда получаем, что для всех** $i \geqslant 2$

* В случае $b = a+1 < \beta$ такого i нет.
** Такие i возможны, если $\alpha \geqslant 1$.

имеет место соотношение (16) и для ω_n. Следовательно, для всех* $i = a - b + 2, \ldots, a + 1$ при $b \leqslant a$ и всех** $i = a - b + 3, \ldots, a + 1$ при $b = a + 1$ по лемме 8 из условий (B) и (26) и формул (7) и (16) находим

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |D_i'| = O(1) \sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} A_{n-\nu}^{i+\beta-\alpha-2} \sum_{s=\nu}^{\infty} A_{s-\nu}^{\alpha-a-1} |\Delta^{i+\alpha-a}\omega_s| =$$

$$= O(1) \sum (s+1)^{i+\alpha-a-2} |\Delta^{i+\alpha-a}\omega_s| < \infty.$$

Если же $b = a + 1$ при $\alpha > a$, то вместо D'_{a-b+2} нам удобнее рассматривать выражение $B'_{a-b+2} = B'_1$. Применяя преобразование Абеля и формулу (1), находим

$$B_1' = \sum_{k=\nu}^{n} \Delta(A_{n-k}^{\beta-a-1} \Delta\omega_k) \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha-1} = P + Q,$$

где

$$P = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha} A_{n-k}^{\beta-a-2} \Delta\omega_k,$$

$$Q = \sum_{k=\nu}^{n-1} A_{k-\nu}^{a-\alpha} A_{n-1-k}^{\beta-a-1} \Delta^2\omega_k.$$

По формуле (7) и лемме 8 из условий (B) и (26) следует

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |P| = O(1) \sum (k+1)^{-1} |\Delta\omega_k| < \infty.$$

Таким же способом оценить выражение Q мы не можем, так как при $0 < \alpha < 1$ мы ничего не знаем о сходимости ряда $\Sigma |\Delta^2\omega_k|$. Поэтому для оценки выражения Q мы должны его преобразовать, не пользуясь при этом леммой 6б, так, чтобы вместо $\Delta^2\omega_k$ в нем была бы разность порядка не большего, чем $\alpha + 1$. По лемме 6а из условия (A) имеем

$$\Delta^2\omega_k = \sum_{s=k}^{\infty} A_{s-k}^{\alpha-a-2} \Delta^{\alpha+1-a}\omega_s.$$

Вставляя последнее в выражение Q, находим

$$Q = R + S,$$

где

$$R = \sum_{s=\nu}^{n-1} \Delta^{\alpha+1-a}\omega_s \sum_{k=\nu}^{s} A_{k-\nu}^{a-\alpha} A_{n-1-k}^{\beta-a-1} A_{s-k}^{\alpha-a-2},$$

$$S = \sum_{s=n}^{\infty} \Delta^{\alpha+1-a}\omega_s \sum_{k=\nu}^{n-1} A_{k-\nu}^{a-\alpha} A_{n-1-k}^{\beta-a-1} A_{s-k}^{\alpha-a-2}.$$

---

* В случае $b = 0$ такого i нет.

** В случае $a = 0$ такого i нет.

Чтобы оценить выражение R, преобразуем внутреннюю его сумму, переставляя ее члены и применяя к полученному преобразование Абеля; находим

$$\sum_{k=\nu}^{s} A_{k-\nu}^{a-\alpha} A_{n-1-k}^{\beta-a-1} A_{s-k}^{\alpha-a-2} = \sum_{k=\nu}^{s} A_{k-\nu}^{\alpha-a-2} A_{s-k}^{a-\alpha} A_{k+n-1-\nu-s}^{\beta-a-1} =$$

$$= - \sum_{k=\nu}^{s} A_{k-\nu+n-s}^{\beta-a-2} \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{\alpha-a-2} A_{s-\varkappa}^{a-\alpha} + A_{n-\nu}^{\beta-a-1} A_{s-\nu}^{-1}.$$

Применяя формулу(11) и учитывая, что $0 < A_{k-\nu+n-s}^{\beta-a-2} < A_{n-s}^{\beta-a-2}$ при $\beta > b$ и $A_{k-\nu+n-s}^{-1} = 0 = A_{n-s}^{-1}$ при $\beta = b$, имеем

$$|R| = O(1) \sum_{s=\nu}^{n-1} A_{n-s}^{\beta-a-2} |\Delta^{\alpha+1-a} \omega_s| + |C_1'|.$$

Но так как оценка для $C'_1 = C'_{a-b+2}$ уже рассмотрена, то по лемме 8 из условий (B) и (26) следует

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |R| = O(1) \sum (s+1)^{\alpha-a-1} |\Delta^{\alpha+1-a} \omega_s| + O(1) < \infty.$$

Для оценки выражения S выберем некоторое число η такое, чтобы $0 < \eta < \alpha - a$ (тогда $-1 < \eta - 1$, $\alpha - a - \eta - 1 < 0$). Учитывая, что

$$A_{s-k}^{\alpha-a-2} = O(1) A_{s-k}^{\eta-1} A_{s-k}^{\alpha-a-\eta-1} = O(1) A_{s-n}^{\eta-1} A_{n-k}^{\alpha-a-\eta-1} \tag{31}$$

и

$$A_{n-k}^{\beta-a-1} A_{n-k}^{\alpha-a-\eta-1} = O(1) A_{n-k}^{\beta-b+\alpha-a-\eta-1},$$

находим

$$S = O(1) A_{n-\nu}^{\beta-b-\eta} \sum_{s=n}^{\infty} A_{s-n}^{\eta-1} |\Delta^{\alpha+1-a} \omega_s|.$$

Отсюда по лемме 8, в силу условий (B) и (26), получаем, что

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |S| = O(1) \sum A_n^{\alpha-b-\eta} \sum_{s=n}^{\infty} A_{s-n}^{\eta-1} |\Delta^{\alpha+1-a} \omega_s| =$$

$$= O(1) \sum (s+1)^{\alpha-a-1} |\Delta^{\alpha+1-a} \omega_s| < \infty.$$

3. Остается доказать соответственную оценку для D'_{a-b+1} при $\alpha > a$, $\beta > b$. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, нам удобнее рассматривать B'_{a-b+1}. Здесь придется отдельно исследовать случаи $b \leqslant a$ и $b = a + 1$. Будем сначала рассматривать случай $b \leqslant a$. В этом случае доказательство в основном аналогично случаю 3 доказательства теоремы 1. Действительно, аналогично (9) имеем

$$B'_{a-b+1} = E' + F',$$

где

$$E' = A_{n-\nu}^{\beta-b+a-\alpha-1} \Delta^{a-b+1} \omega_{n+1},$$

$$F' = \sum_{k=\nu}^{n} \Delta^{a+2-b} \omega_k \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-\varkappa}^{\beta-b-1}.$$

Если $\beta - b + a - \alpha \leqslant 0$, то из условия (M) вытекает

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |E'| = O(1) \sum (n+1)^{\alpha-\beta-1} |\Delta^{a-b+1} \omega_k| < \infty.$$

Если же $\beta - b + a - \alpha > 0$, то по лемме 8 из условий (B) и (26) находим

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |E'| = O(1) \sum (n+1)^{a-b-1} |\Delta^{a-b+1} \omega_k| < \infty.$$

Далее, аналогично (10) по лемме 6а из условия (A) получаем

$$F' = C'_{a-b+1} + I' + H',$$

где

$$I' = \sum_{\varkappa=\nu}^{n} A_{n-\varkappa}^{\beta-b-2} \sum_{s=\varkappa+1}^{n} \Delta^{\alpha+1-b} \omega_s \sum_{p=\nu}^{\varkappa} A_{s-p}^{\alpha-a-1} A_{p-\nu}^{a-\alpha-1},$$

$$H' = \sum_{s=n+1}^{\infty} \Delta^{\alpha+1-b} \omega_s \sum_{k=\nu}^{n} A_{s-k}^{\alpha-a-2} \sum_{\varkappa=\nu}^{k} A_{\varkappa-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-\varkappa}^{\beta-b-1}.$$

Выражение C'_{a-b+1} уже оценено в случае 2. Для оценки выражения I' можем при помощи формул (11) и (7) доказать соотношение, аналогичное (12), откуда по лемме 8 и из условий (B) и (26) находим

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} |I'| = O(1) \sum (s+1)^{\alpha-b-1} |\Delta^{\alpha+1-b} \omega_k| < \infty.$$

Далее, как и при оценке выражения S, для оценки выражения H' выберем некоторое число η такое, чтобы $0 < \eta < \eta'$, где $\eta' = \min\,(\alpha - a, \beta - b)$. При таком выборе числа η будет $-1 < \eta - 1$, $\alpha - a - \eta - 1 < 0$, $\beta - b - \eta$, $a - b - \eta > 0$. Из формул (11) и (31) находим

$$H' = O(1) A_{n-\nu}^{\beta-b-1} \sum_{s=n+1}^{\infty} |\Delta^{\alpha+1-b} \omega_s| \sum_{k=\nu}^{n} |A_{s-k}^{\alpha-a-2}| A_{k-\nu}^{a-\alpha} =$$

$$= O(1) A_{n-\nu}^{\beta-b-\eta-1} \sum_{s=n}^{\infty} A_{s-n}^{\eta-1} |\Delta^{\alpha+1-b} \omega_s| < \infty.$$

Отсюда по лемме 8, в силу условий (B) и (26), находим, что

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \, | H' | = O(1) \sum A_n^{\alpha-b-\eta-1} \sum_{s=n}^{\infty} A_{s-n}^{\eta-1} | \Delta^{\alpha+1-a} \omega_s | =$$
$$= O(1) \sum (s+1)^{\alpha-b-1} | \Delta^{\alpha+1-b} \omega_s | < \infty.$$

Обратимся теперь к случаю $b = a + 1$. Предыдущие рассуждения здесь неприменимы, так как лемма 8 предполагает, чтобы показатели разностей ω_n были не меньше единицы. Поэтому для оценки $B'_{a-b+1} = B'_0$ при $b = a + 1$ мы должны перейти обратно от ω_n к ε_n.

Из формулы (5) имеем

$$B'_0 = (a - \alpha) T + (\nu + a - \alpha) V,$$

где

$$T = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha} A_{n-k}^{\beta-b-1} \varepsilon_k ,$$

$$V = \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{a-\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-b-1} \varepsilon_k .$$

Из условия (26) при помощи формулы (7) находим

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \, | T | = O(1) \sum \frac{|\varepsilon_k|}{k+1} < \infty.$$

Что касается выражения V, то, сравнивая его с выражением B_{a-b}, видно, что V можно получить из B_{a-b}, если в последнем заменим $\Delta^{a-b} \varepsilon_k$ на ε_k. Поэтому при помощи соотношений, аналогичных (9) и (20), формулы (7) и леммы 3, из условий (M), (A) и (B) выводим (ибо здесь $\beta - b + a - \alpha - 1 = \beta - \alpha - 2 \leqslant -1$)

$$\sum A_\nu^\alpha \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} (\nu + 1) \, | V | = O(1) \sum A_\nu^{\alpha+1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} \left| A_{n-\nu}^{\beta-b+a-\alpha-1} \varepsilon_{n+1} \right| +$$
$$+ O(1) \sum A_\nu^{\alpha+1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\beta+1}} A_{n-\nu}^{\beta-b-1} \sum_{s=\nu}^{\infty} | \Delta^{\alpha+1-a} \varepsilon_s | = O(1) \sum (n+1)^{\alpha-\beta} |\varepsilon_{n+1}| +$$
$$+ O(1) \sum (s+1)^{\alpha-a} | \Delta^{\alpha+1-a} \varepsilon_s | < \infty.$$

Таким образом, из условий (A), (B) и (M) мы для всех $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha + 1$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$ вывели соотношение (30) и, следовательно, также соотношение (24). Так как по лемме 7 из условий (B) и (M) вытекает условие (A), то теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Andersen, Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, Kopenhagen, 1921.
2. A. F. Andersen, Comparison theorems in the theory of Cesàro summability, Proc. London Math. Soc., 2, **27**, 1928, 39—71.
3. A. F. Andersen, On summability factors of absolutely C-summable series, 12-e Skand. Matematikerkongr. Lund, 1953; Lund, 1954, 1—4.
4. H. Bohr, Sur la série de Dirichlet, C. r. Acad. sci., **148**, 1909, 75—80.
5. H. Bohr, Bidrag til de Dirichlet'ske Raekker's Theorie, Kopenhagen, 1910.
6. L. S. Bosanquet. Note on the Bohr-Hardy theorem, J. London Math. Soc., **17**, 1942, 166—173.
7. L. S. Bosanquet, Note on convergence and summability factors, J. London Math. Soc., **20**, 1945, 39—48.
8. L. S. Bosanquet, Note on convergence and summability factors (III), Proc. London Math. Soc., 2, **50**, 1949, 482—496.
9. L. S. Bosanquet, H. C. Chow, Some remarks on convergence and summability factors, J. London Math. Soc., **32**, 1957, 73—82.
10. T. J. I'A. Bromwich, On the limits of certain infinite series and integrals. Math. Ann. **65**, 1908, 350—369.
11. S. Chapman, On non-integral orders of summability of series and integrals, Proc. London Math. Soc., 2, **9**, 1911, 369—409.
12. H. C. Chow, Note on convergence and summability factors, J. London Math. Soc., **29**, 1954, 459—476.
13. M. Fekete, Summabilitási factor-sorozatok, Math. és termés. ért., **35**, 1917, 309—324.
14. J. Hadamard, Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries, Acta Math., **27**, 1903, 177—183.
15. H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatsh. Math. und Phys., **32**, 1922, 3—88.
16. G. H. Hardy, Generalisation of a theorem in the theory of divergent series, Proc. London Math. Soc., 2, **6**, 1907, 255—264.
17. G. H. Hardy, The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation, Proc. London Math. Soc., 2, **8**, 1909, 277—294.
18. J. D. Hill, H. J. Hamilton, Operation theory and multiple sequence transformations, Duke Math. J., **8**, 1941, 154—162.
19. W. Jurkat, A. Peyerimhoff, Summierbarkeitsfaktoren, Math. Z., **58**, 1953, 186—203.
20. K. Knopp, Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes, J. reine und angew. Math., **187**, 1950, 70—74.
21. K. Knopp, G. Lorentz, Beiträge zur absoluten Limitierung, Arch. Math., **2**, 1949, 10—16.
22. T. Kojima, On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications, Tôhoku Math. J., **12**, 1917, 291—326.
23. A. Peyerimhoff, Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math., Z., **55**, 1951, 23—54.
24. A. Peyerimhoff, Untersuchungen über absolute Summierbarkeit, Math. Z., **57**, 265—290.
25. A. Peyerimhoff, Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen, Math. Z., **59**, 1954, 417—424.
26. A. Peyerimhoff, Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren, Publs Inst. math. Acad. serbe sci., **8**, 1955, 139—156; **10**, 1956, 1—18.
27. I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, J. reine und angew. Math., **151**, 1921. 79—111.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
16. IV 1959

SUMMEERUVUSTEGURITE PÕHITEOREEMIDE UUED TÕESTUSED

S. Baron

Resümee

Käesolevas artiklis antakse uued tõestused $(|C^\alpha|, C^\beta)$, $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, (C^α, C^β), (C^α_0, C^β), $(C^\alpha, |C^\beta|)$, $(C^\alpha_0, |C^\beta|)$ tüüpi summeeruvustegurite jaoks ühekordsete ridade puhul, kus Cesàro menetluse järgud α ja β on mittenegatiivsed reaalarvud. Tõestusmeetod on põhijoontes ühine kõikide vaadeldavate summeeruvustegurite tüüpide korral ja on saadud Knopp'i [20] meetodi üldistamisest, kusjuures on kasutatud ka üksikuid momente Bosanquet' [8], Chow' [12], Hardy' [17] ja Anderseni [1,2] töödest. Esitatud tõestused on kergesti ülekantavad kahekordsetele ridadele.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse 16. IV 1959

NEUE BEWEISE DER HAUPTSÄTZE FÜR SUMMIERBARKEITSFAKTOREN

S. Baron

Zusammenfassung

Vorliegender Aufsatz enthält neue Beweise für Summierbarkeitsfaktoren des Typus $(|C^\alpha|, C^\beta)$, $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, (C^α, C^β), (C^α_0, C^β), $(C^\alpha, |C^\beta|)$, $(C^\alpha_0, |C^\beta|)$. Es wird der Fall der gewöhnlichen Reihen mit nichtnegativen reellen Cesàroschen Ordnungszahlen α, β behandelt. Die Beweismethode ist für alle 4 Theoreme fast einheitlich und ergibt sich als eine Verallgemeinerung der Methode von Knopp [20]; ausserdem werden einige Momente aus den Arbeiten von Bosanquet [8], Chow [12], Hardy [17] und Andersen [1,2] verwendet. Die Beweismethode ist auch im Falle der Doppelreihen leicht anwendbar.

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen am 16. April 1959