

МАЛЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

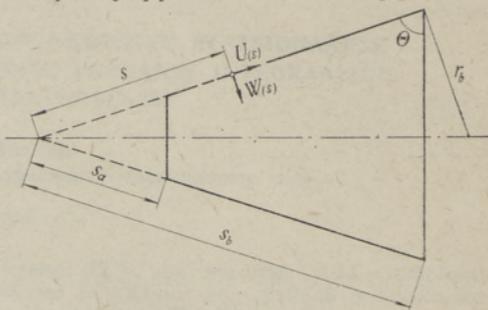
И. ВЕЙГЕЛЬ, А. МЯННИЛЬ, Э. ОРГ

Рассматривается тонкостенная оболочка вращения, очерченная по поверхности усеченного конуса. Анализ ограничивается изучением вынужденных колебаний при частотах, при которых можно пренебречь деформацией сдвига и инерцией вращения. Предполагается, что силы затухания пропорциональны скорости движения.

Для расчета амплитуд колебаний при разных частотах применяется метод, использующий фундаментальную систему интегралов уравнений установившегося движения. Эта система строится согласно предложениям, изложенным в работе [1].

Приводятся решения однородных безмоментных уравнений, полученные методами численного интегрирования для одного частного вида оболочки. Даются асимптотические формулы для тангенциального перемещения U и его производной, входящих в краевые условия свободно опертой оболочки (толщина стенки торцовых диафрагм соизмерима с толщиной оболочки), и, наконец, приводятся графики прогиба оболочки при четырех частотах периодической нагрузки, равномерно распределенной по образующей. Одна из рассмотренных частот, по-видимому, близка к резонансной частоте.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим оболочку вращения, очерченную по поверхности усеченного конуса (фиг. 1) с постоянной толщиной стенки h . Пусть будут: E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного расширения, μ — плотность, r — отнесенный к единице площади срединной поверхности коэффициент трения при колебаниях оболочки (сила трения предполагается пропорциональной скорости движения), $q(s)f(t)$ — внешнее давление. Пренебрегая деформацией сдвига и инерцией вращения, уравнения движения элемента оболочки получаются в форме



Фиг. 1.

$$s \left(\mu h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + r \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial U}{\partial s} - \nu W \operatorname{tg} \theta \right) - \frac{1}{s} (U - W \operatorname{tg} \theta) \right\} \quad (1.1)$$

$$s \left(\mu h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + r \frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \left[\frac{1}{s} (U - W \operatorname{tg} \Theta) + \nu \frac{\partial U}{\partial s} \right] \operatorname{tg} \Theta - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial W}{\partial s} \right] \right\} + sq(s)f(t) = 0 \quad (1.2)$$

Положим

$$f(t) = e^{i\omega t}, \quad U(s, t) = U(s) e^{i\omega t}, \quad W(s, t) = W(s) e^{i\omega t} = Y(s) e^{i\omega t} \operatorname{ctg} \Theta \quad (1.3)$$

и введем безразмерные величины

$$r(\mu h)^{-1} = 2\lambda\omega, \quad \alpha = s\omega[(1 - 2i\lambda)(1 - \nu^2)\mu E^{-1}]^{1/2} \operatorname{ctg} \Theta \quad (1.4)$$

$$\varepsilon^4 = \frac{4}{3} (1 - 2i\lambda)\omega^2 h^2 \mu [(1 - \nu^2)E]^{-1} \operatorname{ctg}^4 \Theta$$

где α — комплексный аргумент, ε^4 — комплексный параметр, который предполагается малым, $\lambda\lambda$ — логарифмический декремент затухания.

Это дает возможность выписать систему (1.1), (1.2) в виде

$$\alpha \frac{d}{d\alpha} \alpha \frac{dU}{d\alpha} - (1 - \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \Theta) U - \nu \alpha \frac{dY}{d\alpha} + Y = 0 \quad (1.5)$$

$$\nu \alpha \frac{dU}{d\alpha} + U - (1 - \alpha^2) Y - (1 - \nu^2) \varepsilon^4 \left(\alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \alpha \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} - \alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} \right) = \\ = - \alpha^2 q(\alpha) [\omega^2 \mu h (1 - 2i\lambda)]^{-1} \operatorname{tg} \Theta \quad (1.6)$$

Для дальнейшего целесообразно рассмотреть наряду с независимой переменной α также и комплексную независимую переменную x , определяемую соотношением

$$\alpha^2 = (1 - \nu^2) e^x \quad (1.7)$$

Замена аргумента в (1.5), (1.6) дает систему

$$4 \frac{d^2 U}{dx^2} - [1 - (1 - \nu^2) e^x \operatorname{tg}^2 \Theta] U - 2\nu \frac{dY}{dx} + Y = 0 \quad (1.8)$$

$$2\nu \frac{dU}{dx} + U - [1 - (1 - \nu^2) e^x] Y - (1 - \nu^2) \varepsilon^4 \frac{d^2}{dx^2} e^{-x} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \\ = - e^x q(x) (1 - \nu^2) [\omega^2 \mu h (1 - 2i\lambda)]^{-1} \operatorname{tg} \Theta \quad (1.9)$$

Исключение из этой системы функции $U(x)$ приводит к уравнению

$$- \varepsilon^4 \left\{ A_6(x) \frac{d^6 Y}{dx^6} + A_5(x) \frac{d^5 Y}{dx^5} + \dots + A_2(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right\} + B_2(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} + \\ + B_1(x) \frac{dY}{dx} + B_0(x) Y = F(x) \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_6 &= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-2x}), \quad A_5 = -A_6(4 + g), \quad A_4 = A_6(6 + 3g + f) \\
 A_3 &= -A_6(4 + 3g + 2f), \quad A_2 = A_6(1 + g + f), \quad g = ce^x(1 + ce^x)^{-1} \\
 c &= v^2 \operatorname{tg}^2 \Theta, \quad 4f = -(1 + ce^x) + e^x[1 + 2v(1 + ce^x)^{-1}] \operatorname{tg}^2 \Theta \\
 B_2 &= shx, \quad B_1 = 2 + \frac{1}{2}(e^x - 1)(1 + ce^x)^{-1}(2 - c + ce^x) \quad (1.11) \\
 B_0 &= \frac{1}{8}(1 + e^x)(1 + ce^x)^{-1} \left\{ (3 + ce^x)(1 - ce^x) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - e^x)(1 + 2v + ce^x) \operatorname{tg}^2 \Theta \right\} \\
 F &= \frac{1}{2} [\omega^2 \mu h(1 - 2i\lambda)]^{-1} (1 + e^{-x}) \left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{ce^x}{1 + ce^x} \left(\frac{d}{dx} - \frac{c}{2v} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(1 + ce^x - e^x \operatorname{tg}^2 \Theta) \right\} e^x q(x)
 \end{aligned}$$

Уравнение (1.10) содержит малый параметр ε^4 перед старшими производными, а соответствующее вырожденное (безмоментное) уравнение

$$B_2(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} + B_1(x) \frac{dY}{dx} + B_0(x) Y = F(x) \quad (1.12)$$

имеет особые точки $x = \pm k\pi i$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Вещественному заданному интервалу (s_a, s_b) переменной s при решении конкретных задач соответствуют согласно формулам (1.4), (1.7) прямые отрезки (x_a, x_b) в комплексной плоскости x , параллельные вещественной оси и находящиеся от нее на расстоянии 2λ . Точки (x_a, x_b) зависят от частоты (но $x_b - x_a > 0 = \text{const}$), поэтому при определенном диапазоне частоты прямой отрезок (x_a, x_b) содержит точки, близкие (при малых значениях λ) к точке $x = 0$. Вследствие этого интегралы уравнения (1.10) в таких частотах не распадаются на безмоментные интегралы и краевые эффекты. Тем не менее метод расчета, который будет в дальнейшем применен для определения интегралов уравнения (1.10), использует и интегралы безмоментного уравнения (1.12).

2. Интегрирование безмоментного уравнения (1.12). Будем рассматривать в качестве примера оболочку, где $v = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \Theta = 3$, $2\lambda = 0,1$. Постоянная c , фигурирующая в коэффициентах A_j, B_j уравнения (1.10), принимает в этом случае значение $c = 1$. Такой выбор в некоторой мере упрощает выражения для коэффициентов A_j, B_j , но не приводит к какому-нибудь особому частному случаю. Получаемое безмоментное уравнение

$$(e^x - e^{-x}) \frac{d^2 Y}{dx^2} + (e^x + 3) \frac{dY}{dx} + (2e^x + e^x - 3) Y = 2F(x) \quad (2.1)$$

приходится интегрировать численными методами по линии

$$x = \xi + \ln(1 - 0,1i),$$

где ξ — вещественная переменная. Условимся, что $\operatorname{arg} x = \varphi$ принимается в секторе $+\pi < \varphi < 2\pi$.

Обозначим через $Y_{\Sigma}(x)$ регулярный в окрестности точки $x = 0$ интеграл однородного уравнения (2.1), а через $Y_{6,0}(x)$ — интеграл этого же уравнения, имеющий особенность при $x = 0$

$$Y_{\Sigma}(x) = -i\pi \left\{ 1 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{11}{72}x^3 + \frac{29}{2880}x^4 + \dots \right\} \quad (2.2)$$

$$Y_{6,1}(x) = -\frac{1}{x} + \frac{17}{12}x - \frac{25}{144}x^2 - \frac{113}{8640}x^3 + \dots + \\ + \frac{i}{\pi} (-1,094 + 4,849i) Y_{\Sigma}(x) - \frac{i}{2\pi} Y_{\Sigma}(x) \ln x \quad (2.3)$$

Постоянные интегрирования в разложениях (2.2), (2.3) выбраны так, чтобы первые коэффициенты в этих рядах совпадали с первыми коэффициентами разложения для интегралов $u_{\Sigma}(z)$ и $w_{j,0}(z)$ по z для эталонного уравнения (2.3) статьи [1]. Отметим, что в рассматриваемом частном случае коэффициенты p, q_1, q_2 в решении вышеупомянутого эталонного уравнения будут

$$p = \frac{3}{4\sqrt{55}}, \quad q_1 = -\frac{1}{4} + \frac{i}{3}\sqrt{55}, \quad q_2 = -\frac{1}{4} - \frac{i}{3}\sqrt{55} \quad (2.4)$$

Интегралы $Y_{\Sigma}(x), Y_{6,1}(x)$, в интервале $-0,3 \leq \xi \leq 0,3$ определялись рядами (2.2), (2.3); в интервалах $-1,4 \leq \xi \leq -0,3, 0,3 \leq \xi \leq 1,4$ для нахождения функции $Y_{\Sigma}(x)$ был применен метод численного интегрирования Башфорга-Адамса с шагом 0,1; функция $Y_{6,0}(x)$ была найдена в интервале $-1,4 \leq \xi \leq -0,3, 0,8 \leq \xi \leq 1,4$ при известной $Y_{\Sigma}(x)$ при помощи одной квадратуры, в интервале же $0,3 \leq \xi \leq 0,8$ этот прием оказался ненадежным из-за потери точности и для построения решения применялся метод Тэйлора.

При значениях $\xi < -1,4$ для определения функций $Y_{\Sigma}(x), Y_{6,0}(x)$ был применен метод асимптотического интегрирования. Однородная безмоментная ($\varepsilon = 0$) система (1.5), (1.6) допускает при малых значениях α ($|\alpha| \ll 1$) следующее асимптотическое представление:

$$U_{j,0}(\alpha) = \left\{ \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \nu^2 - \alpha^2) \alpha \psi(\alpha)} \int \psi(\alpha) d\alpha \right\}^{1/2} H_0^{(j)} [\operatorname{tg} \Theta \int \psi(\alpha) d\alpha] \\ j = 1, 2 \quad (2.5)$$

где

$$\psi(\alpha) = \left\{ (1 - \alpha^2) (1 - \nu^2 - \alpha^2)^{-1} [1 + (1 - 2\nu - \alpha^2) (1 - \alpha^2)^{-2} \operatorname{ctg}^2 \Theta] \right\}^{1/2}$$

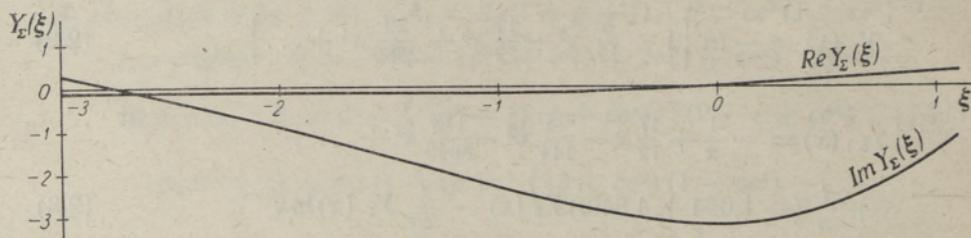
а $H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z)$ — функции Ханкеля от аргумента z . Из уравнения (1.6) определяются безмоментные решения $Y_{j,0}$

$$Y_{j,0} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left\{ \nu \alpha \frac{\partial U_{j,0}}{\partial \alpha} + U_{j,0} \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (2.6)$$

Асимптотические представления функций $Y_{\Sigma}, Y_{6,0}$ при $\xi < -1,4$ получим в форме

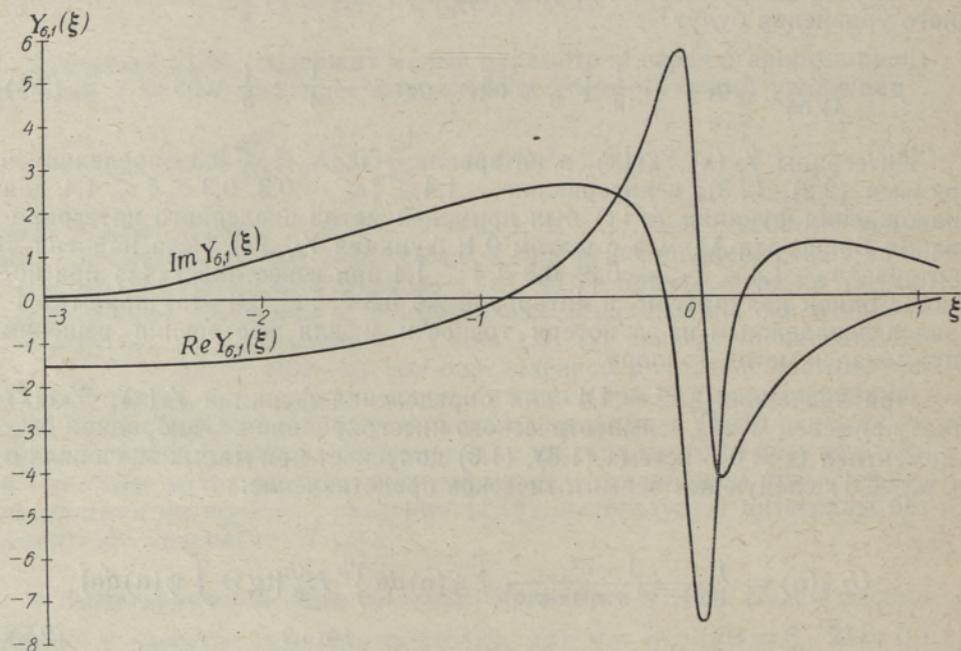
$$Y_{\Sigma} = C_1 Y_{1,0} + C_2 Y_{2,0}, \quad Y_{6,0} = C_3 Y_{1,0} + C_4 Y_{2,0} \quad (2.7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, определяемые условиями сопряжения при $\xi = -1,4$. Интегрирование функции $\psi(\alpha)$, фигурирующей в (2.5),



Фиг. 2.

было проведено разложением $\psi(\alpha)$ по степеням α^2 . Результаты расчета представлены на фиг. 2 и 3.



Фиг. 3.

3. Интегралы однородного уравнения (1.10). Рассмотрим следующие четыре функции:

$$Y_1(x) = y_0(x) \{u_1[z(x)] + u_5[z(x)]\}, \quad Y_5(x) = y_0(x) u_5[z(x)] \\ Y_3(x) = y_0(x) u_3[z(x)], \quad Y_4(x) = y_0(x) u_4[z(x)] \quad (3.1)$$

где $u_1(z), u_5(z), u_3(z), u_4(z)$ — интегралы так называемого эталонного уравнения, приведенного в работе [1], где формулами (3.2) — (3.4) даны также функции $z(x)$ и $y_0(x)$. Функции $Y_1(x), Y_5(x), Y_3(x), Y_4(x)$ являются асимптотическими интегралами уравнения (1.10) при $\epsilon \rightarrow 0$. По своему характеру они при значениях $\xi \ll -|\epsilon|$ сходны с простыми краевыми

эффектами (Y_1, Y_5 — у большего и Y_3, Y_4 — у меньшего основания конуса); при значениях же $\xi \gg |\varepsilon|$ только функции Y_3 и Y_5 можно называть краевыми эффектами (быстро затухающими функциями), так как Y_1, Y_4 будут в этом случае осциллирующими, медленно затухающими функциями.

В рассмотренном ниже (раздел 5) численном примере была принята относительная толщина h/r_b оболочки, равная 0,01, благодаря чему удалось для вычисления функций $u_1(z), u_5(z), u_3(z), u_4(z)$ применить асимптотические формулы (2.8), (2.9) работы [1] даже при малых значениях ξ . Отметим лишь, что асимптотическое представление для функции $u_1(z) + u_5(z)$ при $\arg z > 8\pi/5$ нельзя получить сложением асимптотических выражений $u_1(z)$ и $u_5(z)$, так как это приводит к потере точности. При $\arg z > 8\pi/5$ используем соотношение

$$u_1(z) + u_5(z) = u_2(z) - u_3(z) - u_4(z)$$

откуда следует асимптотическая формула

$$Y_1(x) = Y_2(x) - y_0(x) \{u_2[z(x)] + u_3[z(x)] + u_4[z(x)]\} \quad (3.2)$$

при $\arg z > 8\pi/5$.

За пятый интеграл однородного уравнения (1.10) примем решение Y_2 безмоментного уравнения (1.12), а за шестой — интеграл

$$\begin{aligned} \omega_{31}(z)[\omega_{31,0}(z)]^{-1}Y_{6,1}(x) + Y_5(x) & \text{ при } 4\pi < 5 \arg z < 6\pi \\ \omega_{21}(z)[\omega_{21,0}(z)]^{-1}Y_{6,1}(x) & \text{ ,, } 6\pi < 5 \arg z < 8\pi \\ \omega_{11}(z)[\omega_{11,0}(z)]^{-1}Y_{6,1}(x) - Y_4(x) & \text{ ,, } 8\pi < 5 \arg z < 10\pi \end{aligned} \quad (3.3)$$

где функции $\omega_{j1}(z), \omega_{j1,0}(z)$ являются решениями эталонного уравнения, рассмотренными в работе [1] и определяемыми там контурными интегралами (2.14), (2.16). При малых значениях $|z[x(\xi)]|$ численные значения этих контурных интегралов были найдены методом Симпсона. Следует отметить, что функции $\omega_{j1}(z)$ ($j=1,2,3$) при малых $|z|$ зависят от параметра ε , т. е. от частоты вынужденных колебаний, поэтому объем вычислений для определения функций $\omega_{j1}(z)$ в значительной мере зависит от числа частот, при которых изучается динамика оболочки.

4. Решение краевых задач. Рассмотрим оболочку, где толщина торцовых диафрагм соизмерима с толщиной стенки оболочки. Ограничимся далее исследованием динамики в диапазоне частот, значительно превышающих наименьшую частоту собственных колебаний диафрагм. При этих условиях диафрагмы являются весьма гибкими при изгибе из своей плоскости, но достаточно жесткими в своей плоскости, и поэтому краевые условия, выражающие условия «свободного опирания» оболочки, могут быть выражены в форме

$$2 \frac{dU}{dx} + v(U - Y) - \frac{1 - \nu^2}{2} \varepsilon^4 \frac{d}{dx} e^{-x} \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \quad (4.1)$$

$$U - Y = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{1 - \nu}{2} \frac{dY}{dx} = 0 \quad (4.3)$$

Производные порядка k по x функций Y_1, Y_3, Y_4, Y_5 , определяемые формулами (3.1) через функции $u_1(z), u_3(z), u_4(z), u_5(z)$ с большим показателем изменямости, вычисляются по методу асимптотического интегрирования; например,

$$\frac{d^k Y_1}{dx^k} = y_0(x) \{u_1^{(k)}[z(x)] + u_5^{(k)}[z(x)]\} \left(\frac{dz}{dx}\right)^k \quad (4.4)$$

при $\pi \leq \arg z \leq 8\pi/5$,

$$\frac{d^k Y_1}{dx^k} = \frac{d^k Y_\Sigma}{dx^k} - y_0(x) \{u_2^{(k)}[z(x)] + u_3^{(k)}[z(x)] + u_4^{(k)}[z(x)]\} \left(\frac{dz}{dx}\right)^k \quad (4.5)$$

при $8\pi/5 \leq \arg z \leq 2\pi$; для остальных функций Y_3, Y_4, Y_5 имеем

$$\frac{d^k Y_j}{dx^k} = y_0(x) u_j^{(k)}[z(x)] \left(\frac{dz}{dx}\right)^k \quad (j=3, 4, 5) \quad (4.6)$$

при $\pi \leq \arg z \leq 2\pi$.

Фигурирующие в формулах (4.4)–(4.6) функции $u_j^{(k)}(z)$ определены в статье [1].

Пусть далее U_j, U_Σ будут асимптотические решения системы (1.8), (1.9), принадлежащие к асимптотическим решениям Y_j, Y_Σ этой системы. Можно обосновать следующие формулы:

$$2 \frac{dU_j}{dx} + \nu(U_j - Y_j) = -\frac{1-\nu^2}{2} y_0(x) u_j^{(-1)}[z(x)] \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1} \quad (4.7)$$

$$U_j = \frac{\nu}{2} y_0(x) u_j^{(-1)}[z(x)] \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1} \quad (j=3, 4, 5)$$

Соответствующие выражения для функции Y_1 получаются аналогичным образом. Приводим их для сектора, где $8\pi/5 \leq \arg z \leq 2\pi$:

$$2 \frac{dU_1}{dx} + \nu(U_1 - Y_1) = 2 \frac{dU_\Sigma}{dx} + \nu(U_\Sigma - Y_\Sigma) - \frac{1-\nu^2}{2} y_0(x) \{u_2^{(-1)}[z(x)] + u_3^{(-1)}[z(x)] + u_4^{(-1)}[z(x)]\} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1} \quad (4.8)$$

$$U_1 = U_\Sigma - \frac{\nu}{2} y_0(x) \{u_2^{(-1)}[z(x)] + u_3^{(-1)}[z(x)] + u_4^{(-1)}[z(x)]\} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1}$$

Как и следует ожидать, наибольшие осложнения вызывает составление левых частей выражений (4.1)–(4.3) для функции Y_6 .

В секторе $4\pi < 5 \arg z < 6\pi$ при больших значениях $|z|$ имеем для левых частей (4.1)–(4.3) следующие асимптотические выражения:

$$\frac{w_{31}(z)}{w_{31,0}(z)} \left[2 \frac{dU_{6,0}}{dx} + \nu(U_{6,1} - Y_{6,1}) \right] - \frac{1-\nu^2}{2} y_0(x) u_5^{(-1)}[z(x)] \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1} \\ \frac{w_{31}(z)}{w_{31,0}(z)} [U_{6,1} - Y_{6,1}] - y_0 u_5[z(x)] \quad (4.9)$$

$$\frac{w_{31}(z)}{w_{31,0}(z)} \left[\frac{d^2 Y_{6,1}}{dx^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{dY_{6,1}}{dx} \right] + y_0(x) u_5^{(2)}[z(x)] \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

При малых же значениях $|z|$ в этом секторе имеем вместо (4.9) выражения

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1-\nu^2}{2} y_0 \left\{ \left[w_{31}^{(-1)}(z) \frac{Y_{6,1}}{w_{31,0}} + u_5^{(-1)}(z) \right] \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1} + \right. \\
 & + \varepsilon^4 e^{-x} \left[w_{31}^{(3)}(z) \frac{Y_{6,1}}{w_{31,0}} + u_5^{(3)}(z) \right] \left(\frac{dz}{dx} \right)^3 \left. - y_0 \left\{ w_{31}(z) \frac{Y_{6,1}}{w_{31,0}} + u_5(z) \right\} \right. \\
 & \left. y_0 \left\{ w_{31}^{(2)}(z) \frac{Y_{6,1}}{w_{31,0}} + u_5^{(2)}(z) \right\} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right.
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

где функции $w_{j1}^{(k)}(z)$ определяются контурными интегралами (фиг. 2 статьи [1])

$$w_{j1}^{(k)}(z) = \int_{D_{j1}} (t+q_2)^{ip} (t+q_1)^{-ip} t^k e^{zt - \frac{1}{5} z^4 t^5} dt \quad (4.11)$$

Аналогично изложенному составляются левые части (4.1) — (4.3) для функции $Y_{6,0}$ в секторах $6\pi < 5 \operatorname{arg} z < 8\pi$, $8\pi < 5 \operatorname{arg} z < 10\pi$.

Интегралы типа (4.11) были найдены методами численного интегрирования.

5. Результаты решения частной задачи. Рассмотрим оболочку, где $s_b/s_a = e^{1,1} = 3,0042$, относительная толщина $h/r_b = 0,01$, $\operatorname{tg} \Theta = 3$, $\nu = \frac{1}{3}$, логарифмический декремент затухания — $0,05\pi$ (т. е. $2\lambda = 0,10$). Предположим, что на оболочку действует равномерно распределенная по образующей периодическая нагрузка $q e^{i\omega t}$ с интенсивностью q и частотой ω . Приводим результаты расчета при четырех частотах $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_4$. Введем обозначение $\omega_k^2 = E(\mu r_b^2)^{-1} \omega_{k*}^2$ и примем для ω_{k*}^2 следующие четыре значения: $\omega_{k*}^2 = e^{-1,2+0,4k}$, ($k = 1, 2, 3, 4$). При этих частотах независимая переменная x дается на прямом отрезке

$$x = \xi + \ln(1 - 0,1i)$$

где

$$\xi_a = -3,40 + 0,40k \leq \xi \leq -1,20 + 0,40k = \xi_b \quad (5.1)$$

а малый параметр ε^4 принимает значения

$$\varepsilon_k^4 = (1 - 0,1i) \frac{100}{54} \cdot 10^{-6} e^{-1,2+0,4k} \quad (5.2)$$

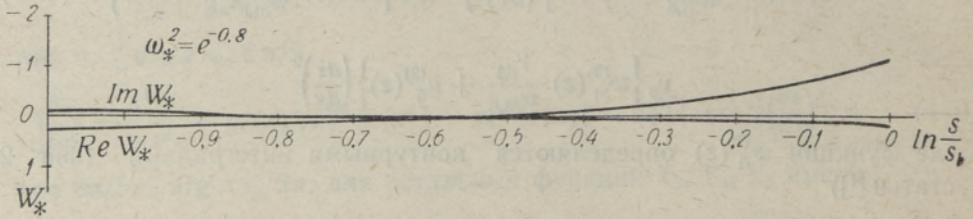
Частный интеграл неоднородного уравнения (1.10) был найден как регулярный в окрестности точки $x = 0$ частный интеграл неоднородного безмоментного уравнения (1.12).

При частотах ω_1, ω_2 краевые задачи были решены по безмоментной теории, причем краевые эффекты вообще не были определены. Отметим, что безмоментное решение должно удовлетворить краевым условиям

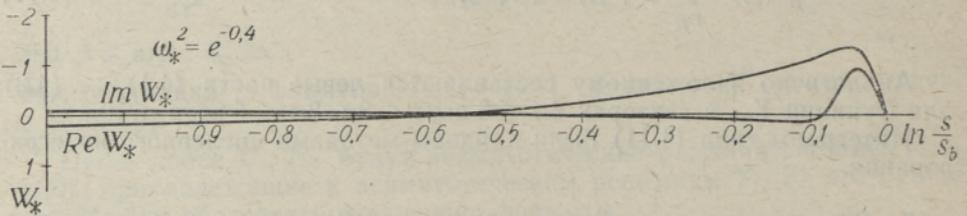
$$2 \frac{dU}{dx} + \nu(U - Y) = 0 \quad (5.3)$$

при $x = x_a(\xi_a)$, $x = x_b(\xi_b)$.

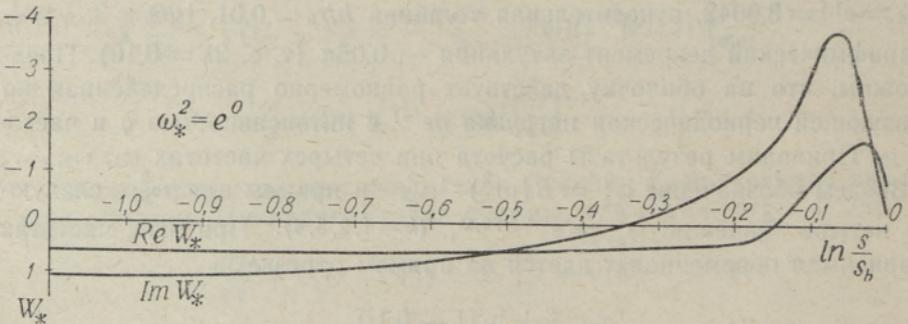
При частотах ω_3 и ω_4 не были определены краевые эффекты у края $x = x_a(\xi_a)$ и от решения требовали выполнения только условия (5.3). У края же $x = x_b(\xi_b)$ удовлетворялись все условия (4.1) — (4.3). Далее, функции $u_j^{(k)}(z)$ были найдены по асимптотическим формулам (2.8), (2.9) работы [1], даже при $\xi = 0$ (где погрешность этих формул должна быть наибольшей).



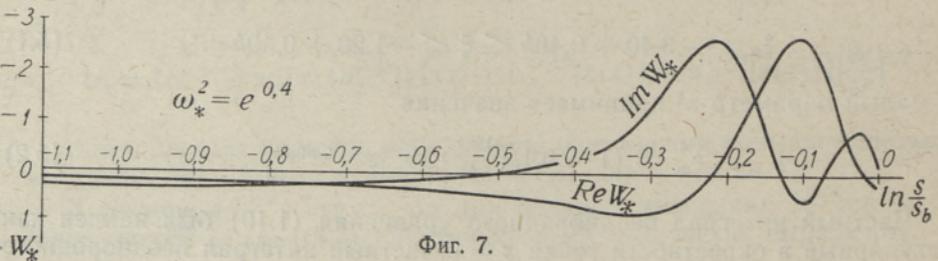
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Результаты расчета представлены графиками функций $\text{Re}W_*\left(\frac{s}{s_b}\right)$, $\text{Im}W_*\left(\frac{s}{s_b}\right)$ на рис. 4—7, где

$$W_*\left(\frac{s}{s_b}\right) = W\left(\frac{s}{s_b}\right) \cdot \frac{3}{4} \frac{Eh}{qr_b^2}, \quad \omega_*^2 = \frac{\mu r_b^2}{E} \omega^2 \quad (5.4)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Алумяэ, О фундаментальной системе интегралов малых установившихся осесимметрических колебаний упругой конической оболочки вращения, Статья в настоящем номере журнала, стр. 3—15.

Институт энергетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23. VI 1959

KOONILISE ROTATSIOONKOORIKU TELGSUMMEETRILINE VÕNKUMINE

I. Veigel, A. Männil, E. Org

Resümees

Töös esitatakse kooriku külgpinnal ühtlaselt jaotatud väliskoormise $qe^{i\omega t}$ toimest tingitud normaalpaigutuste võnkeamplituudid $W(s/s_b)e^{i\omega t}$ neljal erineval sundvõnkesagedusel ω . Kooriku kuju ja osa tähistusi on antud joonisel 1. Arvutustes on võetud $s_b/s_a = e^{1,1}$, $\Theta = \arctg 3$, võnkesumbuvuse logaritmiline dekrement — $0,05\pi$, kooriku suhteline paksus $h/r_b = 1/100$ (h — kooriku paksus); eeldatakse, et kooriku otsdiafragmade paksus on samas suurusjärgus kui h . Lõpptulemused on toodud joonistel 4—7 redutseeritud suuruste (5.4) jaoks, kus E — on elastsusmoodul, μ — kooriku seinamaterjali tihedus.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse
23. VI 1959

SMALL STEADY AXISYMMETRICAL VIBRATIONS OF AN ELASTIC CONICAL SHELL OF REVOLUTION

I. Veigel, A. Männil, E. Org

Summary

Forced vibrations of a simply supported conical shell are investigated at frequencies when the influence of shear deformation and rotatory inertia can be neglected. Damping forces are assumed proportional to velocity of motion.

A fundamental system of asymptotic integrals of equations (1.8), (1.9) is constructed following paper [1], published in this issue. Notations are the same as in [1], the geometrical quantities presented here in Fig. 1. The computations are carried out by special values $\nu = 1/3$, $\arctg \Theta = 3$, $\lambda = 0.05$, $h/r_b = 0.01$, $\ln(s_b/s_a) = 1.1$. Taking $\lambda = 0.05$, equations (1.8), (1.9) are to be integrated over the line $x = \xi + \ln(1 - 0.1i)$, ξ being the real variable.

The solution $Y_\Sigma(\xi)$ of the homogeneous equation of the membrane theory (2.1) was computed in the interval $-1.1 \leq \xi \leq 1.1$ by the method of Bashforth-Adams with a step $\Delta\xi = 0.1$, the second solution $Y_{6,1}(\xi)$ of the homogeneous equation (2.1) by means of $Y_\Sigma(\xi)$ with one quadrature. In the interval $-3.0 \leq \xi < -1.1$ they are obtained by the method of asymptotic integration leading to formula (2.5).

Asymptotical forms for the left sides of boundary conditions (4.1)—(4.3) of a simply supported conical shell are presented by formulae (4.6)—(4.8) for «boundary effects» $Y_1(x)$, $Y_5(x)$ at $s = s_b$, and for the complicate integral $Y_6(x)$ in sector $4\pi < 5 \arg z(x) < 6\pi$ (as an example) by (4.9) at large values of $|z(x)|$ and by (4.10) at small values of $|z(x)|$.

Transverse displacements $W(s)e^{i\omega t}$ of the shell due to uniform lateral loading $qe^{i\omega t}$ are shown in Fig. 4 to 7 for four frequencies ω , notations given by (5.4).

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Energetics

Received
June 23th, 1959