

## О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Н. АЛУМЯЭ,

член-корреспондент Академии наук Эстонской ССР

При изучении малых установившихся упругих осесимметрических колебаний усеченной конической оболочки вращения обнаруживается, что в некотором диапазоне частоты уравнения безмоментных колебаний имеют особую точку в интервале интегрирования. В этой особой точке безмоментная теория дает неограниченные амплитуды для перемещений. Если же рассматриваются безмоментные колебания с линейным затуханием, то в интервале задания независимой переменной — координаты точки на образующей срединной поверхности — безмоментные уравнения особую точку ни в одной частоте колебания не имеют; тем не менее в этом случае при определенном диапазоне частот имеются точки, близкие к особой точке на комплексной плоскости аргумента и где, следовательно, напряженное состояние изменяется весьма быстро. Вполне естественно полагать, что в некоторой окрестности особой точки безмоментные уравнения не описывают правильно движение, и поэтому нужно обращаться к общей, моментной теории, предназначенной, казалось бы, в данной задаче прежде всего для определения краевых эффектов.

Немедленно возникает вопрос: каких результатов можно ожидать при корректировании безмоментного решения с помощью моментной теории? Оказывается, сам вопрос сформулирован неточно — под влиянием предположения, что моментная теория сглаживает особенность безмоментного решения. Это предположение, однако, несостоятельно из-за неоднозначности безмоментного решения в комплексной плоскости аргумента.

Для определения фундаментальной системы интегралов основного уравнения (1.1) сначала изучается «эталонное» уравнение (2.3), являющееся моделью уравнения (1.1) в окрестности точки ветвления. Эталонное уравнение допускает представление решения в виде контурного интеграла, откуда методом перевала получают асимптотические выражения для интегралов с большим показателем изменчивости. Интегралы эталонного уравнения используются для формального построения интегралов уравнения (1.1) при помощи известных приемов метода асимптотического интегрирования.

Приводим из результатов работы описание одного частного решения однородного уравнения незатухающих колебаний.

Допустим, что частота колебания такая, что точка ветвления  $x=0$  моментного уравнения находится в интервале задания независимой переменной  $x$ . Рассмотрим два интеграла моментного уравнения, в интервале  $-\infty \ll x \ll 0$  между точкой ветвления ( $x=0$ ) и вершиной конуса ( $x=-\infty$ ) асимптотически (с уменьшением относительной толщины оболочки) приближающихся к решениям безмоментного уравнения. С приближением к точке ветвления по крайней мере одно из этих двух решений теряет безмоментный характер (как и следует ожидать) и становится при значениях  $x > 0$  осциллирующим с большим показателем изменчивости.

Приложениям изложенного здесь метода посвящена статья [10], опубликованная в настоящем номере журнала (стр. 16).

## 1. Введение

Изучение малых упругих осесимметрических установившихся колебаний конической оболочки вращения приводит к интегрированию обыкновенного линейного дифференциального уравнения шестого порядка

$$-\varepsilon^4 \left\{ A_6(x) \frac{d^6 Y}{dx^6} + \dots + A_2(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right\} + B_2(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} + B_1(x) \frac{dY}{dx} + B_0(x) Y = f(x) \quad (1.1)$$

где при надлежащем выборе независимой переменной  $x$

$$A_6(0) = 1, \quad B_2(0) = 0, \quad \frac{dB_2(0)}{dx} = 1, \quad \frac{d^2 B_2(0)}{dx^2} = 0, \quad B_1(0) = 2 \quad (1.2)$$

а  $\varepsilon^4$  — малый параметр. Пусть будет:  $\omega$  — круговая частота установившегося колебания,  $\mu$  — плотность,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала оболочки,  $s$  — расстояние точки срединной поверхности от вершины конуса,  $s_b$  — расстояние точек большого контурного круга от вершины,  $r_b$  — радиус кривизны срединной поверхности у этого круга,  $\Theta$  — угол между образующими и большим основанием конуса,  $h$  — толщина оболочки ( $h = \text{const}$ ),  $\lambda\pi$  — логарифмический декремент затухания. Если пренебречь инерцией вращения и деформацией сдвига (о связанных с этими допущениями погрешностях будет сказано ниже), то коэффициенты уравнения (1.1) получают следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_6(x) &= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-2x}), & A_5(x) &= -(4 + 5ce^x)(1 + ce^x)^{-1}A_6(x) \\ B_2(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), & B_1(x) &= 2 + \frac{1}{2}(e^x - 1)(1 + ce^x)^{-1}(2 - c + ce^x) \\ B_0(x) &= \frac{1}{8}(1 + e^x)(1 + ce^x)^{-1} \left\{ (3 + ce^x)(1 - ce^x) - \right. \\ & & & \left. - (1 - e^x)(1 + 2\nu + ce^x) \operatorname{tg}^2\Theta \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $c = \nu^2 \operatorname{tg}^2\Theta$ , а независимая переменная  $x$  определяется равенством

$$e^x = (1 - 2i\lambda) \frac{\mu\omega^2}{E} r_b^2 \left( \frac{s}{s_b} \right)^2 \quad (1.4)$$

параметр же  $\varepsilon^4$  дается формулой

$$\varepsilon^4 = \frac{4(1 - 2i\lambda)}{3(1 - \nu^2)} \frac{\mu\omega^2}{E} r_b^2 \left( \frac{h}{r_b} \operatorname{ctg}^2\Theta \right)^2 \quad (1.5)$$

Заметим, что при наличии затухания аргумент  $x$ , равно как и параметр  $\varepsilon$  являются комплексными; кроме того, эти величины зависят от частоты, так что при заданном интервале  $s_a < s < s_b$  каждой частоте  $\omega$  соответствует определенный прямолинейный отрезок задания  $x$ , параллельный вещественной оси.

Полагая в (1.1) параметр  $\varepsilon = 0$ , получим уравнение безмоментных колебаний

$$B_2(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} + B_1(x) \frac{dY}{dx} + B_0(x) Y = f(x) \quad (1.6)$$

которое имеет особую точку  $x = 0$ . В окрестности точки  $x = 0$  один из интегралов однородного уравнения (1.6) — регулярная функция  $g(x)$ , а второй может быть представлен в виде

$$Y(x) = \frac{1}{x} h(x) + ag(x) \cdot \ln x \quad (1.7)$$

где  $h(x)$  — регулярная в окрестности точки  $x = 0$  функция,  $a$  — некоторая (непроизвольная) постоянная. Отсюда следует, что характер напряженного состояния оболочки имеет в окрестности точки  $x = 0$  особенности, несовместимые с основными предположениями безмоментной теории. Обращаясь к (1.4), убедимся, что это особое поведение безмоментных интегралов имеет место в следующем диапазоне частоты:

$$\frac{E}{\mu r_b^2} \leq \omega^2 \leq \frac{E}{\mu r_b^2} \left( \frac{s_b}{s_a} \right)^2 \quad (1.8)$$

где  $s_a$  — расстояние точек меньшего контурного круга от вершины конуса.

Формула (1.7) указывает, что в данном случае нужно ввести определенные коррективы в эффективную методику расчета оболочек, заключающуюся с физической точки зрения в расчленении общего напряженного состояния в безмоментное состояние и краевые эффекты. Цель данной работы — выяснить, каковы будут эти коррективы.

Точка  $x = 0$  уравнения (1.1) с малым параметром  $\varepsilon^4$  при вышеупомянутых условиях относительно коэффициентов  $A_6(x)$ ,  $B_2(x)$ ,  $B_1(x)$  называется в теории асимптотического интегрирования точкой ветвления. Исследования, посвященные вопросам поведения интегралов обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных в некоторой конечной окрестности точки ветвления, развиты в последнее время главным образом Р. Лангером [1-3] и В. Вазовым [4, 5]. Особое внимание уделялось задаче Орр-Зоммерфельда о гидродинамической устойчивости, сводящейся к уравнению типа (1.1), но четвертого порядка [ $A_5 = A_5 \equiv 0$ ,  $A_4(0) = 1$ ]. Специальные исследования по уравнениям типа (1.1) в области, содержащей точку ветвления, отсутствуют, теория же асимптотического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных в комплексной области, не содержащей точку ветвления, разработана значительно подробнее [6, 7].

В настоящее время для исследования интегралов уравнения (1.1) в комплексной области, содержащей точку ветвления  $x = 0$ , можно и нетрудно обобщить только метод, примененный Вазовым [4, 5]; этот метод, к сожалению, не свободен от недостатков, основным из которых является недостаточная гибкость так называемого «эталонного» уравнения. Коэффициенты последнего должны иметь такой же характер, как и исходное уравнение, его интегралы должны быть известны или легко определяемы. Но так как уравнения шестого порядка с переменными коэффициентами практически не изучены, приходится за эталонное принимать уравнение с линейными коэффициентами, допускающее

с помощью преобразования Лапласа решение в виде контурного интеграла и нередко простую асимптотическую оценку полученного контурного интеграла.

## 2. Эталонное уравнение и свойства его интегралов

1°. Предыдущие соображения приводят к рассмотрению уравнения следующего типа:

$$-\varepsilon^4 \{y^{(6)} + (a_5 + b_5 z)y^{(5)} + \dots\} + zy^{(2)} + (2 + d_1 z)y^{(1)} + (c_0 + d_0 z)y = 0 \quad (2.1)$$

где  $y^{(i)} = d^i y(z)/dz^i$ . Для дальнейшего существенно, чтобы интегралы выродившихся при  $\varepsilon = 0$  уравнений (1.1) и (2.1) имели одинаковые первые коэффициенты в разложениях в обобщенные степенные ряды в окрестности точек  $x = 0$  и  $z = 0$  соответственно. Нетрудно проверить, что эталонное уравнение (2.1) позволяет определить вышеупомянутые интегралы уравнения (1.1) при  $\varepsilon = 0$  с точностью до выписанных членов в разложении

$$y(z) = \frac{C}{z} \{1 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots + \gamma z \ln z (1 + \gamma_1 z + \dots)\} \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $a_5, b_5, \dots$  в уравнении (2.1) существенной роли не играют, поэтому, чтобы получить решение в простом виде, положим  $a_5 = d_1, a_4 = d_0$ , а остальные коэффициенты примем равными нулю.

Таким образом, эталонным у нас является уравнение

$$-\varepsilon^4 \{y^{(6)} + d_1 y^{(5)} + d_0 y^{(4)}\} + zy^{(2)} + (2 + d_1 z)y^{(1)} + (c_0 + d_0 z)y = 0 \quad (2.3)$$

где

$$d_1 = (1 + c)^{-1}, \quad c_0 = (3 - 2c - c^2)[4(1 + c)]^{-1}$$

$$d_0 = \{5 - 11c - 25c^2 - 9c^3 + 12(1 + \nu)(1 + c) \operatorname{tg}^2 \theta\} [24(1 + c)^2]^{-1}$$

2°. Решение уравнения (2.3) ищем в виде контурного интеграла

$$y(z) = \int e^{zt} v(t) dt \quad (2.4)$$

Опуская элементарные выкладки, получим

$$y(z) = \int (t + q_1)^{-ip} (t + q_2)^{ip} \exp[zt - \frac{1}{5} \varepsilon^4 t^5] dt \quad (2.5)$$

здесь

$$\left. \begin{matrix} 2q_1 \\ 2q_2 \end{matrix} \right\} = -d_1 \pm i(4d_0^2 - d_1^2)^{1/2}, \quad p = (d_1 - c_0)(4d_0^2 - d_1^2)^{-1/2} \quad (2.6)$$

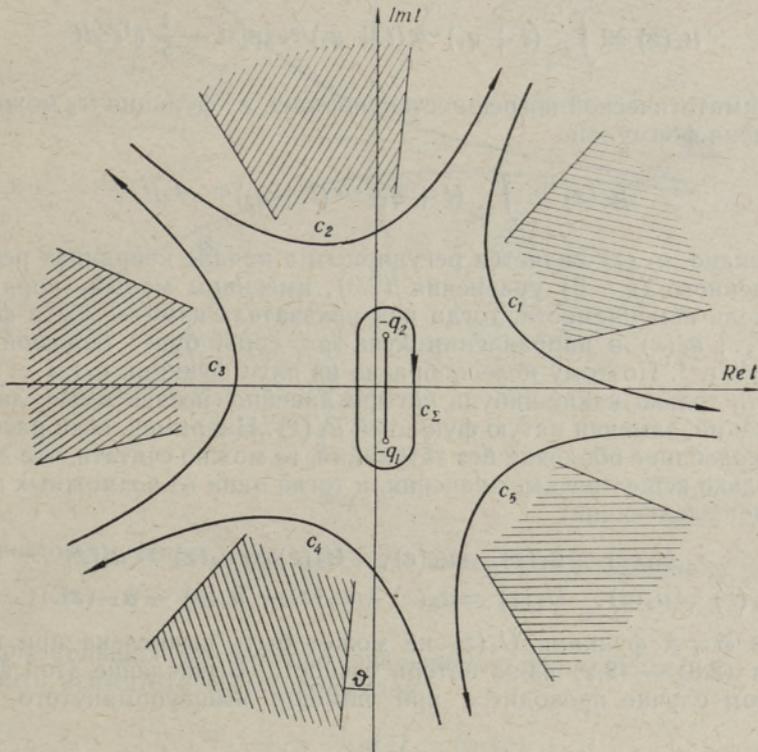
Контур интегрирования в (2.5) следует выбрать так, чтобы приращение функции

$$(t + q_1)^{1-ip} (t + q_2)^{1+ip} \exp[zt - \frac{1}{5} \varepsilon^4 t^5] \quad (2.7)$$

когда  $t$  описывает полный контур, равнялось бы нулю.

В дальнейшем предположим, что  $-\pi \leq \arg \{(t+q_1)^{-1} (t+q_2)\} < 0$ , когда  $t > \operatorname{Re}(-q_1)$ . Предположим также, что  $p, |q_1| = |q_2|$  являются величинами порядка  $\varepsilon^0$ , т. е. не будем рассматривать случая больших  $\operatorname{tg} \Theta$ .

3°. В  $t$  плоскости (фиг. 1) с разрезом  $(-q_1, -q_2)$  показано пять контуров интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_5$ , удовлетворяющих сформулированному выше условию относительно функции (2.7) и определяющих, таким образом, пять интегралов  $u_1(z), u_2(z), \dots, u_5(z)$  эталонного уравнения (2.3). На фиг. 1 секторы, где  $\operatorname{Re}(\varepsilon^4 t^5) < 0$ , заштрихованы,  $\vartheta = -\arg \varepsilon^4, 0 \leq \vartheta \leq \pi$ .



Фиг. 1.

При достаточно больших (по модулю) значениях  $z$  интегралы  $u_1(z), \dots, u_5(z)$  могут быть определены методом перевала в виде асимптотических рядов.

Пусть будет  $z = \sigma e^{i\varphi}$ . Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \chi_j &= \frac{4}{5} \sigma^{3/4} |\varepsilon|^{-1} \exp \left[ i \left( \frac{5}{4} \varphi + \frac{1}{4} \vartheta + \frac{1}{2} j\pi \right) \right] \\ v_j^{(n)} &= \frac{d^n v_j}{dz^n} = \sqrt{\frac{2\pi}{5}} \left( \frac{4}{5} \sigma e^{i\varphi} \right)^{-n-1} \chi_j^{n+1/2} \exp \chi_j \times \\ &\times \left\{ 1 + \left[ \frac{9}{40} + \frac{4}{5} ip(q_2 - q_1) \sigma e^{i\varphi} \right] \chi_j^{-1} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$(j = -1, 0, \dots, 4; n = -1, 0, 1, \dots)$

Тогда искомые функции  $u_j^{(n)}(z)$  выражаются через  $v_j^{(n)}(z)$  посредством формул

$$u_j^{(n)} = \frac{d^n u_j}{dz^n} = \begin{cases} v_{j-1}^{(n)}(z) & \text{при } 0 \leq 5\varphi + \vartheta < (10 - 2j)\pi \\ v_{j-1}^{(n)}(z) - v_{j-2}^{(n)}(z) & \text{„ } (10 - 2j)\pi \leq 5\varphi + \vartheta \leq (12 - 2j)\pi \\ -v_{j-2}^{(n)}(z) & \text{„ } (12 - 2j)\pi < 5\varphi + \vartheta < 10\pi \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \quad (2.9)$$

Отметим, что сумма этих пяти интегралов  $\sum_1^5 u_j(z)$  совпадает с интегралом по контуру  $C_\Sigma$

$$u_\Sigma(z) = \int_{C_\Sigma} (t + q_1)^{-ip} (t + q_2)^{ip} \exp[zt - \frac{1}{5} \varepsilon^4 t^5] dt \quad (2.10)$$

С асимптотической погрешностью порядка  $\varepsilon^4$  функция  $u_\Sigma$  может быть определена формулой

$$u_\Sigma(z) = \int_{C_\Sigma} (t + q_1)^{-ip} (t + q_2)^{ip} e^{zt} dt \quad (2.11)$$

Очевидно,  $u_\Sigma(z)$  является регулярным в начале координат решением вырожденного ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения (2.3), имеющим малый (порядка  $\varepsilon^0$ ) показатель изменяемости, тогда как показатель изменяемости функций  $u_1(z), \dots, u_5(z)$  в направлении луча  $\varphi = \text{const}$  будет большой — порядка  $\sigma^{1/5} \varepsilon^{-1}$ . Поэтому целесообразно из пяти функций  $u_1(z), \dots, u_5(z)$  выделить только какие-нибудь четыре линейно независимые линейные комбинации, заменяя пятую функцией  $u_\Sigma(z)$ . Например, если рассматривается колебание оболочки без затухания, то можно считать, что  $z$  принимает только вещественные значения и тогда один из возможных вариантов будет следующий:

$$\begin{aligned} U_1(z) &= u_1(z) - u_5(z), & U_2(z) &= u_2(z) - u_4(z) \\ U_3(z) &= u_3(z), & U_4(z) &= u_2(z) + u_3(z) + u_4(z) - u_\Sigma(z) \end{aligned} \quad (2.12)$$

При  $\varphi = \pi$  функция  $U_4(z)$  не может быть вычислена при помощи формул (2.8) — (2.9) из-за потери точности. Вычисление этой функции в данном случае проводится при помощи вышеупомянутого соотношения

$$U_4(z) = u_2(z) + u_3(z) + u_4(z) - u_\Sigma(z) = -u_1(z) - u_5(z) \quad (2.13)$$

Следует обратить внимание на то, что  $U_4(z)$  при  $z > 0$  имеет составляющую  $u_\Sigma(z)$  с малым показателем изменяемости.

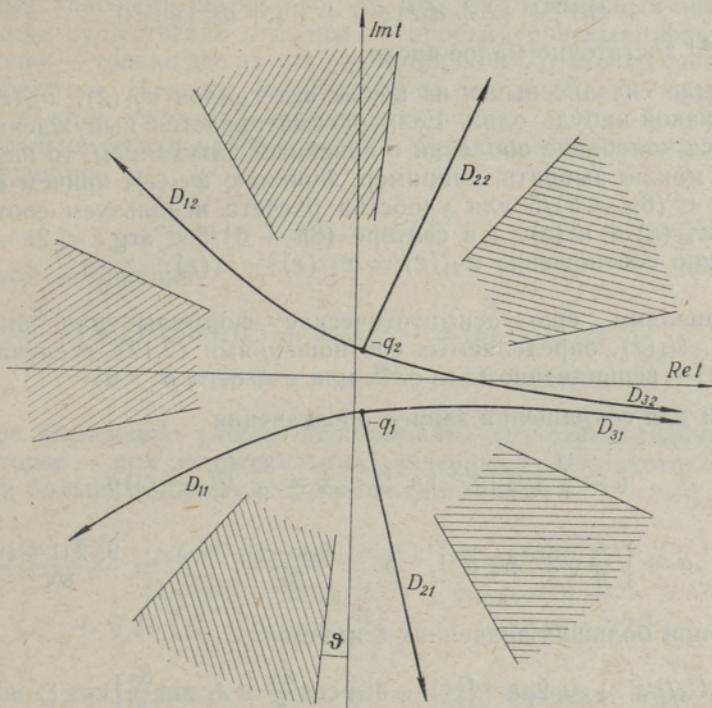
4°. Остается получить асимптотическое выражение для шестого интеграла уравнения (2.3). Для этого рассмотрим функции  $\omega_{j_1}(z)$  и  $\omega_{j_2}(z)$ , определяемые формулой (2.5)

$$\omega_{jk}(z) = \int_{D_{jk}} (t + q_1)^{-ip} (t + q_2)^{ip} \exp[zt - \frac{1}{5} \varepsilon^4 t^5] dt \quad (j = 1, 2, 3; k = 1, 2) \quad (2.14)$$

и контурами интегрирования  $D_{jk}$  (фиг. 2). Из этих шести интегралов\*  $\omega_{jk}$  уравнения (2.3) только один является существенно новым: все остальные могут быть получены как простые линейные комбинации

\* С введением новых контуров интегрирования, например от  $t = -q_1$  до  $\infty \cdot e^{2i\pi/5}$ , число интегралов рассматриваемого типа может быть доведено до десяти.

функций  $u_1(z), \dots, u_5(z)$ . Например,  $w_{21}(z) = w_{11}(z) - u_4(z)$ ,  $w_{31}(z) = w_{32}(z) + Cu_\Sigma(z)$ , где  $C$  — некоторая постоянная.



Фиг. 2.

Предположим теперь, что  $\varphi = \arg z$  находится в интервале

$$(5 - j)2\pi - \vartheta \leq 5\varphi \leq (6 - j)2\pi - \vartheta \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.15)$$

Тогда при больших по модулю значениях  $z$  функцию  $w_{j1}(z)$  можно представить асимптотической формулой

$$w_{j1}(z) = w_{j1,0}(z) + R_{j1}(z) \quad (2.16)$$

где

$$w_{j1,0}(z) = \int_{D_{j1}} (t + q_1)^{-ip} (t + q_2)^{ip} e^{zt} dt, \quad R_{j1}(z) = O(\varepsilon^4/z^6)$$

Аналогично, если  $z$  находится в секторе

$$(j - 1)2\pi - \vartheta \leq 5\varphi \leq j \cdot 2\pi - \vartheta \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.17)$$

то при больших значениях  $|z|$  функция  $w_{j2}(z)$  имеет следующую асимптотику

$$w_{j2}(z) = w_{j2,0}(z) + R_{j2}(z) \quad (2.18)$$

где

$$w_{j2,0}(z) = \int_{D_{j2}} (t + q_1)^{-ip} (t + q_2)^{ip} e^{zt} dt, \quad R_{j2}(z) = O(\varepsilon^4/z^6)$$

Остаточные члены  $R_{jk}(z)$  формул (2.16), (2.18) указывают, что в секторах (2.15), (2.17) соответственно интегралы уравнения (2.3)  $w_{j1}(z)$

и  $\omega_{j_2}(z)$  совпадают с интегралами вырожденного (безмоментного) уравнения (2.3)

$$zy^{(2)} + (2 + d_1z)y^{(1)} + (c_0 + d_0z)y = 0 \quad (2.19)$$

если  $|\varepsilon^4/z^6|$  достаточно малое число.

Как было сказано выше, из шести интегралов  $\omega_{j_1}(z)$ ,  $\omega_{j_2}(z)$  нужно выбрать какой-нибудь один. Если рассматривается вынужденное установившееся колебание оболочки с линейным затуханием, то шестым интегралом можно выбрать, например, функцию  $\omega_{21}(z)$ , причем в секторе  $\pi < \arg z < (6\pi - \vartheta)/5$  для удобства расчета используем соотношение  $\omega_{21}(z) = \omega_{31}(z) + u_5(z)$ , а в секторе  $(8\pi - \vartheta)/5 < \arg z < 2\pi - \vartheta/5$  соответственно соотношение  $\omega_{21}(z) = \omega_{11}(z) - u_4(z)$ .

5°. Приводим еще асимптотические формулы для интегралов  $U_1(z), \dots, U_4(z)$ , определяемых соотношениями (2.12), в случае, когда  $\vartheta = 0$ , а  $z$  — вещественно ( $z = \sigma e^{i0}$  или  $z = \sigma e^{i\pi}$ ,  $\sigma > 0$ ).

Введем для сокращения записи обозначения

$$\xi = \frac{2}{5} \sqrt{2} |\sigma^{5/4}| \varepsilon^{-1}, \quad \xi = \frac{32}{9} (d_1 - c_0) \sigma \quad (2.20)$$

$$a = \sqrt{\frac{5}{8}} \sqrt{2} \pi \xi \sigma^{-1}, \quad \delta_- = \frac{9(1 - \xi)}{80\xi}, \quad \delta_+ = \frac{9\sqrt{2}(1 + \xi)}{80\xi}$$

Тогда при больших значениях  $\xi$  имеем

$$U_1(\sigma e^{i\pi}) \approx 2ae^{-\xi} \left\{ \left[ (1 - \delta_-) \cos \frac{3\pi}{8} - \delta_- \sin \frac{3\pi}{8} \right] \cos \xi - \left[ (1 - \delta_-) \sin \frac{3\pi}{8} + \delta_- \cos \frac{3\pi}{8} \right] \sin \xi \right\} \quad (2.21)$$

$$U_1(\sigma e^{i0}) \approx 2ae^{\sqrt{2}\xi} (1 + \delta_+)$$

$$U_2(\sigma e^{i\pi}) \approx 2ae^{\xi} \left\{ \left[ (1 + \delta_-) \cos \frac{\pi}{8} + \delta_- \sin \frac{\pi}{8} \right] \cos \xi - \left[ (1 + \delta_-) \sin \frac{\pi}{8} - \delta_- \cos \frac{\pi}{8} \right] \sin \xi \right\} \quad (2.22)$$

$$U_2(\sigma e^{i0}) \approx i\sqrt{2} a \left\{ (1 + \delta_+) \cos \sqrt{2}\xi - (1 - \delta_-) \sin \sqrt{2}\xi \right\}$$

$$U_3(\sigma e^{i\pi}) \approx 2iae^{\xi} \left\{ \left[ (1 + \delta_-) \sin \frac{\pi}{8} - \delta_- \cos \frac{\pi}{8} \right] \cos \xi + \left[ (1 + \delta_-) \cos \frac{\pi}{8} + \delta_- \sin \frac{\pi}{8} \right] \sin \xi \right\} \quad (2.23)$$

$$U_3(\sigma e^{i0}) \approx iae^{-\sqrt{2}\xi} (1 - \delta_+)$$

$$U_4(\sigma e^{i\pi}) \approx 2iae^{-\xi} \left\{ \left[ (1 - \delta_-) \sin \frac{3\pi}{8} - \delta_- \cos \frac{3\pi}{8} \right] \cos \xi + \left[ (1 - \delta_-) \cos \frac{3\pi}{8} + \delta_- \sin \frac{3\pi}{8} \right] \sin \xi \right\} \quad (2.24)$$

$$U_4(\sigma e^{i0}) \approx i\sqrt{2} a \left\{ (1 - \delta_+) \cos \sqrt{2}\xi + (1 + \delta_+) \sin \sqrt{2}\xi \right\} - u_{\Sigma}(\sigma e^{i0})$$

Из этих формул следует, что при отрицательных значениях  $z$  (т. е. при достаточно малых частотах колебания) функции  $U_1, \dots, U_4$  сходны с простыми краевыми эффектами, но при положительных значениях  $z$  эти функции существенно отличны от простых краевых эффектов теории оболочек — только две из них (функции  $U_1$  и  $U_3$ ) можно назвать краевыми эффектами. Наличие безмоментного решения  $u_\Sigma$  в выражении  $U_4$  является даже в некоторой мере неожиданным.

За пятый интеграл уравнения (2.3) при вещественных значениях  $z$  примем функцию  $u_\Sigma$

$$U_5(z) = u_\Sigma(z) \quad (2.25)$$

а за шестой — функцию

$$\begin{aligned} U_6(z) &= \omega_{31}(z) + \omega_{32}(z) - u_1(z) + u_5(z) = \\ &= \omega_{11}(z) + \omega_{12}(z) + u_2(z) - u_4(z) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Первое выражение удобно использовать при отрицательных значениях  $z$ , второе — при положительных значениях  $z$ . Асимптотика функции  $U_6(z)$  при больших значениях  $\zeta$  дается формулами

$$\begin{aligned} U_6(\sigma e^{i\pi}) &\approx \omega_{31,0}(\sigma e^{i\pi}) + \omega_{32,0}(\sigma e^{i\pi}) \\ U_6(\sigma e^{i0}) &\approx \omega_{11,0}(\sigma e^{i0}) + \omega_{12,0}(\sigma e^{i0}) + \\ &+ \sqrt{2}a \{ (1 + \delta_+) \cos \sqrt{2} \zeta - (1 - \delta_+) \sin \sqrt{2} \zeta \} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Весьма существенно отметить, что в (2.27) функции  $\omega_{31,0}$ ,  $\omega_{32,0}$ ,  $\omega_{11,0}$ ,  $\omega_{12,0}$  как безмоментные решения не зависят от малого параметра  $\varepsilon^4$ , но осциллирующая часть выражения  $U_6(\sigma e^{i0})$  имеет множитель  $\varepsilon^{-1/2}$ . Так как формулы (3.10) показывают, что при  $|\varepsilon^{1/3}| < \sigma < 1$  функции  $\omega_{11,0}(\sigma)$ ,  $\omega_{12,0}(\sigma)$  будут порядка  $\sigma^{-1}$ , то в этом интервале амплитуда осциллирующей части  $U_6(\sigma e^{i0})$  будет порядка  $\sigma^{2/3} \varepsilon^{-1/2}$  по сравнению с безмоментной частью  $\omega_{11,0}(\sigma e^{i0}) + \omega_{12,0}(\sigma e^{i0})$ , т. е. при значениях  $\varepsilon^{1/3} < \sigma < 1$  в интеграле  $U_6(\sigma e^{i0})$  по амплитуде колебаний превалирует осциллирующая часть. Если учтем, что по формулам (2.27), (3.9) функция  $U_6(\sigma e^{i\pi})$  при  $\varepsilon^{1/3} < \sigma < 1$  соизмерима с  $\sigma^{-1}$ , то из всего изложенного можно вывести соотношение

$$|U_6(\sigma e^{i0})| \sim \sigma^{2/3} \varepsilon^{-1/2} |U_6(\sigma e^{i\pi})| \quad (2.28)$$

Рассмотрение этого вопроса при  $\sigma > 1$  не может дать полезной информации о свойствах аналогичного интеграла исходного уравнения, потому что при больших значениях асимптотические свойства интегралов вырожденного эталонного уравнения (2.19) и безмоментного уравнения (1.6) не совпадают даже качественно.

### 3. Интегралы уравнения (1.1)

В предыдущем разделе было показано, что интегралы  $u_j(z)$ , ( $j=1, 2, \dots, 5$ ) эталонного уравнения (2.3) имеют всюду в комплексной плоскости  $z$  большой показатель изменчивости. Исходя из этого, можно соответствующие интегралы  $Y_j(x)$  уравнения (1.1) определить через  $u_j(z)$  методом асимптотического интегрирования в форме

$$Y_j(x) = y_0(x) u_j[z(x)] \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \quad (3.1)$$

Поступая так, получим

$$z(x) = \left\{ \frac{5}{4} \int_0^x [B_2(t)/A_6(t)]^{1/5} dt \right\}^{5/6} \quad (3.2)$$

$$y_0(x) = (dz/dx)^{-1/2} \cdot \exp \left[ \int_0^x p(t) dt \right] \quad (3.3)$$

где

$$p(t) = \frac{1}{4A_6(t)} \left[ 3 \frac{dA_6(t)}{dt} - A_5(t) \right] - \frac{1}{4B_2(t)} \left[ 3 \frac{dB_2(t)}{dt} - B_1(t) - A_6(t) \left( \frac{dz}{dt} \right)^5 \right] \quad (3.4)$$

В неоднозначном выражении (3.2) можно рассматривать только ветвь, которая при положительных значениях  $x$  дает положительные значения для  $z$ . В этом случае функция имеет в окрестности точки  $x = 0$  следующее разложение:

$$z(x) = x \left( 1 + \frac{1}{6} x + \frac{5}{234} x^2 + \dots \right) \quad (3.5)$$

Так как функция интенсивности  $y_0(x)$  одинакова для всех  $Y_j(x)$ , то линейные комбинации  $u_j(z)$  приводят к таким же линейным комбинациям  $Y_j(x)$ .

Сумма пяти интегралов  $Y_j(x)$  дает интеграл, который уже не имеет большого показателя изменчивости. Для эталонного уравнения (2.3) это был интеграл  $u_\Sigma(z)$  с асимптотической погрешностью порядка  $\varepsilon^4$ , совпадающий с регулярным в окрестности  $z = 0$  интегралом вырожденного уравнения (2.19). В случае уравнения (1.1) будем сопоставлять функцию  $u_\Sigma(z)$  с функцией  $Y_\Sigma(x)$ , представляющей собой регулярный в окрестности  $x = 0$  интеграл вырожденного (безмоментного) уравнения (1.6), причем примем  $Y_\Sigma(0) = u_\Sigma(0) = 2\pi r(q_2 - q_1)$ . Вместе с тем из пяти интегралов (3.1) в приложениях целесообразно пользоваться только какими-нибудь четырьмя линейно независимыми линейными комбинациями  $Y_j(x)$ . Если, например, в рассматриваемой задаче  $x$  принимает только вещественные значения, то эти линейные комбинации можно составить аналогично варианту (2.12).

Остается вывести расчетные формулы для шестого интеграла  $Y_6(x)$ . Обозначим по-прежнему через  $\omega_{jk,0}(z)$  интегралы (2.16), (2.18) с контурами интегрирования  $D_{jk}$ . Пусть далее  $Y_{6,k}(x)$ , ( $k = 1, 2$ ) будут интегралы безмоментного уравнения (1.6), имеющие такие же первые коэффициенты разложения в обобщенный степенной ряд в окрестности точки  $x = 0$ , как и  $\omega_{jk,0}[z(x)]$ , где  $z(x)$  дается формулой (3.2). Рассмотрим частные случаи.

Если  $4\pi/5 < \arg z < 2\pi$ , то  $Y_6(x)$  естественно представить формулой

$$Y_6(x) = \begin{cases} \omega_{31}(z) [\omega_{31,0}(z)]^{-1} Y_{6,1}(x) + Y_5(x) & \text{при } (4\pi - \vartheta) < \arg 5z < (6\pi - \vartheta) \\ \omega_{21}(z) [\omega_{21,0}(z)]^{-1} Y_{6,1}(x) & \text{„ } (6\pi - \vartheta) \leq \arg 5z \leq (8\pi - \vartheta) \\ \omega_{11}(z) [\omega_{11,0}(z)]^{-1} Y_{6,1}(x) - Y_4(x) & \text{„ } (8\pi - \vartheta) < \arg 5z < (10\pi - \vartheta) \end{cases} \quad (3.6)$$

Если  $x$  принимает только вещественные значения, то в соответствии с (2.26) примем

$$Y_6(x) = \frac{\omega_{31}(z)}{\omega_{31,0}(z)} Y_{6,1}(x) + \frac{\omega_{32}(z)}{\omega_{32,0}(z)} Y_{6,2}(x) - Y_1(x) + Y_5(x)$$

при  $x < 0$  (3.7)

$$Y_6(x) = \frac{\omega_{11}(z)}{\omega_{11,0}(z)} Y_{6,1}(x) + \frac{\omega_{12}(z)}{\omega_{12,0}(z)} Y_{6,2}(x) + Y_2(x) - Y_4(x)$$

при  $x > 0$

Для обоснования формул (3.6), а также (3.7) заметим, что при  $x \rightarrow 0$  по предположению

$$Y_{6,k}(x) \rightarrow \omega_{jk,0}[z(x)] \quad (k=1, 2; j=1, 2, 3) \quad (3.8)$$

при достаточно же больших по модулю значениях  $z$  в указанных в (3.6) секторах

$$\omega_{jk}(z) \rightarrow \omega_{jk,0}(z); \quad (3.9)$$

если параметр  $\varepsilon$  мал, то в промежуточном интервале  $|x|$  можно значки  $\rightarrow$  в (3.8), (3.9) заменить значками  $\approx$ .

Функции  $\omega_{j1,0}(z)$  и  $\omega_{j2,0}(z)$  имеют около  $z=0$  следующие разложения:

$$\omega_{j1,0}(z) = -\frac{1}{z} + q_1 - ip(q_2 - q_1)[\ln z + \ln(q_1 - q_2) - \psi(1) - \psi(2) + \psi(1 - ip)] + \dots \quad (3.10)$$

$$\omega_{j2,0}(z) = -\frac{1}{z} + q_2 + ip(q_1 - q_2)[\ln z + \ln(q_2 - q_1) - \psi(1) - \psi(2) + \psi(1 + ip)] + \dots$$

где  $\psi(\dots)$  — пси-функция Эйлера.

По условию интегралы  $Y_{6,1}(x)$  и  $Y_{6,2}(x)$  безмоментного уравнения (1.6) должны иметь около  $x=0$  такие же коэффициенты разложения, как  $\omega_{j1,0}[z(x)]$  и  $\omega_{j2,0}[z(x)]$  соответственно.

### Заключение

Представленный в работе материал пока недостаточен для решения конкретных задач о вынужденных или же собственных колебаниях — для этого нужно численными методами определить безмоментные решения (хотя и они не всегда будут асимптотическими решениями уравнений моментной теории), а также интегралы типа краевого эффекта эталонного уравнения в некоторой окрестности точки ветвления, где асимптотические формулы (2.9) неприменимы. Для решения этих задач нужно фиксировать значения  $\Theta$ ,  $\nu$ ,  $h/r_b$  и логарифмического декремента затухания.

Можно все же предполагать, что изложенные в работе факты позволяют предсказать основные свойства решения; они показывают непривычное для теории оболочек поведение интегралов, а также сложность характера отдельных интегралов. В качестве иллюстрации можно указать, с одной стороны, на наличие безмоментного решения  $u^2(z)$  в формуле (2.24) для краевого эффекта  $U_4(z)$  и, с другой стороны, на нали-

чие осциллирующего решения в формуле (2.27) для интеграла  $U_6(z)$ , который при  $z \ll -|\varepsilon^{1/6}|$  будет безмоментным.

Остановимся еще на рассмотрении погрешностей, возникающих при выводе уравнения (1.1) из-за пренебрежения влиянием деформации сдвига и инерции поворота.

Уравнения осесимметрических колебаний цилиндрической оболочки, приведенные недавно Г. Херманном и И. Мирским [8], показывают, что влиянием инерции поворота при установившихся колебаниях можно пренебречь, когда  $(h^2/r_b^2)h\omega\sqrt{\mu/E} \ll 1$ , а влиянием сдвига от поперечных сил в случае, когда  $h\omega\sqrt{\mu/E} \ll 1$ . Второе из этих условий является более существенным и выражается в отношении уравнения (1.1) в простой форме  $\varepsilon^2 \ll 1$ . При установлении последнего условия использованы результаты С. А. Амбарцумяна [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Langer, On the asymptotic forms of the solutions of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point, *Trans. Am. Math. Soc.*, **80**, No. 9, 3—123, 1955.
2. R. E. Langer, On the construction of related differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, **81**, No. 2, 394—410, 1956.
3. R. E. Langer, On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics, *Trans. Am. Math. Soc.*, **84**, No. 1, 144—191, 1957.
4. W. Wasow, A study of the solutions of the differential equation  $y'''' + \lambda^2(xy'' + y) = 0$  for large values of  $\lambda$ , *Ann. of Math.*, **52**, No. 2, 350—361, 1950.
5. W. Wasow, Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing transition point, *Ann. of Math.*, **58**, No. 2, 222—252, 1953.
6. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *Успехи матем. наук*, **12**, № 5(77), 3—122, 1957.
7. В. И. Зимин, О применении метода асимптотического интегрирования к решению одного уравнения теории оболочек, *Изв. АН Уз. ССР, серия физ.-мат. наук*, № 4, 97—103, 1957.
8. G. Hermann, I. Mirsky, Three-dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders, *J. Appl. Mech.*, **23**, No. 4, 563—568, 1956.
9. С. А. Амбарцумян, К общей теории анизотропных оболочек, *Прикл. мат. и мех.*, **22**, № 2, 226—237, 1958.
10. И. Вейгель, А. Мянниль, Э. Орг, Малые установившиеся колебания конической оболочки вращения, Статья в настоящем номере журнала, стр. 16—25.

Институт энергетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
23. VI 1959

#### ELASTSE KOONILISE ROTATSIOONKOORIKU STATSIONAARSE TELGSÜMMEETRILISE VÕNKUMISE VÕRRANDI INTEGRALIDE FUNDAMENTAALSÜSTEEM

N. Alumäe,  
Eesti NSV Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige

#### Resümees

Töös kirjeldatakse meetodit etaloonvõrrandi (2.3) abil võrrandi (1.1) asümptootiliste ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) lahendite määramiseks kompleksses piirkonnas, mis sisaldab lahendite üleminekupunkti  $x=0$ . Etaloonvõrrand, mille lahendid on antud kontuurintegraalide (2.5) kaudu, aproksimeerib lähtevõrrandit (1.1) üleminekupunkti ümbruses. Lähtevõrrandi lahendite süsteem on leitud etaloonvõrrandi lahendite süsteemi kaudu asümptootilise integreerimise meetodi tuntud võtete abil.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia  
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse  
23. VI 1959

## ON THE FUNDAMENTAL SYSTEM OF INTEGRALS OF THE EQUATION OF SMALL STEADY AXISYMMETRICAL VIBRATIONS OF ELASTIC CONICAL SHELL

N. Alumäe,

Corresponding Member, Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.

## Summary

The equations of forced stationary vibrations of the shell are reduced to a single equation (1.1), including a small complex parameter  $\varepsilon^4$ . The coefficients of this equation follow from (1.3) — (1.5) where  $\lambda\pi$  is the logarithmical decrement of damping,  $E$  — the modulus of elasticity,  $\nu$  — Poisson's ratio,  $\mu$  — density,  $\omega$  — circular frequency of vibrations,  $h$  — thickness of shell; the geometrical quantities  $s$ ,  $s_b$ ,  $r_b$ ,  $\Theta$  are presented in Fig. 1 of the paper [10] published in this issue.

If frequency  $\omega$  is in the interval given by (1.8), then the independent variable  $x$  takes the value  $x=0$ , if  $\lambda=0$  (no damping) or a small value, if  $\lambda$  is small. In this case at least one of the solutions of Eq. (1.6) — equation of the membrane theory — does not satisfy the basic assumption of the membrane theory in a complex neighbourhood of the point  $x=0$ , and the more complete Eq. (1.1) should be used.

This paper concerns the formal construction of solutions of Eq. (1.1) in a domain containing the transition point  $x=0$ . Following the method described in [9], a special equation (2.3) is introduced with coefficients approximating the leading coefficients  $A_6$ ,  $B_2$ ,  $B_1$ ,  $B_0$  of Eq. (1.1) at  $x=0$ . Solutions of Eq. (2.3) are presented in form of a contour integral (2.5), the contours  $C_1, \dots, C_5, C_\Sigma$  (Fig. 1) defining the solutions  $u_1(z), \dots, u_5(z), u_\Sigma(z)$  respectively, and the contours  $D_{jk}$  (Fig. 2) the solutions  $w_{jk}(z)$ . Asymptotic expansions (2.8), (2.9) for the solutions  $u_1(z), \dots, u_5(z)$  are obtained by the method of deepest descent. At sufficiently large values of  $|z^6/\varepsilon^4|$ ,  $\arg z$  on sector (2.15), the solution  $w_{j1}(z)$  is asymptotic to the solution  $w_{j1,0}(z)$  given by (2.16) of the membrane equation (2.19). If  $\arg z$  is not in sector (2.15), asymptotic forms for  $w_{j1}(z)$  can be obtained with the aid of solutions  $u_k(z)$ , e. g. if  $4\pi/5 \leq \arg z \leq 6\pi/5$ , then  $w_{21}(z) = w_{31,0}(z) + u_5(z)$ . The solution  $u_\Sigma(z)$  is asymptotic to the regular solution of Eq. (2.19) at  $x=0$ .

Asymptotic integrals of Eq. (1.1)  $Y_1(x), \dots, Y_5(x)$ , according to solutions  $u_1(z), \dots, u_5(z)$  of Eq. (2.3) are obtained by well-known technique of asymptotic integration and presented by formulae (3.1)—(3.4). Only four linear combinations of  $Y_1(x), \dots, Y_5(x)$  can be used. As the fifth asymptotic integral of Eq. (1.1) one can consider the regular solution of Eq. (1.6) at  $x=0$ . The asymptotic form of the sixth solution of Eq. (1.1) is presented by (3.6), where  $Y_{6,1}(x)$  is the solution of (1.6) with the condition  $Y_{6,1}(x) \rightarrow w_{j1,0}(z)$  as  $x \rightarrow 0$ ,  $z = z(x) \rightarrow 0$ .

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,  
Institute of Energetics

Received  
June 23th, 1959