EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. IX KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1960, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ IX
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1960, № 1

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА НАКЛОННОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ В ФОТОУПРУГОСТИ

Х. АБЕН,
кандидат технических наук

1. Введение

Метод наклонного просвечивания представляет собой один из наиболее эффективных способов разделения главных напряжений при исследовании плоского напряженного состояния методом фотоупругости. В случае объемного напряженного состояния этот метод позволяет определять касательные напряжения и разности нормальных напряжений.

При наклонном просвечивании можно экспериментально определять как разности квазиглавных напряжений, так и параметры квазиизоклин. Исходя из этого, имеются две возможности для определения компонентов напряжений. В первом случае экспериментально определяются только разности хода. Если рассматривается общий случай объемного напряженного состояния, то этот метод требует произведения пяти просвечиваний и решения системы из пяти нелинейных алгебраических уравнений [4, 19, 20]. Второй метод использует как разности хода, так и параметры квазиизоклин. В общем случае метод требует произведения трех просвечиваний, причем определение компонентов напряжений математических трудностей не представляет [1, 2, 11]. По-видимому, более эффективным можно считать второй метод, использующий как разности хода, так и параметры квазиизоклин.

Хотя идея этого метода была высказана Дракером и Миндлином уже в 1940 г. [2] и общие формулы выведены Красновым в 1944 г.[11], в литературе до сих пор отсутствует систематическое изложение метода. Недостаточно разработан вопрос о применении наклонного просвечивания при определении октаэдрического напряжения, при определении данных для численного интегрирования уравнений равновесия и т. д. Также не рассматривалось применение метода наклонного просвечивания вместе с универсальным методом Федорова в общем случае напряженного состояния.

Целью настоящей статьи является систематическое изложение метода наклонного просвечивания. Исходя из общих формул метода, выводятся выражения для разных практически интересных случаев напряженного состояния. При этом параллельно с применением обычного полярископа рассматривается и применение метода Федорова. Затрагивается вопрос определения данных для численного интегрирования уравнений равновесия. При рассмотрении плоского напряженного состояния дается анализ точности различных формул метода наклонного просвечивания. Оказывается, что наиболее эффективными в этом случае являются выведенные в настоящей работе формулы (42).

2. Общие формулы метода наклонного просвечивания

1. При выводе формул метода наклонного просвечивания используем соотношения

$$\sigma_1' - \sigma_2' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\cos 2\varphi} \tag{1}$$

$$\sigma_1' - \sigma_2' = \frac{2\tau_{xy}}{\sin 2\varphi} \tag{2}$$

где σ_1', σ_2' — квазиглавные напряжения в плоскости x, y; φ — параметр квазиизоклины в той же плоскости.

Таблица 1

	x	y	z
σ_1	α_1	β_1	γ_1
σ_2	α_2	β_2	γ_2
σ_3	α_3	β_3	γ_3

Пусть координатные оси x и y ортогональной правой системы координат x, y, z расположены в плоскости исследуемой пластинки. Главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 произвольно ориентированы относительно координатных осей. Их положение определяется углами, приведенными в табл. 1.

При нормальном просвечивании пластинки получим

$$\delta = \frac{Ct}{\cos 2\varphi}(\sigma_x - \sigma_y) = \frac{2Ct}{\sin 2\varphi}\tau_{xy} \tag{3}$$

где δ — разность хода, C — оптическая постоянная, t — толщина пластинки.

Поворачивая пластинку для наклонного просвечивания около оси x на угол Θ_x, имеем

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta_x \cos 2\varphi_x}(\sigma_x - \sigma_y\cos^2\Theta_x - \sigma_z\sin^2\Theta_x + \tau_{yz}\sin 2\Theta_x) \tag{4}$$

$$\delta_x = \frac{2Ct}{\cos\Theta_x \sin 2\varphi_x}(\tau_{xy}\cos\Theta_x - \tau_{zx}\sin\Theta_x) \tag{5}$$

где δ_x, φ_x — разность хода и параметр квазиизоклины при наклонном просвечивании.

Соотношению (4) можно придать вид

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta_x \cos 2\varphi_x}[(\sigma_x - \sigma_y) + (\sigma_y - \sigma_z)\sin^2\Theta_x + \tau_{yz}\sin 2\Theta_x] \tag{6}$$

Аналогично получим для поворота около оси y

$$\delta_y = \frac{Ct}{\cos\Theta_y \cos 2\varphi_y}[(\sigma_x - \sigma_y) + (\sigma_z - \sigma_x)\sin^2\Theta_y + \tau_{zx}\sin 2\Theta_y] \tag{7}$$

$$\delta_y = \frac{2Ct}{\cos\Theta_y \sin 2\varphi_y}(\tau_{xy}\cos\Theta_y + \tau_{yz}\sin\Theta_y) \tag{8}$$

Знак касательных напряжений соответствует правилу, принятому в теории упругости. За положительное направление отсчета углов Θ_x и Θ_y надо принять направление от положительной ветви оси i к положительной ветви оси j.

Так как в выражения (3) и (5) — (8), кроме касательных напряжений, входят только разности нормальных напряжений, то метод наклонного просвечивания не позволяет полностью определять объемное напряженное состояние.

Производя нормальное и два наклонных просвечивания, из выражений (3) — (8) определяются касательные напряжения и разности нормальных напряжений. Для наклонного просвечивания можно модель поворачивать также около одной оси на разные углы. Поворачивая модель около оси x на угол Θ'_x и определяя при этом δ'_x и φ'_x, получим еще два соотношения, аналогичные (5) и (6), которые вместе с (3) — (6) и соотношением

$$(\sigma_1-\sigma_2)+(\sigma_2-\sigma_3)+(\sigma_3-\sigma_1)=(\sigma_x-\sigma_y)+(\sigma_y-\sigma_z)+ \\ +(\sigma_z-\sigma_x)=0 \tag{9}$$

позволяют определять искомые компоненты напряженного состояния.

Учитывая выражение (9), мы имеем пять независимых неизвестных. Однако в формулы для их определения входят шесть экспериментальных величин: δ, δ_x, δ_y, φ, φ_x, φ_y или δ, δ_x, δ'_x, φ, φ_x, φ'_x. Следовательно, одна из экспериментальных величин является лишней. Из выведенных формул можно получить следующие зависимости между экспериментальными величинами:

$$\cos^2\Theta_y[\delta_x\cos\Theta_x\cos 2\varphi_x-\delta\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\Theta_x\operatorname{ctg}\Theta_y\,(\delta\sin 2\varphi- \\ -\delta_y\sin 2\varphi_y)]=\sin^2\Theta_x\,[-\delta_y\cos\Theta_y\cos 2\varphi_y+\delta\cos 2\varphi\cos^2\Theta_y+ \\ +\frac{1}{2}\sin 2\Theta_y\operatorname{ctg}\Theta_x\,(\delta\sin 2\varphi-\delta_x\sin 2\varphi_x)] \tag{10}$$

$$\operatorname{ctg}\Theta_x\,(\delta_x\sin 2\varphi_x-\delta\sin 2\varphi)=\operatorname{ctg}\Theta'_x\,(\delta'_x\sin 2\varphi'_x-\delta\sin 2\varphi) \tag{11}$$

2. Компоненты напряженного состояния выражаются через главные напряжения формулами

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_1\cos^2\alpha_1+\sigma_2\cos^2\alpha_2+\sigma_3\cos^2\alpha_3\\ \sigma_y&=\sigma_1\cos^2\beta_1+\sigma_2\cos^2\beta_2+\sigma_3\cos^2\beta_3\\ \sigma_z&=\sigma_1\cos^2\gamma_1+\sigma_2\cos^2\gamma_2+\sigma_3\cos^2\gamma_3\\ \tau_{xy}&=\sigma_1\cos\alpha_1\cos\beta_1+\sigma_2\cos\alpha_2\cos\beta_2+\sigma_3\cos\alpha_3\cos\beta_3\\ \tau_{yz}&=\sigma_1\cos\beta_1\cos\gamma_1+\sigma_2\cos\beta_2\cos\gamma_2+\sigma_3\cos\beta_3\cos\gamma_3\\ \tau_{zx}&=\sigma_1\cos\gamma_1\cos\alpha_1+\sigma_2\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\sigma_3\cos\gamma_3\cos\alpha_3\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Используя известные соотношения между косинусами углов α_i, β_i, γ_i, получим из (12)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x-\sigma_y&=(\sigma_1-\sigma_3)\,(\cos^2\alpha_1-\cos^2\beta_1)+(\sigma_2-\sigma_3)\,(\cos^2\alpha_2-\cos^2\beta_2)\\ \sigma_y-\sigma_z&=(\sigma_1-\sigma_3)\,(\cos^2\beta_1-\cos^2\gamma_1)+(\sigma_2-\sigma_3)\,(\cos^2\beta_2-\cos^2\gamma_2)\\ \sigma_z-\sigma_x&=(\sigma_1-\sigma_3)\,(\cos^2\gamma_1-\cos^2\alpha_1)+(\sigma_2-\sigma_3)\,(\cos^2\gamma_2-\cos^2\alpha_2)\\ \tau_{xy}&=(\sigma_1-\sigma_3)\cos\alpha_1\cos\beta_1+(\sigma_2-\sigma_3)\cos\alpha_2\cos\beta_2\\ \tau_{yz}&=(\sigma_1-\sigma_3)\cos\beta_1\cos\gamma_1+(\sigma_2-\sigma_3)\cos\beta_2\cos\gamma_2\\ \tau_{zx}&=(\sigma_1-\sigma_3)\cos\gamma_1\cos\alpha_1+(\sigma_2-\sigma_3)\cos\gamma_2\cos\alpha_2\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из (3) и (13) имеем

$$\delta=\frac{Ct}{\cos 2\varphi}[(\sigma_1-\sigma_3)\,(\cos^2\alpha_1-\cos^2\beta_1)+(\sigma_2-\sigma_3)\,(\cos^2\alpha_2-\cos^2\beta_2)] \tag{14}$$

$$\delta=\frac{2Ct}{\sin 2\varphi}\,[(\sigma_1-\sigma_3)\cos\alpha_1\cos\beta_1+(\sigma_2-\sigma_3)\cos\alpha_2\cos\beta_2] \tag{15}$$

Далее, (5), (6) и (13) дают

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta_x \cos 2\varphi_x}\{(\sigma_1-\sigma_3)[\cos^2\alpha_1-(\cos\beta_1\cos\Theta_x-\cos\gamma_1\sin\Theta_x)^2]+$$
$$+(\sigma_2-\sigma_3)[\cos^2\alpha_2-(\cos\beta_2\cos\Theta_x-\cos\gamma_2\sin\Theta_x)^2]\} \qquad (16)$$

$$\delta_x = \frac{2Ct}{\cos\Theta_x \sin 2\varphi_x}[(\sigma_1-\sigma_3)\cos\alpha_1(\cos\beta_1\cos\Theta_x-\cos\gamma_1\sin\Theta_x)+$$
$$+(\sigma_2-\sigma_3)\cos\alpha_2(\cos\beta_2\cos\Theta_x-\cos\gamma_2\sin\Theta_x)] \qquad (17)$$

При поляризационно-оптических исследованиях эффективно применяется универсальный метод Федорова [5, 9, 16, 20]. Этот метод позволяет определять направления главных напряжений в исследуемой точке, т. е. углы α_i, β_i и γ_i. В этом случае выражения (14) и (15) содержат две неизвестные величины $(\sigma_1-\sigma_3)$ и $(\sigma_2-\sigma_3)$. Легко доказать, что выражения (14) и (15) не являются линейно зависимыми. Следовательно, достаточно произвести только нормальное просвечивание модели, чтобы определить разности главных напряжений. Существенно, что при применении предложенной методики срезы могут быть ориентированы относительно главных напряжений произвольно.

Отметим, что вторая возможность для установления разностей главных напряжений заключается в определении угла между оптическими осями оптического эллипсоида вместе с измерением одной из разностей главных напряжений [5].

3. Если при поляризационно-оптических исследованиях определяются только разности хода, то, произведя пять просвечиваний, получим систему уравнений [4, 20]:

$$\delta_{xi} = \frac{Ct}{\cos\Theta_{xi}}\{[(\sigma_x-\sigma_y)+$$
$$+(\sigma_y-\sigma_z)\sin^2\Theta_{xi}+\tau_{yz}\sin 2\Theta_{xi}]^2+4(\tau_{xy}\cos\Theta_{xi}-\tau_{zx}\sin\Theta_{xi})^2\}^{1/2} \qquad (18)$$

где $i=1,2,3,4,5$. По-видимому, этот метод является слишком громоздким для применения на практике.

В случае металлических конструкций напряженное состояние характеризуется наиболее полно октаэдрическим напряжением

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{3}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]^{1/2} \qquad (19)$$

В статье [13] предлагается для определения октаэдрического напряжения производить три перпендикулярных нормальных просвечивания вырезанного из объемной модели параллелепипеда. Выведенные выше формулы позволяют при помощи исследования одного среза определять величины, входящие в формулу (19).

3. Применение наклонного просвечивания при решении объемной задачи

1. Как уже отмечалось выше, методом наклонного просвечивания невозможно полностью определить объемное напряженное состояние. Для полного решения объемной задачи имеются два метода.

Первый метод предложен Куске [12] и заключается в измерении поперечной деформации пластинки ε_z при размораживании напряжений. Из закона Гука получается дополнительная зависимость

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 + \sigma_3 L_3) = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_z - \frac{\mu}{E}(\sigma_y - \sigma_z) + \\ + \frac{\mu}{E}(\sigma_z - \sigma_x) \qquad (20)$$

где $L_i = (1+\mu)\cos^2\gamma_i - \mu$; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона. Выражение (20) позволяет вместе с данными метода наклонного просвечивания полностью определять напряженное состояние.

2. Второй метод впервые предложен Красновым [10]. Метод заключается в численном интегрировании уравнений равновесия объемной задачи теории упругости. Интегрируя, например, уравнение

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad (21)$$

относительно x и выражая результат в конечных разностях, получим

$$\sigma_x^n = \sigma_x^0 - \sum_{i=1}^{n}(\Delta_y\tau_{xy}^i)\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} - \sum_{i=1}^{n}(\Delta_z\tau_{zx}^i)\frac{\Delta x_i}{\Delta z_i} \qquad (22)$$

где σ_x^0 — значение σ_x в начальной точке пути интегрирования.

В статье [7] для определения величин, необходимых для численного интегрирования уравнений равновесия, предлагается применять следующие методы:

1) метод трех моделей с нормальным просвечиванием трех срезов, вырезанных из них перпендикулярно друг другу;

2) метод двух моделей с исследованием двух перпендикулярных срезов и с применением наклонного просвечивания одного среза;

3) метод одной модели с нормальным просвечиванием срезов и субсрезов.

Следует отметить, что применение нескольких моделей при получении данных для численного интегрирования уравнений равновесия нежелательно. При эксперименте трудно создать несколько моделей с одинаковым напряженным состоянием, что может привести к большим ошибкам в результатах. Метод субсрезов связан с большими экспериментальными трудностями, так как требует исследования весьма миниатюрных моделей.

Методом наклонного просвечивания можно получить данные для применения метода разности касательных напряжений при помощи одной модели, исследуя два параллельных среза. Производя нормальное и два наклонных просвечивания первого среза, получим величины $(\sigma_x - \sigma_y)$, $(\sigma_y - \sigma_z)$, $(\sigma_z - \sigma_x)$, τ_{xy}, τ_{yz} и τ_{zx}. Предполагая, что оси x и y находятся в плоскости среза, можем также определить величину $\Delta_y \tau_{xy}$. Чтобы найти $\Delta_z \tau_{zx}$ в (22), необходимо определить τ_{zx} во втором срезе, расположенном на расстоянии Δz от первого. Для этого приходится производить нормальное и одно наклонное просвечивание второго среза.

Таким образом, исследованием двух параллельных срезов, вырезанных из одной модели, можно полностью определить напряженное состояние в одной плоскости модели. Распиливая модель на параллельные срезы, можно определить напряженное состояние во всех точках модели, используя для определения $\Delta_z \tau_{zx}$ значения τ_{zx} в соседних срезах.

3. Если два главных напряжения находятся в плоскости среза, то выведенные формулы упрощаются. Пусть σ_1 и σ_2 находятся в плоскости среза. В этом случае $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$, $\beta_1 = 90° - \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 90°$, $\gamma_3 = 0$, $\varphi = \alpha_1$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Из (3) и (6) имеем

$$\delta = \frac{Ct}{\cos 2\alpha_1} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{2Ct}{\sin 2\alpha_1} \tau_{xy} \tag{23}$$

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos \Theta_x \cos 2\varphi_x} [(\sigma_x - \sigma_y) + (\sigma_y - \sigma_z) \sin^2 \Theta_x] \tag{24}$$

Для исключения одной из экспериментальных величин получим из (5) и (23) соотношение

$$\delta_x \sin 2\varphi_x = \delta \sin 2\alpha_1 \tag{25}$$

Для рассматриваемого случая выражения (14) и (16) примут вид

$$\delta = Ct(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{26}$$

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos \Theta_x \cos 2\varphi_x} [(\sigma_1 - \sigma_3)(\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \Theta_x) + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \Theta_x)] \tag{27}$$

Если два главных напряжения находятся в плоскости модели и поворот модели производится около главного напряжения σ_1, то, учитывая, что $\alpha_1 = 0$, имеем из (27)

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos \Theta_x} [(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_2 - \sigma_3) \cos^2 \Theta_x] \tag{28}$$

Выражению (28) можно придать известный из литературы [16] вид

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos \Theta_x} (\sigma_1 - \sigma_2 \cos^2 \Theta_x - \sigma_3 \sin^2 \Theta_x) \tag{29}$$

4. При определении напряжений на свободном контуре объемной модели часто используются срезы, перпендикулярные к контуру. Пусть оси x и y находятся в плоскости среза и ось y совпадает с нормалью контура. Учитывая, что $\sigma_y = \sigma_3 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 90°$, $\gamma_1 = 90° - \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_1$, $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$, $\varphi = 0$, получим из (14) и (16)

$$\delta = Ct(\sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1) \tag{30}$$

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta_x \cos 2\varphi_x} [\sigma_1 (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \Theta_x) + \sigma_2 (\sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \Theta_x)] \tag{31}$$

Вместо (30) можно использовать и соотношение, получаемое из (17)

$$\delta_x = \frac{Ct \sin 2\alpha_1 \operatorname{tg} \Theta_x}{\sin 2\varphi_x} (\sigma_1 - \sigma_2) \tag{30^1}$$

Соотношения (31) и (30^1) позволяют определять напряжения при помощи одного только наклонного просвечивания.

Вторая возможность для определения σ_1 и σ_2, если угол α_1 определяется универсальным методом Федорова, заключается в повороте модели около оси y [16]. В этом случае необходимо произвести два просвечивания модели.

Если исследования производятся при помощи обычного полярископа, то, по предложению Хиксона [8], приходится производить три просвечивания модели, поворачивая ее около оси y. Определяя при эксперименте также параметр квазиизоклины, достаточно произвести два просвечивания модели. В этом случае формулы удобнее выписывать в компонентах напряжений на осях x и z. При нормальном просвечивании получим

$$\delta = Ct\sigma_x \tag{32}$$

Поворачивая модель для наклонного просвечивания около оси x, имеем

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta_x \cos 2\varphi_x} (\sigma_x - \sigma_z \sin^2\Theta_x) = \frac{2Ct \operatorname{tg}\Theta_x}{\sin 2\varphi_x} \tau_{zx} \tag{33}$$

Если нагрузка на контуре известна, то аналогично изложенному выше можно получить формулы также для случая $\sigma_y = \sigma_3 \neq 0$.

4. Применение наклонного просвечивания при решении плоской задачи

1. Если $\sigma_z = \sigma_3 = 0$, то из (23) и (24) имеем

$$\delta = \frac{Ct}{\cos 2\alpha} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{2Ct}{\sin 2\alpha} \tau_{xy} \tag{34}$$

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta \cos 2\varphi} (\sigma_x - \sigma_y \cos^2\Theta) \tag{35}$$

В (34) и (35) индексы у α, φ и Θ опущены.

Из (27) получим

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta \cos 2\varphi}[\sigma_1 (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\Theta) + \sigma_2 (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \cos^2\Theta)] \tag{36}$$

Если поворот модели осуществляется около главного напряжения $\sigma_1 (\alpha = 0)$, то из (36) имеем

$$\delta_1 = \frac{Ct}{\cos\Theta} (\sigma_1 - \sigma_2 \cos^2\Theta) \tag{37}$$

и для поворота около $\sigma_2 (\alpha = 90°)$

$$\delta_2 = \frac{Ct}{\cos\Theta} (\sigma_1 \cos^2\Theta - \sigma_2) \tag{38}$$

Формулы (37) и (38) предложены Дракером [3].

Измеряя при эксперименте только разности хода, получим из (18) следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta^2}{C^2t^2} &= 4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ \frac{\delta_1^2\cos^2\Theta_{x1}}{C^2t^2} &= 4(\tau_{xy}\cos\Theta_{x1})^2 + (\sigma_x - \sigma_y\cos^2\Theta_{x1})^2 \\ \frac{\delta_2^2\cos^2\Theta_{x2}}{C^2t^2} &= 4(\tau_{xy}\cos\Theta_{x2})^2 + (\sigma_x - \sigma_y\cos^2\Theta_{x2})^2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Система (39) хорошо известна из литературы [4, 6]. Решение ее упрощается, если повороты модели осуществлять на равные углы около перпендикулярных осей [4].

2. В работах [14, 17, 18] для разделения главных напряжений предлагается формула

$$\delta_x = \frac{Ct}{\cos\Theta}[\sigma_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\Theta) + \sigma_2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\Theta)] \tag{40}$$

В подстрочном примечании к русскому переводу монографии Фрохта ([6], стр. 409) отмечается, что формулу (40) можно использовать с достаточной точностью. Выведенная выше формула (36) отличается от (40) членом $\cos 2\varphi$ в знаменателе правой части. Следовательно, формула (40) отождествляет разность квазиглавных напряжений с разностью нормальных напряжений на осях x и y' ($y' \perp x$, $< y'y = \Theta$), что является ошибочным. Это явствует из формулы (1). В ошибочности формулы (40) легко убедиться, предполагая, что $\Theta = 0$, т. е. рассматривая случай нормального просвечивания. В этом случае из (40) имеем

$$\delta = Ct(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha \tag{41}$$

что противоречит классической формуле фотоупругости.

3. Из (26) и (36) получим следующие выражения для главных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{Ct\sin^2\Theta}[\delta_x\cos\Theta\cos 2\varphi + \delta(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\Theta)] \\ \sigma_2 &= \frac{1}{Ct\sin^2\Theta}[\delta_x\cos\Theta\cos 2\varphi - \delta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\Theta)] \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Для случая поворота модели около σ_1 ($\alpha = 0$, $\varphi = 0$ или $\varphi = 90^\circ$) имеем из (42)

$$\sigma_1 = \frac{\cos\Theta}{Ct\sin^2\Theta}(\delta_x - \delta\cos\Theta), \quad \sigma_2 = \frac{1}{Ct\sin^2\Theta}(\delta_x\cos\Theta - \delta) \tag{43}$$

и для поворота около σ_2 ($\alpha = 90^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ или $\varphi = 0$)

$$\sigma_1 = \frac{1}{Ct\sin^2\Theta}(\delta - \delta_x\cos\Theta), \quad \sigma_2 = \frac{\cos\Theta}{Ct\sin^2\Theta}(\delta\cos\Theta - \delta_x) \tag{44}$$

В выражениях (43) и (44) δ_x является положительной, если $\varphi = \alpha$ и отрицательной, если $\varphi = \alpha \pm 90^\circ$. Так как φ является углом между осью x и алгебраически большим квазиглавным напряжением σ_1', то $\cos 2\varphi$ может быть положительной или отрицательной величиной.

Из (34) и (35) имеем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{Ct \sin^2\Theta} (\delta_x \cos\Theta \cos 2\varphi - \delta \cos^2\Theta \cos 2\alpha) \\ \sigma_y &= \frac{1}{Ct \sin^2\Theta} (\delta_x \cos\Theta \cos 2\varphi - \delta \cos 2\alpha) \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta \sin^2 2\alpha}{2Ct} \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

4. Как известно, в случае плоской задачи напряженное состояние в точке определяется полностью тремя величинами. В выражения (42) и (45), кроме Θ, входят четыре экспериментальные величины δ, δ_x, α и φ. Следовательно, одна экспериментальная величина является лишней. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Отмечая напряжения при наклонном просвечивании черточкой, определяем параметр квазиизоклины формулой

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau'_{xy}}{\sigma'_x - \sigma'_y} \quad (46)$$

Используя выражения

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha, \quad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha \\ &\sigma'_x = \sigma_x, \quad \sigma'_y = \sigma_y \cos^2\Theta, \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \quad \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cos\Theta \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

имеем из (46) после некоторых преобразований

$$\sigma_1 + \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \cos^2\Theta + \dfrac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cos\Theta}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\Theta - \dfrac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cos\Theta} \sigma_2 = 0 \quad (48)$$

Из (26) и (48) получим следующие выражения для определения главных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\delta}{Ct \sin^2\Theta} \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \cos^2\Theta + \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cos\Theta\right) \\ \sigma_2 &= -\frac{\delta}{Ct \sin^2\Theta} \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\Theta - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cos\Theta\right) \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Используя выражения (49), при наклонном просвечивании требуется определить только параметр квазиизоклины.

Из (36) и (48) имеем

$$\delta_x \sin 2\varphi = \delta \sin 2\alpha \quad (50)$$

Исключая при помощи (50) из (42) $\cos 2\varphi$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{Ct \sin^2\Theta} \left[\cos\Theta \sqrt{\delta_x^2 - \delta^2 \sin^2 2\alpha} + \delta (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \cos^2\Theta)\right] \\ \sigma_2 &= \frac{1}{Ct \sin^2\Theta} \left[\cos\Theta \sqrt{\delta_x^2 - \delta^2 \sin^2 2\alpha} - \delta (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\Theta)\right] \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Формулы (49) и (51) несколько другим путем выведены Дракером [4].

Из (35) и (50) имеем

$$\sigma_x - \sigma_y \cos^2\Theta = \frac{\delta \sin 2\alpha \cos\Theta}{Ct\,\mathrm{tg}\,2\varphi} \tag{52}$$

Соотношения (34) и (52) дают

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\delta}{Ct\sin^2\Theta}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\mathrm{tg}\,2\varphi}\cos\Theta - \cos^2\Theta\cos 2\alpha\right) \\ \sigma_y &= \frac{\delta}{Ct\sin^2\Theta}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\mathrm{tg}\,2\varphi}\cos\Theta - \cos 2\alpha\right) \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Используя (50), имеем из (45):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{Ct\sin^2\Theta}\left(\cos\Theta\sqrt{\delta_x^2 - \delta^2\sin^2 2\alpha} - \delta\cos^2\Theta\cdot\cos 2\alpha\right) \\ \sigma_y &= \frac{1}{Ct\sin^2\Theta}\left(\cos\Theta\sqrt{\delta_x^2 - \delta^2\sin^2 2\alpha} - \delta\cos 2\alpha\right) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

В выражения (51) и (54) не входит параметр квазиизоклины φ. Однако в этих выражениях остается неопределенным знак квадратного корня. Из сравнения (51) и (54) с (42) и (45) видно, что знак квадратного корня совпадает со знаком величины $\cos 2\varphi$. Поэтому все-таки необходимо хотя бы приближенно определить φ.

Таким образом, для определения напряженного состояния методом двух просвечиваний мы получили шесть групп формул: (42), (45), (49), (51), (53) и (54).

5. Для выяснения, какие из методов наклонного просвечивания более пригодны для применения на практике, приходится рассмотреть чувствительность их к экспериментальным ошибкам.

Легко убедиться, что подставляя в формулу

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{55}$$

выражения σ_x, σ_y и τ_{xy} из (45), получим формулы (42). Следовательно, применение выражений (45) не повышает точности результатов по сравнению с выражениями (42). То же самое можно сказать и о формулах (53) и (49), а также (54) и (51). Поэтому будем из формул метода двух просвечиваний рассматривать только выражения (42), (49) и (51), дающие непосредственно главные напряжения.

Если экспериментальные ошибки не являются слишком большими, то предельная абсолютная ошибка при определении некоторого напряжения σ_n выражается в виде

$$\Delta\sigma_n = \sum_i \frac{\partial\sigma_n}{\partial\Theta_i}\Delta\Theta_i + \sum_i \frac{\partial\sigma_n}{\partial\delta_i}\Delta\delta_i + \frac{\partial\sigma_n}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\sigma_n}{\partial\varphi}\Delta\varphi \tag{56}$$

где $\Delta\Theta_i$, $\Delta\delta_i$, $\Delta\alpha$, $\Delta\varphi$ — предельные абсолютные ошибки экспериментальных величин.

В работе [4] приведен анализ точности некоторых методов разделения главных напряжений с применением наклонного просвечивания. В указанной работе сравнивалась точность формул (51) с методом трех просвечиваний, если поворот модели производится около перпендикулярных осей на равные углы, и с методом Норриса и Восса [15] (описание метода дано также в статье [4]). Последний заключается в определении разностей хода при нормальном просвечивании и при двух наклонных просвечиваниях с поворотом модели на равные углы около перпендикулярных осей. Кроме того, методом лаковых покрытий определяется угол α. Формула Норриса и Восса следующая ($\Theta_x = \Theta_y = \Theta$):

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2Ct}\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\Theta}{1+\cos^2\Theta}\,\frac{\delta_x^2-\delta_y^2}{\delta\cos 2\alpha} \pm \delta\right) \tag{57}$$

Тем не менее на основе анализа, проведенного в работе [4], нельзя судить о целесообразности применения различных методов, так как в ней рассматривались не наибольшие возможные ошибки их, а ошибки при заданных экспериментальных данных. Для получения объективного представления о сравнительной точности различных методов необходимо исходить из общего выражения ошибки (56) и суммировать ошибки от погрешностей всех экспериментальных величин.

В табл. 2 приведены величины предельных абсолютных ошибок всех известных нам методов разделения главных напряжений, использующих наклонное просвечивание. Результаты даны для семи наиболее характерных случаев напряженного состояния. Сравнение ошибок при рассмотренных экстремальных случаях, по-видимому, позволит судить о том, какие методы более эффективны для определения напряженного состояния.

В первых трех графах таблицы приведены ошибки формул метода двух просвечиваний. В четвертой графе дана ошибка метода Норриса и Восса [15]. В пятой графе приведены ошибки метода трех просвечиваний с измерением только разностей хода, если поворот производится около перпендикулярных осей на равные углы. В шестой графе даны ошибки того же метода, когда поворот осуществляется около единой оси на разные углы. Так как в случаях $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$ ошибки метода VI при $\alpha = 0°$, $\alpha = 45°$ и $\alpha = 90°$ остаются неопределимыми, то они вычислены для случаев $\alpha = 1°$, $\alpha = 46°$ и $\alpha = 89°$. При вычислении ошибок принято $\Theta = \Theta_x = \Theta_y = 45°$, $\Theta_{x1} = 45°$, $\Theta_{x2} = 30°$.

Из табл. 2 видно, что только методы I и VI применимы во всех случаях напряженного состояния. Однако метод I является более точным, чем метод VI. Ошибки методов II—V в некоторых экстремальных случаях бесконечно велики. Поэтому, несмотря на то, что в некоторых случаях они дают меньшие ошибки, чем метод I, область их применения ограничена. Учитывая еще и сложность экспериментального осуществления методов IV и V, можно заключить, что наиболее эффективным является метод двух просвечиваний.

Только в случае $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$ и $\alpha = 45°$ метод II дает более точные результаты, чем метод I, причем разница весьма несущественная. Так как метод I применим для всех случаев напряженного состояния, можно заключить, что при наклонном просвечивании целесообразно применять метод двух просвечиваний с использованием формул (42).

В случае поворота модели около главного напряжения формулы (42) также дают более точные результаты, чем формулы (43) и (44). Действительно, α определяется некоторой ошибкой, вследствие чего поворот модели осуществляется около оси, отклоненной на угол $\Delta\alpha$ относительно главного напряжения. Однако маленькое отклонение угла α от нуля может повлечь за собой значительное отклонение угла φ от нуля. В этом случае формулы (43) и (44) уже недействительны.

Таблица 2

	$\alpha°$	I. Формулы (42) $\delta, \delta_x, \alpha, \varphi$		II. Формулы (49) δ, α, φ		III. Формулы (51) δ, δ_x, α		IV. Формулы (57) $\Theta_x = \Theta_y = 45°$ $\delta, \delta_x, \delta_y, \alpha$		V. Система (39) $\Theta_x = \Theta_y = 45°$ $\delta, \delta_x, \delta_y$		VI. Система (39) $\Theta_{x1} = 45°, \Theta_{x2} = 30°$ $\delta, \delta_{x1}, \delta_{x2}$	
		$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_x$	$\Delta\sigma_y$	$\Delta\sigma_x$	$\Delta\sigma_y$
$\sigma_1 = +1$ $\sigma_2 = +1$		$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$		∞		$3{,}0\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$		∞		$5{,}8\Delta\Theta + 2{,}8\Delta\delta$		$7{,}0\Delta\Theta + 3{,}8\Delta\delta$	$13{,}0\Delta\Theta + 6{,}3\Delta\delta$
$\sigma_1 = +1$ $\sigma_2 = 0$	0	$2{,}0\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	$2{,}0\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	∞		$2{,}0\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	$2{,}0\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	$2{,}5\Delta\Theta + 2{,}1\Delta\delta$	$2{,}5\Delta\Theta + 3{,}6\Delta\delta$	$5{,}8\Delta\Theta + 8{,}8\Delta\delta$	∞	$4{,}7\Delta\Theta + 5{,}4\Delta\delta$	$75{,}6\Delta\Theta + 101{,}2\Delta\delta$
	45	$1{,}5\Delta\Theta + 1{,}0\Delta\delta + 5{,}8\Delta\alpha$		$1{,}5\Delta\Theta + \Delta\delta + 6{,}2\Delta\alpha$	$1{,}5\Delta\Theta + 6{,}2\Delta\alpha$	$1{,}5\Delta\Theta + 7{,}9\Delta\delta + 6\Delta\alpha$		∞		$3{,}6\Delta\Theta + 8{,}3\Delta\delta$		$4{,}3\Delta\Theta + 21{,}5\Delta\delta$	$15{,}4\Delta\Theta + 50{,}0\Delta\delta$
	90	$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	∞		$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	$2{,}5\Delta\Theta + 3{,}6\Delta\delta$	$2{,}5\Delta\Theta + 2{,}1\Delta\delta$	∞	$5{,}8\Delta\Theta + 8{,}8\Delta\delta$	$10{,}1\Delta\Theta + 36{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$
$\sigma_1 = +1$ $\sigma_2 = -1$	0	$\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	∞		$\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	$1{,}9\Delta\delta$		$5{,}8\Delta\Theta + 16{,}5\Delta\delta$		$1{,}3\Delta\Theta + 1{,}8\Delta\delta$	$2{,}0\Delta\Theta + 3{,}5\Delta\delta$
	45	$\Delta\Theta + 0{,}5\Delta\delta + 12\Delta\alpha$		$0{,}5\Delta\delta + 11{,}6\Delta\alpha$		∞		∞		∞		$38{,}4\Delta\Theta + 26{,}4\Delta\delta$	$38{,}4\Delta\Theta + 28{,}8\Delta\delta$
	90	$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	∞		$\Delta\Theta + 3{,}4\Delta\delta$	$\Delta\Theta + 2{,}4\Delta\delta$	$1{,}9\Delta\delta$		$5{,}8\Delta\Theta + 16{,}5\Delta\delta$		$2{,}0\Delta\Theta + 3{,}5\Delta\delta$	$1{,}3\Delta\Theta + 1{,}8\Delta\delta$

В заключение отметим, что все изложенное в этом разделе действительно также для главной плоскости объемной модели, так как соответствующие формулы совершенно аналогичны. Приходится только заменить σ_1 на $(\sigma_1 - \sigma_3)$ и σ_2 на $(\sigma_2 - \sigma_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Бокштейн, Исследование напряжений с использованием рассеянного света, Сб. статей: Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, Изд. АН СССР, 1956.
2. D. C. Drucker, R. D. Mindlin, Stress Analysis by Three-Dimensional Photoelastic Methods, J. Appl. Phys., **11**, 11, 1940.
3. D C. Drucker, Photoelastic Separation of Principal Stresses by Oblique Incidence, J. Appl. Mech., **10**, 3, 1943.
4. D. C. Drucker, The Method of Oblique Incidence in Photoelasticity, Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, **8**, 1, 1950.
5. R. Fleury, F. Zandman, Emploi de la platine Federoff pour la détermination des trois différences des tensions principales dans les modèles figés, Compt. Rend. Acad. Sci., **239**, 3, 1954.
6. М. М. Фрохт, Фотоупругость, т. 2, М.—Л., 1950.
7. M. M. Frocht, R. Guernsey, Further Work at the General Three-Dimensional Photoelastic Problem, J. Appl. Mech., **22**, 2, 1955.
8. V. M. Hickson, Photoelastic Determination of Free Boundary Stresses of Frozen Stress Models by an Oblique Incidence Method, Brit. J. Appl. Phys., **2**, 9, 1951.
9. H. T. Jessop, M. K. Wells, The Determination of the Principal Stress Differences at a Point in a Three-Dimensional Photoelastic Model, Brit. J. Appl. Phys., **1**, 7, 1950.
10. В. М. Краснов, О решении пространственной задачи теории упругости оптическим методом, Уч. зап. ЛГУ, серия мат. наук, № 44, 1939.
11. В. М. Краснов, К решению пространственной задачи теории упругости оптическим методом, Уч. зап. ЛГУ, серия мат. наук, № 87, 1944.
12. A. Kuske, Das Kunstharz Phenolformaldehyd in der Spannungsoptik, Fors. Geb. Ingenieurwesens, **9**, 139—149, 1938.
13. M. M. Leven, A. M. Wahl, Three-Dimensional Photoelasticity and Its Application in Machine Design, Paper Amer. Soc. Mech. Engrs., No. 57-A-87, 1957.
14. Машиностроение, Энциклопедический справочник, т. 3, 1947.
15. C. B. Norris, A. W. Voss, An Improved Photoelastic Method for Determining Plane Stresses, NACA, Techn. Note, No. 1410, 1948.
16. А. К. Прейсс, Определение напряжений с применением «замораживания», Сб. статей: Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, Изд. АН СССР, 1956.
17. Н. И. Пригоровский, А. К. Прейсс, Исследование напряженного состояния на прозрачных объемных моделях в пучке параллельных лучей поляризованного света, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1949.
18. Н. И. Пригоровский, Современное развитие поляризационно-оптического метода исследования напряжений, Заводск. лаборатория, т. 15, № 3, 1949.
19. В. М. Прошко, Определение компонентов напряжений в точке по результатам оптического исследования объемной задачи, Тр. МИИТ, вып. 74, 1950.
20. F. Zandman, Emploi de la platine théodolite dans la photoélasticimétrie tridimensionelle, Analyse contraintes, **2**, 6, 1955.

Институт энергетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6. V 1959

KALDVALGUSTUSMEETODI KASUTAMISEST FOTOELASTSUSES

H. Aben,
tehnikakandidaat

Resümee

Lähtudes eeldusest, et kaldkiirtega valgustamisel määratakse eksperimentaalselt nii faasinihked kui ka quasiisokliinide parameetrid, tuletatakse kaldvalgustusmeetodi valemid nii ruumilise pingeolukorra üldjuhu kui ka mõningate praktikale huvi pakkuvate erijuhtude kohta. Paralleelselt hariliku polariskoobi kasutamisega vaadeldakse ka Fjodorovi universaalse meetodi kasutamist. Käsitletakse kaldvalgustusmeetodi rakendamist andmete saamisel ruumilise pingeolukorra täielikuks määramiseks nihkepingete diferentsi või põikdeformatsioonide mõõtmise meetodil. Tasapinnalise pingeolukorra vaatlemisel analüüsitakse erinevate kaldvalgustusmeetodite täpsust peapingete eraldamisel (tabel 2). Selgub, et sel juhul osutuvad kõige efektiivsemaks valemid (42).

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse
6. V 1959

ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF OBLIQUE INCIDENCE IN PHOTOELASTICITY

H. Aben

Summary

Formulas of the method of oblique incidence for general and some specific states of stress have been derived. It is assumed that by oblique incidence retardation values as well as parameters of isoclinics are determined. In addition to the use of common polariscope the application of the universal stage of Fedorov is considered. The application of the oblique incidence method with the shear-difference method and with mechanical strain measurement in separating principal stresses has been studied. For the plane state of stress an analysis of the errors of various oblique incidence methods is presented (Table 2). It is shown that in this case formulas (42) are most effective.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Energetics

Received
May 6th, 1959