

К РАСЧЕТУ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ДВОЙКОЙ КРИВИЗНЫ

Х. Х. ЭЭСОРГ

Решение задачи о равновесии оболочек по безмоментной теории значительно проще, чем по общей моментной теории. При безмоментной теории порядок дифференциальных уравнений ниже и их форма проще, чем при общей теории оболочек. В некоторых случаях систему уравнений равновесия безмоментной теории оболочек можно привести к уравнению Пуассона (для оболочек положительной гауссовой кривизны) или к неоднородному волновому уравнению (для оболочек отрицательной гауссовой кривизны) [1]. Названные уравнения широко исследованы, и для их решения имеются практические методы.

В связи с тем, что усилия по безмоментной теории оболочек определяются из уравнений равновесия без учета непрерывности деформаций, для существования безмоментного напряженного состояния необходимы специальные условия ([2] стр. 423—432). В дальнейшем предполагается, что эти условия выполнены. Названные условия не исключают возможности возникновения местных напряженных состояний смешанного типа в узких зонах, обыкновенно вблизи краев оболочки. Это напряженное состояние имеет быстрозатухающий характер и называется краевым эффектом. В проектной практике необходимо вычисление моментов и усилий от краевого эффекта, особенно при железобетонных оболочках, где они часто требуют специального армирования в краевых зонах.

Для упрощения вычислительной работы расчет оболочек можно вести по двум стадиям: в первой стадии решается задача безмоментной теории оболочек, во второй — задача определения краевого эффекта.

В дальнейшем при расчете краевого эффекта предполагается, что усилия в оболочке по безмоментной теории найдены.

Рассмотрим прямоугольную (в плане) пологую оболочку, окаймленную по периметру бортовыми элементами в виде арок с затяжками (рис. 1).

Для исследования напряженного состояния вблизи краев оболочки применим известное уравнение краевого эффекта в ортогональной системе криволинейных координат [2]:

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + 4k^2 \bar{w} = 0 \quad (1)$$

где

$$k = \frac{4}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{A}{\sqrt{\delta R_2}} \quad (2)$$

- Здесь ξ, η — криволинейные ортогональные координаты на срединной поверхности оболочки;
 \bar{w} — нормальное перемещение срединной поверхности оболочки, обусловленное краевым эффектом;
 R_2 — радиус кривизны нормального сечения поверхности оболочки, проведенного вдоль координатной линии η ;
 δ — толщина оболочки;
 A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки;
 μ — коэффициент Пуассона.

Интегрирование уравнения (2) изложено в монографии [2].

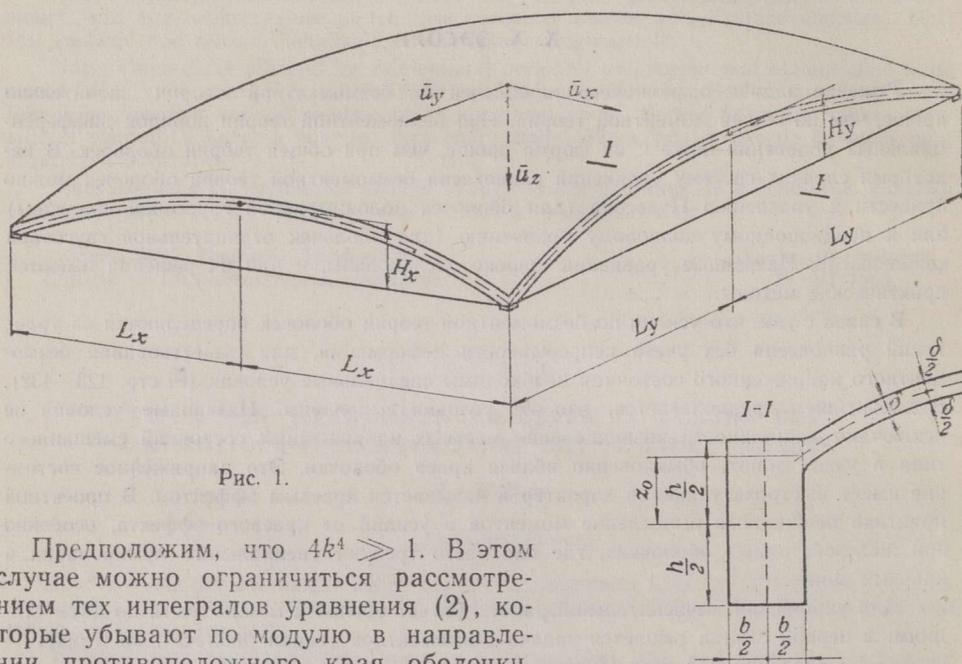


Рис. 1.

Предположим, что $4k^4 \gg 1$. В этом случае можно ограничиться рассмотрением тех интегралов уравнения (2), которые убывают по модулю в направлении противоположного края оболочки.

Для нахождения одного произвола интегрирования предполагается, что жесткость бортового элемента на кручение столь мала, что изгибающий момент на краю оболочки в перпендикулярном краю направлении можно без значительной ошибки считать равным нулю

$$\bar{M}_1 = 0 \quad (3)$$

Вторым краевым условием для нахождения произволов интегрирования является требование, чтобы относительные удлинения на краю оболочки и бортовом элементе на линии их контакта были равны

$$\varepsilon_{06}^* = \varepsilon_{6,9}^* \quad (5)$$

здесь ε_{06}^* — относительное удлинение на краю оболочки;

$\varepsilon_{6,9}^*$ — относительное удлинение в бортовом элементе на линии его контакта с оболочкой.

Положительными считаем направления усилий и моментов, показанные на рис. 2.

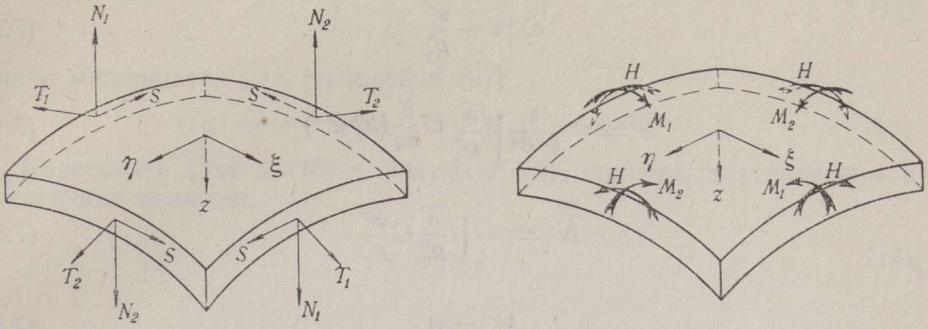


Рис. 2.

Интегрирование уравнения (1) дает для усилий и моментов, обусловленных краевым эффектом, с учетом краевого условия (3), следующие значения [2]:

$$\bar{\bar{w}} = \bar{\bar{w}}^* e^{-k\xi} \cos k\xi \quad (6.1)$$

$$\bar{\bar{T}}_2 = -\frac{E\delta}{R_2} \bar{\bar{w}}^* e^{-k\xi} \cos k\xi \quad (6.2)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_2 = -\frac{\bar{\bar{w}}^*}{R_2} e^{-k\xi} \cos k\xi \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{AB} \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (k\bar{\bar{w}}^*) e^{-k\xi} (\cos k\xi - \sin k\xi) - \right. \\ & \left. - \bar{\bar{w}}^* \frac{\partial k^2}{\partial \eta} \cdot \xi e^{-k\xi} \cos k\xi \right\} \quad (6.4) \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{N}}_1 = -\frac{1}{2} \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\bar{\bar{w}}^*}{R_2 \sqrt{R_2 \delta}} e^{-k\xi} (\cos k\xi - \sin k\xi) \quad (6.5)$$

$$\bar{\bar{M}}_1 = -\frac{1}{2} \frac{E\delta^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\bar{\bar{w}}^*}{R_2} e^{-k\xi} \sin k\xi \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{H}} = & \frac{1}{12} \frac{E\delta^3}{(1+\mu)} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\bar{w}}^* \cdot k) e^{-k\xi} (\cos k\xi + \sin k\xi) - \right. \\ & \left. - \bar{\bar{w}}^* \frac{\partial k^2}{\partial \eta} \xi e^{-k\xi} \sin k\xi \right] \quad (6.7) \end{aligned}$$

На краю оболочки ($\xi = 0$) выражения (6) примут следующие значения:

$$\bar{\bar{w}} = \bar{\bar{w}}^* \quad (7.1)$$

$$\bar{\bar{T}}^* = -\frac{E\delta}{R_2} \bar{\bar{w}}^* \quad (7.2)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = -\frac{\bar{w}^*}{R_2^*} \quad (7.3)$$

$$\bar{S}^* = -\frac{1}{k^* B^*} \sqrt{\frac{\delta}{R_2^*}} C \frac{\partial}{\partial \eta} (k^* \bar{w}^*) \quad (7.4)$$

$$\bar{N}_1^* = -\sqrt{\frac{\delta}{R_2^*}} C \frac{\bar{w}^*}{R_2^*} \quad (7.5)$$

$$\bar{M}_1^* = 0 \quad (7.6)$$

$$\bar{H}^* = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \frac{\delta}{k^* B^*} \sqrt{\frac{\delta}{R_2^*}} C \frac{\partial}{\partial \eta} (k^* \bar{w}^*) \quad (7.7)$$

где

$$C = \frac{E\delta}{4 \sqrt{3}(1-\mu^2)} \quad (8)$$

R_2^*, k^*, B^* — значения величин R_2, k и B при $\xi = 0$.

Выражения (6) и (7) даны в ортогональных криволинейных координатах. В силу узости полос у краев оболочки, подверженных действию краевого эффекта, можно легко образовать приблизительно ортогональную систему криволинейных координат. Пусть в плоскости xu проекции одного семейства приблизительно ортогональных координатных линий являются параллельными с рассматриваемым краем, а проекция другого семейства координатных линий образует с осью x пока неизвестные углы $a = a(\eta)$.

Обозначаем $\operatorname{tga} = a(\eta)$. Тогда уравнение срединной поверхности оболочки в векторной форме имеет вид

$$\bar{r} = L_x(\xi - 1)\bar{U}_x + L_y(1 + a\xi)\eta\bar{U}_y + z(\xi, \eta)\bar{U}_z \quad (9)$$

здесь $\bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z$ — единичные векторы.

Величину $a = \operatorname{tga}$ в уравнении (9) можно найти при помощи метода наименьших квадратов, требуя, чтобы при $\xi = 0$ угол между координатными линиями имел в промежутке $-1 \ll \eta \ll +1$ значение $\frac{\pi}{2}$. Это значит, что

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = 0 \quad (10)$$

где

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \text{ — скалярное произведение векторов } \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \text{ и } \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда оболочка очерчена по поверхности эллиптического параболоида, данного в декартовых координатах следующим уравнением:

$$z(x, y) = \frac{x^2}{L_x^2} H_x + \frac{y^2}{L_y^2} H_y \quad (11)$$

или в координатах ξ, η [уравнение (9)]

$$z(\xi, \eta) = H_x(\xi - 1)^2 + H_y(1 + a\xi)^2\eta^2 \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и учитывая (9), получим для величины a следующие значения:

$$a \approx \frac{4}{\lambda} \gamma_x \gamma_y \quad (13)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{L_y}{L_x}, \quad \gamma_x = \frac{H_x}{L_x}, \quad \gamma_y = \frac{H_y}{L_y}$$

Из (8) следует, что при увеличении пологости оболочек параметр a уменьшается. При особенно пологих оболочках расчет можно провести без значительной погрешности в декартовых координатах.

Если срединная поверхность оболочки дана уравнением (12), то коэффициенты первой квадратичной формы A, B и $AB \cos \chi$ и второй квадратичной формы L, M, N следующие:

$$A = A_0, \quad B = B_0(1 + a\xi), \quad AB \cos \chi \approx 0 \quad (14.1)$$

$$L = \frac{2L_x L_y}{A_0 B_0} H_x, \quad M = \frac{6L_x L_y}{A_0 B_0} a H_y (1 + a\xi) \eta$$

$$N = \frac{2L_x L_y}{A_0 B_0} H_y (1 + a\xi)^2 \quad (14.2)$$

$$\text{где } A_0 = L_x \sqrt{1 + 4\gamma_x^2 (\xi - 1)^2}, \quad B_0 = L_y \sqrt{1 + 4\gamma_y^2 \eta^2} \quad (14.3)$$

При выводе формул (14.1) и (14.2) предположено, что $1 \gg \gamma_x^2 \gg \gamma_x^4$ и $1 \gg \gamma_y^2 \gg \gamma_y^4$. В силу этого формулы являются справедливыми только при пологих оболочках.

Произвол интегрирования $\bar{w}^*(\eta)$ в формулах (6) и (7) находится при помощи уравнения (5)

$$\varepsilon_{\text{об}}^* = \varepsilon_{6,3}^*$$

где $\varepsilon_{6,3}^*$ вычисляем по формуле внецентренного сжатия (или внецентренного растяжения):

$$\varepsilon_{6,3}^* = \frac{T}{EF} + \frac{Mz_0}{EI} \quad (15)$$

где T, M — нормальная сила и изгибающий момент в бортовом элементе;

F, I — площадь поперечного сечения и момент инерции бортового элемента;

z_0 — расстояние от оси бортового элемента до линии контакта (до срединной поверхности) оболочки с бортовым элементом;

E — модуль упругости.

В качестве бортового элемента применим арку постоянного прямоугольного сечения с затяжкой. Предположим, что к арке приложены следующие нагрузки: нормальная к оси арки нагрузка p_N , касательная к оси арки нагрузка p_S и внешний момент p_M . Эти нагрузки имеют следующие значения:

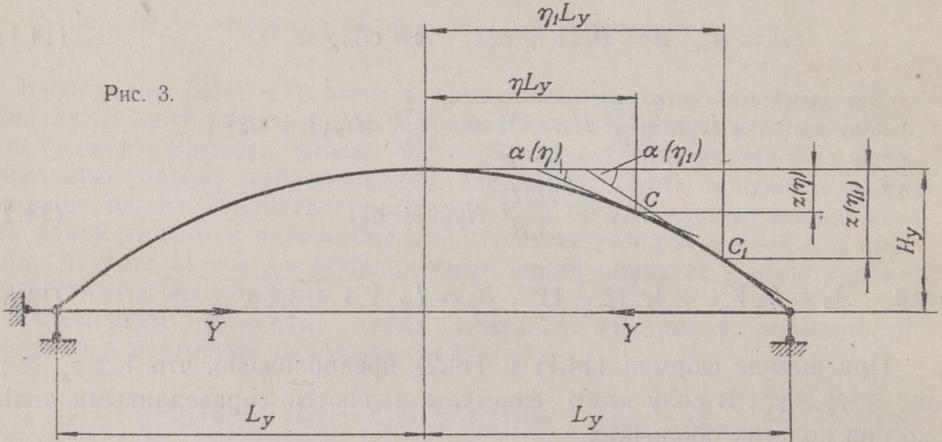
$$\begin{aligned} p_N &= N_0 + \bar{N}_1^* \\ p_S &= S_0 + \bar{S}^* + \bar{S}^* \\ p_M &= H_0 + \bar{H}^* + (\bar{S}^* + \bar{S}^*)z_0 \end{aligned} \quad (16)$$

где N_0 , S_0 , H_0 — приложенные непосредственно к арке нагрузки и внешний момент;

\bar{S}^* — касательное усилие на краю оболочки по безмоментной теории;

\bar{N}^* , \bar{S}^* , \bar{H}^* — усилия и крутящий момент на краю оболочки от краевого эффекта согласно формулам (7).

Для нахождения величин T и M в формуле (15) составим зависимости нормальной силы и изгибающего момента в арке в точке C с координатами η и $z(\eta)$ от единичной внешней нагрузки, приложенной в точке C_1 с координатами η_1 и $z(\eta_1)$ (уравнение линии влияния).



Обозначим (согласно рис. 3): Y — натяжение в затяжке;

$m_{co}^v(\eta, \eta_1)$, $t_{co}^v(\eta, \eta_1)$ — изгибающий момент и нормальная сила в сечении C от единичной вертикальной нагрузки $V = 1$, приложенной в точке C_1 , при $Y = 0$;

$m_{co}^H(\eta, \eta_1)$, $t_{co}^H(\eta, \eta_1)$ — то же от единичной горизонтальной нагрузки $H = 1$, приложенной в точке C_1 , при $Y = 0$;

$m_{co}^M(\eta, \eta_1)$, $t_{co}^M(\eta, \eta_1)$ — то же от единичного момента, приложенного в точке C_1 , при $Y = 0$;

$m_c^v(\eta, \eta_1)$, $t_c^v(\eta, \eta_1)$ — изгибающий момент и нормальная сила в точке C от единичной вертикальной силы $v = 1$, приложенной в точке C_1 ;

$m_c^H(\eta, \eta_1)$, $t_c^H(\eta, \eta_1)$ — то же от единичной горизонтальной силы $H = 1$, приложенной в точке C_1 ;

$m_c^M(\eta, \eta_1)$, $t_c^M(\eta, \eta_1)$ — то же от единичного момента $M = 1$, приложенного в точке C_1 ;

$m(\eta)$, $t(\eta)$ — изгибающий момент и нормальная сила в арке от натяжения в затяжке $Y = 1$;

$$\widehat{B} = \sqrt{L_y^2 + z'(\eta)^2}$$

α — угол наклона касательной в точке с координатами η и $z(\eta)$ (рис. 3):

$$\sin \alpha = \frac{z'(\eta)}{\widehat{B}(\eta)}, \quad \cos \alpha = \frac{L_y}{\widehat{B}(\eta)}, \quad z'(\eta) = \frac{dz(\eta)}{d\eta}$$

$z(\eta)$ — ордината оси арки.

Найдем выражения изгибающего момента и нормальной силы в точке арки с координатами η и $z(\eta)$ от единичных нагрузок, если натяжение в затяжке $Y = 0$, в следующих случаях:

1. В точке C_1 приложена единичная вертикальная сила $V = 1$ при $\eta_1 > \eta$

$$m_{c_0}^v = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - \eta_1)L_y \quad (17.1)$$

$$t_{c_0}^v = \frac{1}{2}(1 - \eta_1) \frac{z'(\eta)}{\widehat{B}(\eta)} \quad (17.2)$$

при $\eta_1 < \eta$

$$m_{c_0}^v = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 + \eta_1)L_y \quad (17.3)$$

$$t_{c_0}^v = -\frac{1}{2}(1 + \eta_1) \frac{z'(\eta)}{\widehat{B}(\eta)} \quad (17.4)$$

2. В точке C_1 приложена единичная горизонтальная сила $H = 1$ при $\eta_1 > \eta$

$$m_{c_0}^H = \frac{1}{2}[H_y - z(\eta_1)](1 - \eta) + z(\eta_1) - z(\eta) \quad (18.1)$$

$$t_{c_0}^H = -\left[\frac{1}{2}(H_y - z(\eta_1)) \frac{z'(\eta)}{L_y} - L_y \right] \frac{1}{\widehat{B}(\eta)} \quad (18.2)$$

при $\eta_1 < \eta$

$$m_{c_0}^H = \frac{1}{2}[H_y - z(\eta_1)](1 - \eta) \quad (18.3)$$

$$t_{c_0}^H = -\frac{1}{2}[H_y - z(\eta_1)] \frac{z'(\eta)}{L_y \widehat{B}(\eta)} \quad (18.4)$$

3. В точке C_1 приложен единичный момент $M = 1$ при $\eta_1 > \eta$

$$m_{c_0}^M = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (19.1)$$

$$t_{c_0}^M = \frac{1}{2} \frac{z'(\eta)}{L_y \widehat{B}(\eta)} \quad (19.2)$$

при $\eta_1 < \eta$

$$m_{c0}^M = -\frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (19.3)$$

$$t_{c0}^M = \frac{1}{2} \frac{z'(\eta)}{L_y \widehat{B}(\eta)} \quad (19.4)$$

Изгибающий момент и нормальная сила в точке C от единичного натяжения в затяжке $Y = 1$

$$m(\eta) = z(\eta) - H_y \quad (20.1)$$

$$t(\eta) = -\frac{L_y}{\widehat{B}(\eta)} \quad (20.2)$$

Учитывая (17), (18), (19) и (20), найдем изгибающий момент и нормальную силу в однократно статически неопределенной арке с затяжкой в точке C от единичных нагрузок, приложенных в точке C_1

$$m_c^i(\eta, \eta_1) = m_{c0}^i(\eta, \eta_1) + Y^i m(\eta) \quad (21.1)$$

$$t_c^i(\eta, \eta_1) = t_{c0}^i(\eta, \eta_1) + Y^i t(\eta) \quad (21.2)$$

здесь i — одна из букв V , H или M , обозначающих вид приложенных единичных нагрузок.

$$Y^i = -\frac{\delta_{10}^i(\eta_1)}{\delta_{11}} \quad (22)$$

где

$$\delta_{10}(\eta_1) = \frac{1}{EI} \int_{-1}^{+1} m_{c0}^i(\eta, \eta_1) m(\eta) \widehat{B}(\eta) d\eta + \frac{1}{EF} \int_{-1}^{+1} t_{c0}^i(\eta, \eta_1) t(\eta) \widehat{B}(\eta) d\eta \quad (23)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_{-1}^{+1} m(\eta)^2 \widehat{B}(\eta) d\eta + \frac{1}{EF} \int_{-1}^{+1} t(\eta)^2 \widehat{B}(\eta) d\eta + \frac{2L_y}{E_a F_a} \quad (24)$$

здесь E_a , F_a — модуль упругости и площадь сечения затяжки.

Примечание. Часто натяжение в затяжке является известным (например, при последовательно напряженных затяжках). В этом случае нет необходимости вычислять Y^i по формуле (22) и Y рассматривается как известная, приложенная к арке внешняя нагрузка.

Учитывая выражения (21), найдем изгибающий момент $M(\eta)$ и нормальную силу $T(\eta)$ в бортовом элементе от нагрузок p_N , p_B и p_M (16)

$$\begin{aligned} M(\eta) = & L_y \int_{-1}^{+1} \{ [p_B(\eta_1) \sin \alpha(\eta_1) + p_N(\eta_1) \cos \alpha(\eta_1)] m_c^V(\eta, \eta_1) + \\ & + [p_B(\eta_1) \cos \alpha(\eta_1) - p_N(\eta_1) \sin \alpha(\eta_1)] m_c^H(\eta, \eta_1) + \\ & + p_M(\eta_1) m_c^M(\eta, \eta_1) \} d\eta_1 \quad (25.1) \end{aligned}$$

$$T(\eta) = L_y \int_{-1}^{+1} \{ [p_S(\eta_1) \sin \alpha(\eta_1) + p_N(\eta_1) \cos \alpha(\eta_1)] t_c^V(\eta, \eta_1) + [p_S(\eta_1) \cos \alpha(\eta_1) - p_N(\eta_1) \sin \alpha(\eta_1)] t_c^H(\eta, \eta_1) + p_M(\eta_1) t_c^M(\eta, \eta_1) \} d\eta_1 \quad (25.2)$$

$$\text{где } \sin \alpha(\eta_1) = \frac{z'(\eta_1)}{\widehat{B}(\eta_1)}, \quad \cos \alpha(\eta_1) = \frac{L_y}{\widehat{B}(\eta_1)}$$

Подставляя выражения (25) в (15), найдем $\varepsilon_{6.3}^*$.

Величины ε_{06}^* в уравнении (5) являются суммой относительных удлинений на краю оболочки по безмоментной теории и от краевого эффекта

$$\varepsilon_{06}^* = \bar{\varepsilon}_{06}^* + \bar{\bar{\varepsilon}}_{06}^* \quad (26)$$

здесь $\bar{\varepsilon}_{06}^*$ — относительное удлинение на краю оболочки по безмоментной теории, которое мы, согласно ранее сделанным предположениям, считаем известным

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{06}^* = \bar{\bar{\varepsilon}}_2^* - \frac{\bar{\bar{\omega}}^*}{R_2} \quad [\text{согласно (7.3)}]$$

Подставляя выражения для ε_{06}^* (26) и $\varepsilon_{6.3}^*$ (15) в уравнение (5), получим после преобразования для нахождения $\bar{\bar{\omega}}^*$ интегральное уравнение Фредгольма:

$$\frac{1}{R_2^*(\eta)} \bar{\bar{\omega}}^*(\eta) = F(\eta) + C \int_{-1}^{+1} K(\eta, \eta_1) \bar{\bar{\omega}}^*(\eta_1) d\eta_1 \quad (27)$$

$$C = \frac{1}{4} \frac{\delta L_y}{2\sqrt{3}(1-\mu^2) T}$$

Вид функций $F(\eta)$ и $K(\eta, \eta_1)$ в интегральном уравнении (27) зависит от того, рассматривается натяжение в арматуре как известная или неизвестная величина.

В первом случае (Y считаем известным) функции $F(\eta)$ и $K(\eta, \eta_1)$ следующие:

$$F(\eta) = \bar{\varepsilon}_2^* - \frac{Y}{EI} [m(\eta) z_0 + t(\eta) \frac{I}{F}] - \\ - \frac{L_y}{EI} \int_{-1}^{+1} \left\{ [N_0(\eta_1) L_y + (S_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1)) z'(\eta_1)] m_{c0}^V(\eta, \eta_1) + \right. \\ \left. + [-N_0(\eta_1) z'(\eta_1) + (S_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1)) L_y] m_{c0}^H(\eta, \eta_1) + [H_0(\eta_1) + \right. \\ \left. + \bar{S}^*(\eta_1) z_0] \times m_{c0}^M(\eta, \eta_1) \widehat{B}(\eta_1) \right\} \frac{z_0}{\widehat{B}(\eta_1)} + \left\{ [N_0(\eta_1) L_y + (S_0(\eta_1) + \right. \\ \left. + \bar{S}^*(\eta_1)) z'(\eta_1)] t_{c0}^V(\eta, \eta_1) + [-N_0(\eta_1) z'(\eta_1) + \right. \\ \left. + (S_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1)) L_y] t_{c0}^H(\eta, \eta_1) + [H_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1) z_0] \times \right. \\ \left. \times t_{c0}^M(\eta, \eta_1) \widehat{B}(\eta_1) \right\} \frac{1}{\widehat{B}(\eta_1)} \frac{I}{F} \Bigg\} d\eta_1 \quad (28.1)$$

$$\begin{aligned}
K(\eta, \eta_1) = & \frac{1}{R_2^*(\eta_1) \widehat{B}(\eta_1)} \sqrt{\frac{\delta}{R_2^*(\eta_1)}} \left\{ [z_0 m_{c0}^v(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_{c0}^v(\eta, \eta_1)] L_y - \right. \\
& - [z_0 m_{c0}^H(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_{c0}^H(\eta, \eta_1)] z'(\eta_1) \left. \right\} - k^*(\eta_1) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left\{ [z_0 m_{c0}^v(\eta, \eta_1) + \right. \\
& + \frac{I}{F} t_{c0}^v(\eta, \eta_1)] z'(\eta_1) + [z_0 m_{c0}^H(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_{c0}^H(\eta, \eta_1)] L_y + \\
& + [z_0 m_{c0}^M(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_{c0}^M(\eta, \eta_1)] \left(z_0 - \frac{\delta}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \right) \widehat{B}(\eta_1) \left. \right\} \times \\
& \times \frac{1}{k^*(\eta_1) \widehat{B}(\eta_1) B^*(\eta_1)} \sqrt{\frac{\delta}{R_2^*(\eta_1)}} \quad (28.2)
\end{aligned}$$

При неизвестном натяжении Y в затяжке выражения для функций $F(\eta)$ и $K(\eta, \eta_1)$ примут вид:

$$\begin{aligned}
F(\eta) = & \bar{\varepsilon}_2^* - \frac{L_y}{EI} \int_{-1}^{+1} \left\{ [N_0(\eta_1) L_y + (S_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1)) z'(\eta_1)] m_c^v(\eta, \eta_1) + \right. \\
& + [-\bar{N}_0(\eta_1) z'(\eta_1) + (S_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1)) L_y] m_c^H(\eta, \eta_1) + [H_0(\eta_1) + \\
& + \bar{S}^*(\eta_1) z_0] m_c^M(\eta, \eta_1) \widehat{B}(\eta_1) \left. \right\} \frac{z_0}{\widehat{B}(\eta_1)} + \left\{ [N_0(\eta_1) L_y + \right. \\
& + (S_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1)) z'(\eta_1)] t_c^v(\eta, \eta_1) + [-N_0(\eta_1) z'(\eta_1) + (S_0(\eta_1) + \\
& + \bar{S}^*(\eta_1)) L_y] t_c^H(\eta, \eta_1) + [H_0(\eta_1) + \bar{S}^*(\eta_1) z_0] t_c^M(\eta, \eta_1) \widehat{B}(\eta_1) \left. \right\} \frac{1}{\widehat{B}(\eta_1)} \frac{I}{F} d\eta_1 \quad (29.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(\eta, \eta_1) = & \frac{1}{R_2^*(\eta_1) \widehat{B}(\eta_1)} \sqrt{\frac{\delta}{R_2^*(\eta_1)}} \left\{ [z_0 m_c^v(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_c^v(\eta, \eta_1)] L_y - \right. \\
& - [z_0 m_c^H(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_c^H(\eta, \eta_1)] z'(\eta_1) \left. \right\} - k^*(\eta_1) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left\{ [z_0 m_c^v(\eta, \eta_1) + \right. \\
& + \frac{I}{F} t_c^v(\eta, \eta_1)] z'(\eta_1) + [z_0 m_c^H(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_c^H(\eta, \eta_1)] L_y + \\
& + [z_0 m_c^M(\eta, \eta_1) + \frac{I}{F} t_c^M(\eta, \eta_1)] \left(z_0 - \frac{\delta}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} \right) \widehat{B}(\eta_1) \left. \right\} \times \\
& \times \frac{1}{k^*(\eta_1) \widehat{B}(\eta_1) B^*(\eta_1)} \sqrt{\frac{\delta}{R_2^*(\eta_1)}} \quad (29.2)
\end{aligned}$$

При применении метода, изложенного в статье [1], \bar{S}^* и $\varepsilon_{\delta 0}^*$ обычно получают в виде численных значений. В этом случае для решения уравнения (27) целесообразны численные методы.

В связи с тем, что функции $m_c^i(\eta, \eta_1)$, $t_c^i(\eta, \eta_1)$, $m_{c0}^i(\eta, \eta_1)$ и $t_{c0}^i(\eta, \eta_1)$ на диагонали $\eta = \eta_1$ квадрата $-1 \leq \eta \leq +1$, $-1 \leq \eta_1 \leq +1$ являются непрерывными, ядро интегрального уравнения (27) $K(\eta, \eta_1)$ терпит разрыв на той же диагонали. Последнее обстоятельство необходимо учитывать при решении уравнения (27), применяя при составлении функций $K(\eta, \eta_1)$ и $F(\eta)$ выражения для m_c^i , m_{c0}^i , t_c^i , t_{c0}^i из соотношений (17), (18), (19) и (21) в зависимости от того, является ли η_1 меньше или больше η .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Гольденвейзер, Безмоментная теория оболочек, очерченных по поверхности второго порядка, ПММ, т. XI, в. 2, 1947.
2. А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Гостехтеориздат, М., 1953.

*Институт строительства и строительных материалов
Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
16 VIII 1958

LAMEDA KAHE KUMERUSEGA KOORIKU ÄAREEFEKTI ARVUTUSEST

H. Eesorg

Resüme

Artiklis vaadeldakse lameda kooriku äareefekti arvutust. Arvestatakse, et kooriku membraanjõud on juba momentidevaba teooria alusel leitud. Kooriku äareefektist põhjustatud keskpinna normaalpaigutuse avalduses esinevate integreerimiskonstantide leidmiseks eeldatakse, et: 1) ääreliikmetel puudub väändejäikus; 2) kooriku ja ääreliikme kokkupuute joonel on relatiivsed pikenemised mõlemis võrdsed. Esimese tingimuse arvestamine võimaldab äareefektist põhjustatud kooriku keskpinna normaalpaigutust, sisejõude ja momente avaldada kujus (6), kus tundmatu funktsioon $\bar{\omega}^*$ leitakse tingimusest nr. 2. Viimase tingimuse rahuldamine taandub Fredholm'i integraalvõrrandi (27) lahendamisele.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Ehituse ja Ehitusmaterjalide Instituut*

Saabus toimetusse
16. VIII 1958

ZUR BERECHNUNG DER RANDSTÖRUNGEN DER FLACHEN
KUPPELARTIGEN SCHALE

H. Eesorg

Zusammenfassung

Der Aufsatz bringt eine Berechnung der Randstörungen der flachen kuppelartigen Schale. Es wird vorausgesetzt, dass die inneren Kräfte mit Hilfe der Membrantheorie gefunden worden sind. Es wird angenommen: 1) dass die Stringer keine Torsionssteifigkeit haben; 2) dass die Zug- oder Druckdeformationen in der Schale und im Stringer an der Kontaktlinie des Stringers und der Schale gleich sind. Diese Bedingungen erlauben es, die Integrierungskonstanten in der Formel der Normalverschiebung der Mittelfläche und der inneren Kräfte (6) zu finden. Die Erfüllung der letzten Bedingungen wird zur Lösung der Integralgleichung (27) reduziert.

*Institut für Bauwesen und Baumaterialien
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR*

Eingegangen
am 16. Aug. 1958