

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ СДВИГЕ

Х. К. АБЕН

Рассмотрим весьма длинную цилиндрическую панель, продольные края которой получают постоянное по длине панели относительное продольное перемещение (рис. 1), при следующих граничных условиях:

$$w \left(a, \pm \frac{b}{2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$M_{\beta} \left(a, \pm \frac{b}{2} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} \left(a, \pm \frac{b}{2} \right) = 0, \quad (3)$$

$$S_{\beta} \left(a, \pm \frac{b}{2} \right) = 0, \quad (4)$$

где u , v , w — перемещения срединной поверхности панели; M_{β} — изгибающий момент относительно оси α ; S_{β} — нормальная сила в направлении координаты β ; b — безразмерная ширина панели.

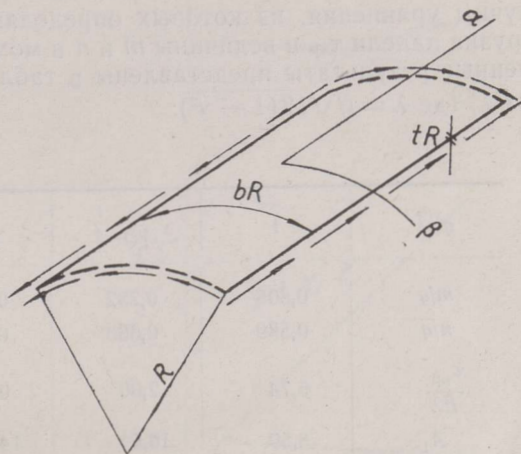


Рис. 1

Для решения поставленной задачи применяем следующую вариационную формулу:

$$\delta \iint \left\{ 2\tau_0 tR \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{Et^3 R}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right) \right] - \right. \\
 \left. - \frac{R}{Et} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \right)^2 - 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right) \right] - \right. \\
 \left. - R \left(2w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right\} R^2 d\alpha d\beta = 0. \quad (5)$$

Функцию прогиба w и функцию напряжений φ аппроксимируем в виде:

$$w = A \cos(m\alpha - n\beta) \cos q\beta + B(1 + \cos 2q\beta) + \\
 + C \cos 2(m\alpha - n\beta)(1 + \cos 2q\beta), \quad (6)$$

$$\varphi = K \cos(m\alpha - n\beta) \cos q\beta + L \cos 2q\beta + \\
 + M \cos 2(m\alpha - n\beta)(1 + \cos 2q\beta) + \tau t \alpha \beta, \quad (7)$$

где $q = \pi/b$.

Величина $\tau_0 t$ означает касательное усилие, обусловленное относительным сдвигом продольных краев, в случае безмоментного напряженного состояния. Величина $(\tau_0 - \tau) t$ представляет среднее касательное усилие после потери устойчивости.

Функция прогиба (6) и функция напряжений (7) удовлетворяют граничным условиям (1) и (4). Граничные условия (2) и (3) удовлетворяются в процессе решения вариационной задачи приближенно.

Для определения верхней критической нагрузки панели отбрасываем неквадратичные члены в функционале (5) и учитываем в выражениях (6) и (7) только первый член. Подставляя выбранные ψ и φ в сокращенное выражение (5) и производя интегрирование, получим:

$$\delta \left\{ A^2 \left[\frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \left((m^2 + n^2 + q^2)^2 + 4n^2q^2 \right) - \tau_0 t m n \right] - \frac{K^2}{2Et} \left[(m^2 + n^2 + q^2)^2 + 4n^2q^2 \right] + AKm^2 \right\} = 0. \quad (8)$$

Требую стационарности выражения (8) относительно A , K , m и n , получим уравнения, из которых определяются верхняя критическая нагрузка панели $\tau_{кр}$ и величины m и n в момент потери устойчивости. Полученные результаты представлены в табл. 1 в зависимости от параметра $q\sqrt{\lambda}$, где $\lambda = t/\sqrt{12(1-\nu^2)}$.

Таблица 1

$q\sqrt{\lambda}$	1	$10^{-\frac{1}{4}}$	$10^{-\frac{1}{2}}$	$10^{-\frac{3}{4}}$	10^{-1}
m/q	0,808	0,752	0,570	0,360	0,211
n/q	0,589	0,660	0,822	0,933	0,977
$\frac{\tau_{кр}}{Et}$	5,74	2,00	0,882	0,457	0,251
A_1	8,59	10,5	14,7	21,7	35,9
A_3	-0,104	0,231	1,396	2,79	35,8
C_2	0,279	0,949	1,72	1,74	1,65
m_2	-0,0839	-0,1928	-0,0825	-0,0307	+0,00331
n_2	+0,189	-0,0601	-0,301	-0,1980	-0,0353

Для определения закритических деформаций панели подставим полные выражения (6) и (7) в функционал (5). Производя интегрирование, получим:

$$\delta \left\{ A^2 \left[\frac{Et^3}{48(1-\nu^2)} \left((m^2 + n^2 + q^2)^2 + 4n^2q^2 \right) + \frac{1}{2} \tau t m n - \frac{1}{2} \tau_0 t m n \right] + B^2 \frac{2Et^3}{3(1-\nu^2)} q^4 + C^2 \left[\frac{Et^3}{3(1-\nu^2)} \left(3(m^2 + n^2 + q^2)^2 - 2q^4 - 4m^2q^2 \right) - 6\tau_0 t m n + 6\tau t m n \right] - K^2 \frac{1}{4Et} \left[(m^2 + n^2 + q^2)^2 + 4n^2q^2 \right] - L^2 \frac{8}{Et} q^4 - M^2 \frac{4}{Et} \left[3(m^2 + n^2 + q^2)^2 - 2q^4 - 4m^2q^2 \right] - A^2 L \frac{1}{2} m^2 q^2 - A^2 M \frac{1}{2} m^2 q^2 - C^2 L 16 m^2 q^2 - ABK m^2 q^2 - A^2 C K m^2 q^2 + CM 6 m^2 + AK \frac{1}{2} m^2 - \tau^2 \frac{2t(1+\nu)}{E} \right\} = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя выражение (9) по $A, B, C, K, L, M, \tau, m$ и n , получим систему уравнений для определения указанных величин. Для решения этой системы применяем метод разложения решения по степеням малого параметра. Выражаем искомые величины * в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} A &= \eta A_1 + \eta^3 A_3 + \eta^5 A_5, \\ \frac{1}{\lambda} C &= \eta^2 C_2 + \eta^4 C_4, \\ \frac{1}{Et\lambda^2} K &= \eta K_1 + \eta^3 K_3 + \eta^5 K_5, \\ \frac{1}{Et\lambda^2} M &= \eta^2 M_2 + \eta^4 M_4, \\ \tau_0 &= \tau_{кр} (1 + \eta^2), \\ \frac{1}{q} m &= m_0 + \eta^2 m_2, \\ \frac{1}{q} n &= n_0 + \eta^2 n_2. \end{aligned} \right\} (10)$$

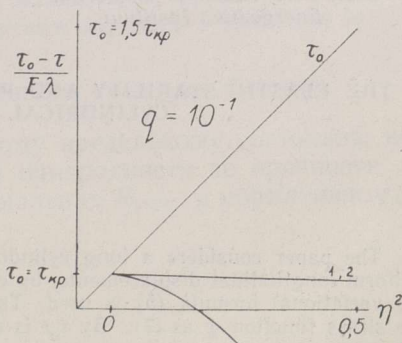
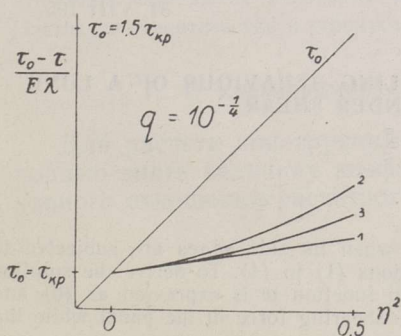
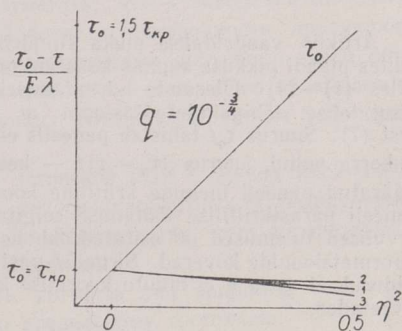
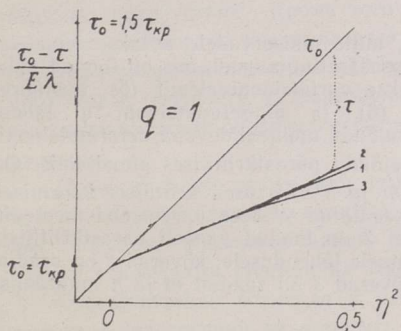
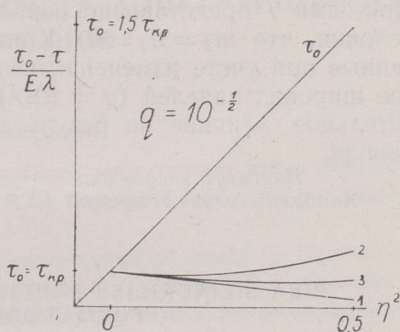


Рис. 2.

* Величины B, L и τ легко исключаются из системы уравнений.

Подставляя выражения (10) в полученную систему, получим рекурсивные системы линейных уравнений для определения входящих в выражения (10) коэффициентов. Коэффициенты A_1, A_3, C_2, m_2 и n_2 также представлены в табл. 1. Величина τ определяется по формуле:

$$\frac{\tau}{E\lambda} = \frac{mn}{2(1+\nu)\lambda} \left(\frac{1}{4} A^2 + 3C^2 \right). \quad (11)$$

Кривые закритических деформаций панели представлены на рис. 2. Прямыми 1 представлено первое приближение. Кривые 2 получены при условии, что $m_2 = n_2 = 0$. Кривыми 3 представлены результаты, полученные при учете изменения величин m и n . Как видно из рис. 2, в случае широких панелей ($q = 10^{-1}$) изменение m и n оказывает весьма значительное влияние на результаты расчета закритических деформаций панели.

Институт энергетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
31 VIII 1957

PIKA SILINDRILISE PANEELI STABIILSUS JA PÄRASTKRIITILISED DEFORMATSIOONID NIHKEKOORMISEL

H. Aben

Resümee

Artiklis vaadeldakse pikka silindrilist paneeli, mille pikiservadele antakse teineteise suhtes plaadi pikkuse suunas konstantne pikipaigutus ääritingimustel, mis on toodud valemities (1)–(4). Ülesande lahendamiseks kasutatakse variatsioonivalemit (5), kusjuures kasutatakse läbipaindefunktsiooni ω lähendust (6) ja pingefunktsiooni φ lähendust (7). Suurus $\tau_0 t$ tähistab paneelis esinevat nihkejõudu momentidevaba deformatsioonilokorra puhul, suurus $(\tau_0 - \tau)t$ — keskmist nihkejõudu pärastkriitilises staadiumis. On määratud paneeli ülemine kriitiline koormis ning m ja n väärtused kriitilisel koormisel. Paneeli pärastkriitilise töötamise selgitamiseks on kasutatud väikese parameetri meetodit. Arvulised tulemused on esitatud tabelis 1. Joonisel 2 on toodud paneeli pärastkriitiliste deformatsioonide kõverad. Sirged 1 vastavad lineaarsele lähendusele; kõverad 2 on saadud eeldusel, et m ja n ei muutu koormise kasvades; kõverad 3 on saadud m ja n muutumist arvestades.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse
31. VIII 1957

THE ELASTIC STABILITY AND POSTBUCKLING BEHAVIOUR OF A LONG CYLINDRICAL PANEL UNDER SHEAR

H. Aben

Summary

The paper considers a long cylindrical panel when its side edges are subjected to uniform longitudinal displacements, by edge conditions (1) to (4). To derive the solution the variational formula (5) is used. The deflection function ω is expressed as (6) and the stress function φ as (7). By $\tau_0 t$ is denoted the shearing force in the panel while the deformations are purely membrane, $(\tau_0 - \tau)t$ expresses the average shearing force after the buckling. The upper critical load and the values of m and n in the moment of buckling are determined. Considering the postbuckling behaviour of the panel the method of perturbation is used. Numerical results are presented in table 1. The postbuckling behaviour of the panel is graphically shown on fig. 2. The straight lines 1 present the linear approximation; curves 2 are obtained assuming that m and n are constants; curves 3 are obtained taking into account the variation of m and n .

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Energetics

Received
Aug. 31, 1957