EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VI KOIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1957, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VI
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1957, № 1

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1957.1.03

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ФОТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПУЧЕННЫХ ПЛАСТИНОК

Х. К. АБЕН

Пластинки большого прогиба исследовали методом фотоупругости Ростовцев [12], Куфнер [6] и Ферро [2], однако примененная ими методика не дает общего метода для решения аналогичных задач. В настоящей работе рассматривается применение обычного полярископа для исследования выпученных пластинок.

В первом разделе статьи излагается теория фотоупругости, позволяющая истолковать поляризационно-оптические явления в рассматриваемом случае. Во втором разделе описываются экспериментальные установки и методика эксперимента. Третий раздел посвящен анализу экспериментальных данных с точки зрения теории фотоупругости.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы, которые относятся к материалам средней оптической активности: При рассмотрении изменяющегося как по величине, так и по направлению напряженного состояния в обычном полярископе всегда можно найти положение поляризатора, при котором выходящий из модели луч является плоскополяризованным. Угол поворота плоскости поляризации не совпадает с углом между главными направлениями на поверхностях пластинки, а направление поворота плоскости поляризации может не совпадать с направлением поворота главного напряжения. Вследствие поворота плоскости поляризации разность хода может уменьшаться. Применение элементарной теории, изложенной в работе Фрохта [3], при интерпретации поляризационно-оптических явлений ведет к неправильным результатам, причем действительные напряжения в модели больше, чем это дает элементарная теория.

За ценную помощь, оказанную при разработке развитой в § 1 теории, автор искренне благодарен сотруднику ИССМ АН ЭССР Э. Г. Саксу.

§ 1. Приложение теории фотоупругости к исследованию выпученных пластинок

Если напряженное состояние изменяется в направлении световой нормали как по величине, так и по направлению, то адекватное истолкование поляризационно-оптических явлений приобретает особенно большое значение, поскольку применение элементарной теории ([3] стр. 328—357), основанной на геометрической оптике, не дает в общем случае надежных результатов. Отметим, что изучение поляризационно-оптических явлений в переменном напряженном состоянии начато уже в 1841 г. Нейманном [9], который вывел уравнения, позволяющие учитывать поворот квазиглавных напряжений. В дальнейшем они были продолжены Дракером, Миндлином и Гудманом [1, 7, 8], Гинзбургом [5], Роурком [13] и Прошко [10, 11]. Однако в применении к рассматриваемому случаю эти исследования не дают приемлемых в практике результатов. Полученные до сих пор основные уравнения фотоупругости являются очень сложными и их интегрирование затруднительно. Вследствие этого оказалась необходимой дальнейшая разработка теории.

1. Исходим из уравнений электромагнитной теории света Максвелла

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\,\overline{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t},\\ &\operatorname{rot}\,\overline{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t},\\ &D_i=\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\,E_j,\ \ (i=1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\overline{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\overline{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\overline{D}$ — вектор электрической индукции; c — скорость света в вакууме; ε_{ij} — диэлектрический тензор.

Выражая векторы электромагнитного поля в виде

$$\overline{E}=\dot{E}\,e^{i\omega t};\ \overline{D}=\dot{D}\,e^{i\omega t};\ \overline{H}=\dot{H}e^{i\omega t}, \tag{2}$$

и исключая из системы (1) $\overline{H}$, получим вместо системы (1)

$$\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\,\dot{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\dot{D}. \tag{3}$$

Выбираем прямоугольную систему координат x_1, x_2, x_3 так, что оси x_1 и x_2 находятся в срединном слое пластинки и совпадают с главными направлениями изгиба, а ось x_3 перпендикулярна им. Предположим, что x_3 совпадает с одной из главных осей эллипсоида напряжений и будем игнорировать влияния градиента напряжений в направлениях x_1 и x_2 на распространение света в направлении x_3. Тогда из системы (3) получим

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial^2\dot{E}_1}{\partial z^2}=\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_{11}\,\dot{E}_1+\varepsilon_{12}\,\dot{E}_2),\\ &-\frac{\partial^2\dot{E}_2}{\partial z^2}=\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_{21}\,\dot{E}_1+\varepsilon_{22}\,\dot{E}_2),\\ &z=x_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отметим, что уравнения (4) являются по содержанию эквивалентными уравнениям Прошко [11].

2. Соотношение между диэлектрическим тензором ε_{ij} и тензором напряжений σ_{ij} выпишем в виде

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_0\,\delta_{ij}+2\,C_0\sqrt{\varepsilon_0}\,\sigma_{ij}, \tag{5}$$

где δ_{ij} — тензор Кронекера; $\varepsilon_0\delta_{ij}$ — диэлектрический тензор в ненапряженном материале; C_0 — оптическая постоянная; $\sqrt{\varepsilon_0}=n$ — показатель преломления в ненапряженном материале.

В рассматриваемом случае в пластинке возникает напряженное состояние

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}{}^0+s_{ij}\,z, \tag{6}$$

где $\sigma_{ij}{}^0$ компоненты цепных и $s_{ij}z$ компоненты изгибных напряжений.

Если выразим $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ в виде

$$\dot{E}_1 = e^{-i(kz+f(z))}\, U(z);\ \dot{E}_2 = e^{-i(kz+f(z))}\, V(z), \tag{7}$$

где

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0} = \frac{2\pi n}{c}, \tag{8}$$

$$f(z) = \frac{a_1 + a_2}{2} z + \frac{b_1 + b_2}{2} z^2, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = \gamma\sigma^0{}_{11};\ b_1 = \gamma s_{11};\ c' = \gamma\sigma_{12}{}^0; \\ &a_2 = \gamma\sigma^0{}_{22};\ b_2 = \gamma s_{22};\ \gamma = \frac{2\pi C_0}{c}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и учтем сильные неравенства $U'' \ll kU';\ V'' \ll kV'$, (11)

а также соотношения (5) и (6), то получим новую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} U' &= i\,[f' - (a_1 + b_1 z)]\, U - ic'V, \\ V' &= -ic'U + i\,[f' - (a_2 + b_2 z)]\, V. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

После некоторых преобразований и перехода к новому переменному

$$\xi = \sqrt{\frac{|b|}{2}}\left(z + \frac{a}{b}\right), \tag{13}$$

где $a = a_1 - a_2;\ b = b_1 - b_2$,

получим из системы (12) уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 U}{d\xi^2} + (\xi^2 + i\ \mathrm{sgn}\ b + r^2)\, U = 0, \\ &\frac{d^2 V}{d\xi^2} + (\xi^2 - i\ \mathrm{sgn}\ b + r^2)\, V = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где

$$r = c'\sqrt{\frac{2}{|b|}}. \tag{15}$$

3. Пусть w_{I} и w_{II} являются частными решениями уравнения

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + (\xi^2 + i + r^2) = 0, \tag{16}$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\text{когда } \xi = 0, \text{ тогда} \quad w_{\mathrm{I}} = 1,\ \frac{dw_{\mathrm{I}}}{d\xi} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad w_{\mathrm{II}} = 0,\ \frac{dw_{\mathrm{II}}}{d\xi} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Применяем символ $\overset{\mathrm{sgn}\ b}{x}$, определенный следующим образом

$$\overset{\mathrm{sgn}\ b}{x} = \tfrac{1}{2}\,(x + \bar{x}) + \mathrm{sgn}\ b\ \tfrac{1}{2}\,(x - \bar{x}). \tag{18}$$

Общее решение системы (14) выражается в виде

$$\left.\begin{aligned} U &= C_{\mathrm{I}} \overset{\operatorname{sgn} b}{w_{\mathrm{I}}} + C_{\mathrm{II}} \overset{\operatorname{sgn} b}{w_{\mathrm{II}}}, \\ V &= C_{\mathrm{III}} \overset{\operatorname{sgn} b}{\overline{w}_{\mathrm{I}}} + C_{\mathrm{IV}} \overset{\operatorname{sgn} b}{\overline{w}_{\mathrm{II}}}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где

$$C_{\mathrm{II}} = -\,ir\,C_{\mathrm{III}};\quad C_{\mathrm{IV}} = -\,ir\,C_{\mathrm{I}}. \tag{20}$$

Для получения частных решений уравнения (16) используем метод малого параметра. Выражая w_{I} и w_{II} в виде

$$\left.\begin{aligned} w_{\mathrm{I}} &= w_{\mathrm{I}0} + r^2 w_{\mathrm{I}2} + r^4 w_{\mathrm{I}4} + \ldots \\ w_{\mathrm{II}} &= w_{\mathrm{II}0} + r^2 w_{\mathrm{II}2} + r^4 w_{\mathrm{II}4} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

получим из уравнения (16) рекуррентные системы дифференциальных уравнений, решениями которых являются:

$$\left.\begin{aligned} w_{\mathrm{I}0} &= e^{-i\frac{1}{2}\xi^2}, \\ w_{\mathrm{II}0} &= e^{-i\frac{1}{2}\xi^2}\int\limits_0^{\xi} d\,\xi_1\, e^{i\xi_1^2}, \\ w_{\mathrm{I}2} &= -\,e^{-i\frac{1}{2}\xi^2}\int\limits_0^{\xi} d\,\xi_1\, e^{i\xi_1^2}\int\limits_0^{\xi_1} d\,\xi_2\, e^{-i\xi_2^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Решение системы (12), которое удовлетворяет начальным условиям

$$U(\xi^*) = U^*;\ V(\xi^*) = V^*, \tag{23}$$

получим в виде

$$U = k_{11}'\,U^* + k_{12}'\,V^*;\ V = k_{21}'\,U^* + k_{22}'\,V^*, \tag{24}$$

где

$$\left.\begin{aligned} k_{11}' &= k_1' + i\operatorname{sgn} b\, k_2' = \overline{k}_{22}' = \overset{\operatorname{sgn} b}{k_{11}} = k_1 + ik_2, \\ k_{12}' &= \operatorname{sgn} b\, k_3' + i\,k_4' = -\,\overline{k}_{21}' = \operatorname{sgn} b\, \overset{\operatorname{sgn} b}{k_{12}} = k_3 + i\,k_4, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

и

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= \overset{*}{\overline{w}}_{\mathrm{I}}\, w_{\mathrm{I}} + r^2\, \overset{*}{\overline{w}}_{\mathrm{II}}\, w_{\mathrm{II}}, \\ k_{12} &= ri\,(\overset{*}{w}_{\mathrm{II}}\, w_{\mathrm{I}} - \overset{*}{w}_{\mathrm{I}}\, w_{\mathrm{II}}). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

4. В случае применения обычного полярископа можно в каждой исследуемой точке модели определить угол поворота плоскости поляризации и разность хода световых колебаний. Чтобы получить достаточное количество данных о напряженном состоянии, необходимых для дальнейшего решения задачи, нужно в каждой исследуемой точке экспериментально определить разность главных цепных напряжений и их главные направления и те же элементы напряжений изгиба. Следовательно, экспериментально определяемых величин недостаточно для решения задачи.

Для определения напряженного состояния пластинки применим следующий смешанный метод. Изгибные напряжения определяем каким-нибудь известным методом (индикаторный метод, метод отраженной сетки и т. д.).

Зная один из элементов изгибных напряжений, например, главные направления изгиба, можно методом фотоупругости определять цепные напряжения. Определяя угол поворота плоскости поляризации, мы тем самым определяем и углы между плоскостью поляризации поляризатора и главным направлением изгиба ψ^0, а также между плоскостью поляризации анализатора и главным направлением изгиба ψ^v.

Чтобы найти направление, в котором входящий в пластинку плоскополяризованный свет выходит из пластинки также плоскополяризованным, сделаем в точках входа (ξ^*) и выхода (ξ^v) света поворот координатных осей вокруг оси z соответственно на углы ψ^0 и ψ^v. Обозначим световые векторы в новых координатах в точке входа света через U^0 и V^0 и в точке выхода света через U^v и V^v.

Используя формулы (24), выражаем U^v и V^v через U^0 и V^0:

$$U^v = K_{11} U^0 + K_{12} V^0; \quad V^v = K_{21} U^0 + K_{22} V^0, \tag{27}$$

где K_{11}, K_{12}, K_{21} и K_{22} являются известными функциями величин k'_{11}, k'_{12}, ψ^0 и ψ^v.

Условием плоской поляризации выходящего из модели света является

$$K_{12} = K_{21} = 0. \tag{28}$$

Окончательно получим для определения величин k_1', k_2', k_3' и k_4' следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &k_1' k_4' + k_2' k_3' = \operatorname{tg} 2\psi^0 (k_1' k_2' - k_3' k_4'),\\ &k_1' k_4' - k_2' k_3' = \operatorname{tg} 2\psi^v (k_1' k_2' + k_3' k_4'),\\ &k_1'^2 + k_2'^2 + k_3'^2 + k_4'^2 = 1,\\ &k_1' \cos(\psi^0 - \psi^v) + k_3' \sin(\psi^0 - \psi^v) = \cos\frac{\delta}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$ *

где δ — относительная разность хода выходящих из модели световых колебаний, измеряемая в диагональном положении (как при применении компенсатора Краснова).

5. Для определения характеризующих напряженное состояние параметров ξ^*, ξ^v и r составлена таблица величин k_1, k_2, и k_3 в зависимости от ξ^*, ξ^v и r. Величины ξ^*, ξ^v и r определяются в этой таблице в зависимости от определенных экспериментально величин k_1, k_2 и k_3 при помощи интерполирования. В табл. 1 приведен отрывок из такой таблицы.**

Решая систему (29) и используя соотношения (25) получим выражения для определения величин k_1, k_2, k_3 и k_4.

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = \cos(\psi^0 - \psi^v)\cos\frac{\delta}{2},\\ &k_2 = \pm \operatorname{sgn} b \cos(\psi^0 + \psi^v)\sin\frac{\delta}{2},\\ &k_3 = \operatorname{sgn} b \sin(\psi^0 - \psi^v)\cos\frac{\delta}{2},\\ &k_4 = \pm \sin(\psi^0 + \psi^v)\sin\frac{\delta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

* Первые два уравнения следуют из условия (28). Третье уравнение получено после доказательства специальной теоремы. Четвертое уравнение является следствием того, что сумма величин K_{11} и K_{22} является действительной.

** В выражениях (22) показательная функция представлена в виде степенного ряда.

Таблица 1

k_1

ξ^* / ξv	−0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	r
+0,3	0,969	0,959	0,940	0,918	0,893	0,860				
0,4	0,954	0,940	0,921	0,899	0,873	0,841	0,799			
0,5	0,935	0,918	0,899	0,878	0,853	0,820	0,781	0,734		
0,6	0,910	0,893	0,873	0,853	0,828	0,798	0,760	0,717	0,662	
0,7	0,877	0,860	0,841	0,820	0,798	0,771	0,738	0,697	0,645	0,5
0,8			0,799	0,781	0,760	0,738	0,709	0,672	0,631	
0,9			0,751	0,734	0,717	0,697	0,672			
1,0			0,691	0,678	0,662	0,645	0,631			
0,3	0,955	0,936	0,913	0,885	0,850	0,807				
0,4	0,935	0,913	0,887	0,856	0,821	0,779	0,727			
0,5	0,908	0,885	0,856	0,825	0,792	0,748	0,698	0,640		
0,6	0,876	0,850	0,821	0,792	0,755	0,714	0,665	0,611	0,546	
0,7	0,834	0,807	0,779	0,748	0,714	0,675	0,631	0,580	0,521	0,6
0,8			0,727	0,698	0,665	0,631	0,589	0,543	0,491	
0,9			0,667	0,640	0,611	0,580	0,543			
1,0			0,599	0,572	0,546	0,521	0,491			

k_2

ξv	−0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	r
+0,3	0,024	0	0,034	0,077	0,129	0,191				
0,4	0,059	0,034	0	0,044	0,095	0,156	0,223	(+)		
0,5	0,103	0,077	0,044	0	0,052	0,113	0,180	0,254		
0,6	0,155	0,129	0,095	0,052	0	0,060	0,128	0,204	0,282	
0,7	0,215	0,191	0,156	0,113	0,060	0	0,067	0,143	0,222	0,5
0,8			0,223	0,180	0,128	0,067	0	0,075	0,155	
0,9		(−)	0,287	0,254	0,204	0,143	0,075	0		
1,0			0,375	0,332	0,282	0,222	0,155			
0,3	0,024	0	0,034	0,076	0,128	0,187				
0,4	0,059	0,034	0	0,044	0,093	0,152	0,218			
0,5	0,102	0,076	0,044	0	0,051	0,110	0,174	0,245		
0,6	0,153	0,128	0,093	0,051	0	0,058	0,124	0,195	0,268	
0,7	0,211	0,187	0,152	0,110	0,058	0	0,064	0,136	0,210	0,6
0,8			0,218	0,174	0,124	0,064	0	0,071	0,146	
0,9			0,301	0,245	0,195	0,136	0,071	0		
1,0			0,362	0,318	0,268	0,210	0,146			

k_3

ξv	−0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	r
+0,3	0,011	0,019	0,029	0,042	0,060	0,081				
0,4	0,018	0,029	0,042	0,060	0,081	0,107	0,137			
0,5	0,029	0,042	0,060	0,081	0,106	0,137	0,172	0,210		
0,6	0,042	0,060	0,081	0,106	0,136	0,169	0,211	0,255	0,305	
0,7	0,060	0,081	0,107	0,137	0,169	0,212	0,256	0,304	0,355	0,5
0,8			0,137	0,172	0,211	0,256	0,306	0,359	0,414	
0,9			0,172	0,210	0,255	0,304	0,359			
1,0			0,209	0,253	0,305	0,355	0,414			
0,3	0,013	0,023	0,035	0,050	0,071	0,096	0,126			
0,4	0,022	0,035	0,051	0,071	0,097	0,126	0,161	0,201		
0,5	0,034	0,050	0,071	0,097	0,126	0,161	0,201	0,245	0,295	
0,6	0,050	0,071	0,097	0,126	0,160	0,202	0,248	0,296	0,352	
0,7	0,071	0,096	0,126	0,161	0,202	0,248	0,300	0,353	0,418	0,6
0,8			0,161	0,201	0,248	0,300	0,356	0,415	0,478	
0,9			0,201	0,245	0,296	0,353	0,415			
1,0			0,245	0,295	0,352	0,418	0,478			

Для определения характеризующих напряженное состояние величин получим выражения

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\beta &= \operatorname{sgn} b \frac{2r}{\xi^* + \xi^v}, \\ \tau_{\text{ц}} &= \frac{2\varkappa r |\xi^v - \xi^*|}{\sin 2\beta}, \\ k &= \operatorname{sgn} b \frac{|\xi^v - \xi^*|}{2r} \sin 2\beta, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где $\varkappa = \frac{\lambda}{2\pi C_0 t}$; β — угол между главными направлениями изгиба и цепных напряжений; $k = \frac{\tau_u}{\tau_{ц}}$; $\tau_ц$ — максимальное цепное касательное напряжение; τ_u — максимальное изгибное касательное напряжение; t — половина толщины пластинки.

6. При используемой методике эксперимента можно при помощи развитой теории в каждой рассматриваемой точке определять главные направления и максимальное касательное напряжение цепного напряженного состояния. Для полного определения цепного напряженного состояния надо главные напряжения разделить. На участках, где напряжения изгиба коллинеарны цепным напряжениям, можно для этого использовать измерение абсолютных фаз световых колебаний или метод наклонного просвечивания. Для разделения главных напряжений во всей пластинке можно использовать метод разности касательных напряжений, так как компоненты цепного напряженного состояния удовлетворяют уравнениям равновесия плоской задачи теории упругости, на которых основывается метод разности касательных напряжений.

§ 2. Описание эксперимента

1. Для определения угла поворота плоскости поляризации использовалась поляризующая часть поляризационно-оптической установки ППУ-4 в комбинации с поляризационным компаратором ПК-6. Измерение разности хода производилось компенсатором Краснова СКК-2.

Использование установки ПК-6 и компенсатора Краснова связано с проведением поляризационно-оптических исследований по отдельным точкам. В рассматриваемом случае метод фотографирования изохром и изоклин, по-видимому, неприменим, так как для этого число изохром должно быть достаточно большим. Вместе с тем, тонкие пластинки теряют устойчивость при сравнительно малых напряжениях, вследствие чего получается недостаточное количество изохром. Некоторые теоретические соображения показывают, что появление изохром в том виде, в каком они получаются в случае плоской задачи, вообще невозможно. Применению фотографического метода препятствует еще то обстоятельство, что величина, которая соответствует в рассматриваемом случае изоклине, характеризована двумя параметрами.

В качестве нагрузочного приспособления использовался пресс УП-3. Нагружение производилось водой.

Для нагружения пластинки и осуществления граничных условий была сконструирована в некоторой мере универсальная нагрузочная рама (рис. 1), обеспечивающая свободное опирание при изгибе пластинки и прямолинейность сжатых кромок. Продольные (ненагруженные) края пластинки могут либо свободно перемещаться в плоскости пластинки, либо не могут перемещаться в направлении нормали края пластинки.

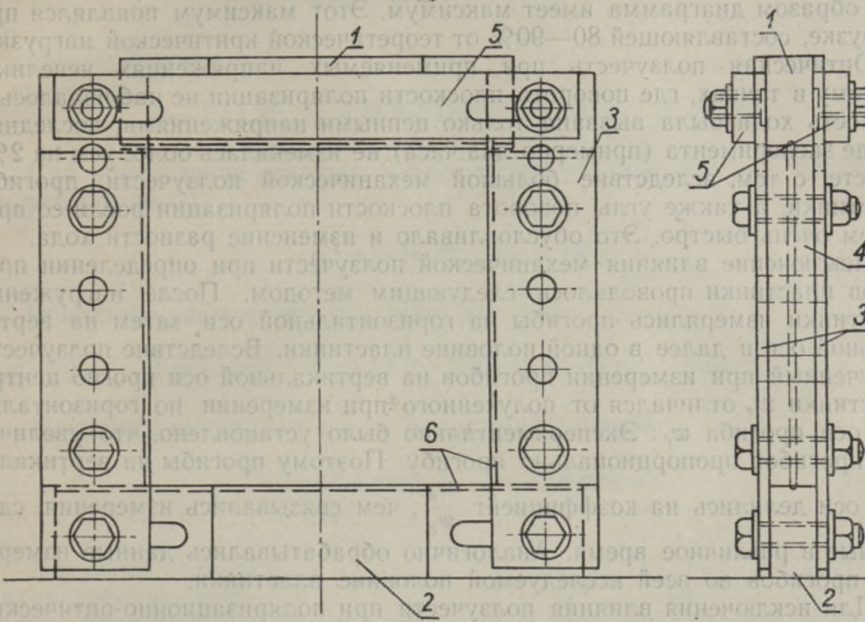

Рис. 1. Нагрузочная рама: *1* — верхняя нагрузочная балка; *2* — нижняя нагрузочная балка; *3* — направляющие пластинки; *4* — боковые элементы *; *5* — соединительные стержни; *6* — *V*-образные пазы.

* К боковым элементам можно прикрепить ножевые опоры для осуществления на продольных краях краевых условий, при которых края могут свободно перемещаться в плоскости пластинки.

Сконструированная загрузочная рама самоцентрирующая, она позволяет варьировать отношение сторон пластинки в пределах 0,7—1,5, не ограничивает выбора толщины пластинки, позволяет на продольных краях осуществлять двоякие граничные условия, проста по конструкции и удобна в обращении.

Для передачи нагрузки от пресса к раме был сконструирован специальный реверсор. Возможность наклонного просвечивания была осуществлена поворачиваемыми вокруг вертикальной оси связными частями реверсора.

Определение главных направлений изгиба проводилось путем измерения прогибов при помощи индикатора. В качестве штатива для индикатора использовалась координатная часть другого прибора ПК-6.

2. Материалом для моделей служил целлулоид. Применением материалов высокой оптической активности можно увеличивать точность измерения разности хода, однако изготовление крупных моделей (применялись пластинки с размерами $15 \times 15 \times 0{,}3$ см) из оптически высокоактивных материалов затруднительно.

Начальное напряженное состояние модели определялось на установке КСП-5. Для исключения влияния начального напряженного состояния при наклонном просвечивании в тех точках, где было предвидено наклонное просвечивание, начальное напряженное состояние фиксировалось также в наклонном положении.

Для определения критической нагрузки пластинки нагрузку увеличивали постепенно, измеряя после каждого увеличения разность хода в центре сжатого края. Проведенные опыты показали, что полученная таким образом диаграмма имеет максимум. Этот максимум появлялся при нагрузке, составляющей 80—90% от теоретической критической нагрузки.

Оптическая ползучесть при применяемых напряжениях невелика, поэтому в точках, где поворота плоскости поляризации не наблюдалось и разность хода была вызвана только цепными напряжениями, последняя в ходе эксперимента (примерно два часа) не изменялась более чем на 2%. Вместе с тем, вследствие большой механической ползучести, прогибы пластинки, а также углы поворота плоскости поляризации росли со временем очень быстро. Это обусловливало и изменение разности хода.

Исключение влияния механической ползучести при определении прогибов пластинки проводилось следующим методом. После нагружения пластинки измерялись прогибы на горизонтальной оси, затем на вертикальной оси и далее в одной половине пластинки. Вследствие ползучести полученный при измерении прогибов на вертикальной оси прогиб центра пластинки $w_в$ отличался от полученного при измерении по горизонтальной оси прогиба $w_г$. Экспериментально было установлено, что увеличение прогибов пропорционально прогибу. Поэтому прогибы на вертикальной оси делились на коэффициент $\frac{w_в}{w_г}$, чем связывались измерения, сделанные в различное время. Аналогично обрабатывались данные измерения прогибов во всей исследуемой половине пластинки.

Для исключения влияния ползучести при поляризационно-оптических измерениях, после нагружения измерения были проведены только в 6—7 точках. Затем нагрузку снимали и материалу давали возможность «отдыхать» не менее 20 минут, после чего описанный цикл повторялся.* При этом каждая серия измерений начиналась с края пластинки, где углы поворота плоскости поляризации, а следовательно, и влияние ползучести больше.

§ 3. Анализ результатов эксперимента

Ограничимся сравнением результатов, полученных при помощи развитой в § 1 теории и элементарной теории, изложенной в монографии Фрохта [3].

Рассмотрим в качестве примера сжатую в направлении оси y целлулоидную пластинку длиной 15 см, шириной 14,4 см и толщиной 0,3 см при нагрузке, превышающей на 20% теоретическую критическую нагрузку. Исследуем точку с координатами $x=-4$ см, $y=+6$ см **. Положение плоскости поляризатора и анализатора и главных направлений изгиба показаны на рис. 2 ***.

Начальное максимальное касательное напряжение составляло 1,2 кг/см². Направление алгебраически большего главного напряжения начального напряженного состояния совпадало с осью y.

В нашем случае измерения дали:

$$\psi^{\circ}=+26^{\circ}; \qquad \psi^{v}=+57^{\circ}; \qquad \delta=153{,}0 \ m\mu.$$

* Примерно аналогичную методику при элиминировании ползучести использовал и Гильг [4].

** Начало координат находится в центре пластинки. Продольные края имеют свободу перемещаться в плоскости пластинки.

*** Направление прогиба пластинки обратно направлению нормали плоскости рисунка

Вычисляя по формулам (30) величины k_1, k_2 и k_3 и производя интерполирование в табл. 1, получим

$$\xi^* = -0{,}801;\ \xi^v = 0{,}910;\ r = -0{,}525$$

и далее из формул (31)

$$\beta = +43{,}3°;\ \tau_ц = 24{,}8 + 1{,}2 = 26{,}0 \text{ кг/см}^2;\ k = 1{,}63.$$

Для определения главных направлений на поверхностях пластинки получим (рис. 2)

$$\varphi^* = -16{,}5°;\ \varphi^v = +15°.$$

Используя элементарную теорию, получим

$$\beta' = -40{,}5°;\ \tau'_ц = 17{,}2 + 1{,}2 = 18{,}4 \text{ кг/см}^2;\ k' = 1{,}21.$$

Максимальные касательные напряжения изгиба

$$\tau_и = 40{,}4 \text{ кг/см}^2;\ \tau'_и = 20{,}8 \text{ кг/см}^2.$$

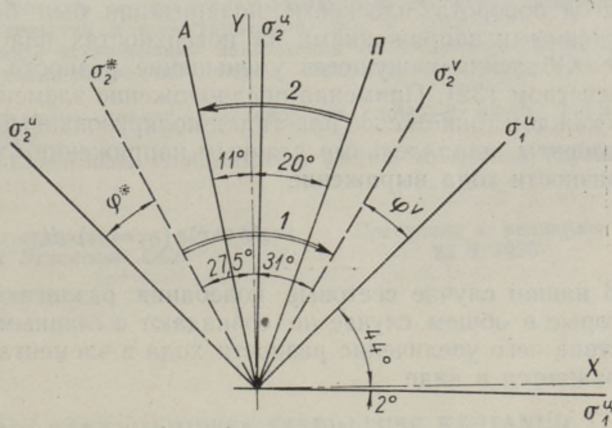

Рис. 2. *П* — поляризатор; *А* — анализатор; $\sigma_1^и$, $\sigma_2^и$ — главные направления изгиба; $\sigma_1^ц$, $\sigma_2^ц$ — главные направления цепных напряжений; σ_2^* — главное направление результирующего напряженного состояния на вогнутой стороне пластинки; σ_2^v — главное направление напряженного состояния на выпуклой стороне пластинки; $\xrightarrow{1}$ — направление поворота главного напряжения; $\xleftarrow{2}$ — направление поворота плоскости поляризации. Нормаль плоскости рисунка совпадает с направлением световой нормали. Положительные углы считаются против направления поворота часовой стрелки.

Наименее отличаются полученные при помощи элементарной и изложенной здесь теории углы β' и β. Это вполне понятно, так как в данном случае угол между главными направлениями изгиба и цепными напряжениями близок к 45°, вследствие чего главные направления на плоскостях пластинки расположены приблизительно симметрично в отношении главных направлений цепных напряжений. Так как плоскости поляризации на плоскостях пластинки также почти симметричны относительно главных цепных напряжений, то на величину β' влияет очень незначительно то обстоятельство, приняты ли за основу расчета действительные главные направления на поверхностях пластинки или плоскости поляризации.

Значительно отличаются полученные при помощи элементарной и новой теории максимальные цепные касательные напряжения. Если отказаться от влияния поворота плоскости поляризации и предположить, что разность хода обусловлена только цепными напряжениями, то мы получили бы для максимального цепного касательного напряжения величину

$$\tau''_{ц}=21{,}6 \text{ кг/см}^2.$$

Как видим,

$$\tau'_{ц}<\tau''_{ц}<\tau_{ц}. \qquad (32)$$

Исходя из элементарной теории, получим всегда

$$\tau'_{ц}\leqslant\tau''_{ц}, \qquad (33)$$

что следует из формулы (10.25) монографии [3].

Из рис. 2 следует, что угол поворота плоскости поляризации не совпадает с углом между главными направлениями на поверхностях пластинки. Так как в срединной плоскости пластинки главное направление результирующего напряженного состояния должно совпадать с главным направлением цепных напряжений, то поворот главного направления происходит в направлении, отмеченном на рис. 2 стрелкой *1*. Как видно из рисунка, направление поворота плоскости поляризации не совпадает с направлением поворота главного напряжения. Это является весьма интересным и важным обстоятельством. Отметим, что в некоторых точках угол поворота плоскости поляризации был больше, чем угол между главными напряжениями на поверхностях пластинки.

Объясним кажущееся уменьшение разности хода, выраженное неравенством (32). Применяя предположение элементарной теории о том, что в каждом тонком слое пластинки поляризованный свет разлагается на компоненты, параллельные главным напряжениям в этом слое, получим для разности хода выражение

$$d\delta=C_0\,(\sigma_1-\sigma_2)\,dl. \qquad (34)$$

В нашем случае световые колебания разлагаются на направления, которые в общем случае не совпадают с главными напряжениями, вследствие чего увеличение разности хода в элементарном слое пластинки выражается в виде

$$d\delta'=d\delta\cos 2\psi, \qquad (35)$$

где ψ — угол между компонентами световых колебаний и главными напряжениями. Так как угол 2ψ в нашем случае вблизи поверхностей пластинки довольно большой, то кажущееся уменьшение разности хода хорошо заметно.

Далее, опыты показывают, что разница между $\tau_{ц}$ и $\tau''_{ц}$ уменьшается с уменьшением угла поворота плоскости поляризации и при величине 2—3° последнего эти величины практически равны.

Интересно отметить, что при использовании выработанного в § 1 алгоритма изменение в главных направлениях изгиба очень мало влияет на расчитываемые компоненты цепных напряжений. В качестве примера был рассчитан рассмотренный выше случай, причем предпологалось, что главные направления изгиба составляют с осью x угол в 50°. В этом случае получилось:

$$\beta^*=+38°;\ \tau^*_{ц}=26{,}3 \text{ кг/см}^2;\ k^*=1{,}75.$$

Таким образом, главное направление цепных напряжений изменилось только на 0,7°, разница в максимальном касательном напряжении составляет 1,15%. Это обстоятельство позволяет получить для компонентов цепного напряженного состояния надежные данные и в том случае, когда главные направления изгиба определены приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Drucker, R. Mindlin, Stress Analysis by Three-Dimensional Photoelastic Methods, Journal of Applied Physics, **11**, 11, 1940.
2. A. Ferro, Rilievo delle sollecitazioni per deformazioni finite in lastre piane circolari con il metodo del congelamento. Ingegneria meccanica, **3**, 2, 1954.
3. M. M. Фрохт, Фотоупругость, т. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
4. B. Gilg, Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten, Publications du laboratoire de photoélasticité, École Polytechnique Fédérale, Zurich, 5, 1952.
5. В. Л. Гинзбург, Об иследовании напряжений оптическим методом, Журнал технической физики, т. 14, 1944, стр. 181—192.
6. M. Kufner, Die spannungsoptische Untersuchung elastischer Platten, Schweizerische Bauzeitung, **70**, 1952, S. 545—549, 563—566.
7. R. Mindlin, Journal of Applied Mechanics, 8, 1941.
8. R. Mindlin, L. Goodman, The Optical Equations of Three-Dimensional Photoelasticity, Journal of Applied Physics, **20**, 1, 1949.
9. F. E. Neumann, Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Kl., Berlin, 1841.
10. В. М. Прошко, О решении объемной задачи теории упругости оптическим методом, Труды Всесоюзного научно-исследовательского института железнодорожного строительства и проектирования, вып. 4, 1952.
11. В. М. Прошко, Вопросы исследования напряжений на объемных моделях, Сб. «Поляризационно-оптический метод исследования напряжений», М., 1956.
12. Г. Г. Ростовцев, К расчету тонких пластинок на сложный изгиб, Труды ЛВВАКА, т. 2, 1942.
13. R. C. O'Rourke, Three-Dimensional Photoelasticity, Journal of Applied Physics, **22**, 7, 1951.

Институт строительства и строительных материалов
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22 X 1956

FOTOELASTSUSMEETODI RAKENDAMISEST STABIILSUSE KAOTANUD PLAATIDE UURIMISEL

H. Aben

Resümee

Artiklis käsitletakse hariliku transmissioonpolariskoobi kasutamise võimalust stabiilsuse kaotanud plaatide uurimisel fotoelastsusmeetodil.

Lähtudes Maxwelli valguse elektromagnetilise teooria võrrandeist (1), on artikli esimeses osas tuletatud käsitletavat ülesannet kirjeldavad fotoelastsusvõrrandid (14), mille integreerimisega on loodud arvutusalgoritm pingeolukorra komponentide määramiseks katsetulemustest.

Artikli teises osas kirjeldatakse katseseadmeid ja -metoodikat. Plaadi koormamiseks ning ääretingimuste realiseerimiseks on konstrueeritud universaalne koormisraam (joon. 1). Katsemetoodika väljatöötamisel on peatähelepanu pööratud mudeli materjali mehaanilise ja optilise roomavuse elimineerimisele.

Artikli kolmandas osas analüüsitakse katsetulemusi fotoelastsusteooria seisukohalt. Katseandmete läbitöötamine ühelt poolt elementaarse teooria ja teiselt poolt uue teooria alusel näitab, et valguse lainenormaali suunas muutuva pingevälja puhul transmissioon-

polariskoobis tekkivad pingeoptilised nähtused on tunduvalt keerulisemad, kui seda kirjeldab elementaarne teooria. Teostatud katsetel ei langenud polarisatsioonitasapinna pöördenurk kokku plaadi pindadel esinevate peapingete vahelise nurgaga ning polarisatsioonitasapinna pöördumise suund oli vastupidine peapinge pöördumise suunale. Eeltoodust tingitult faasinihe polarisatsioonipinna pöördumise tõttu ei suurenenud, nagu eeldab elementaarne teooria, vaid vähenes.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Ehituse ja Ehitusmaterjalide Instituut

Saabus toimetusse
22. X 1956

APPLICATION OF THE METHOD OF PHOTOELASTICITY FOR THE ANALYSIS OF BUCKLED PLATES

H. Aben

Summary

The article deals with the application of the common transmission polariscope for the analysis of buckled thin elastic plates.

In the first part of the article, from Maxwell's equations (1) "exact" photoelastic equations for our problem have been derived. The solution of these equations is derived by the method of perturbation.

The second part deals with the experimental technique. A special test jig (Fig. 1) was designed for subjecting celluloid panels to edgewise compression. A method allowing the elimination of the mechanical and optical creep of the material is developed.

The third part contains an analysis of experimental results from the point of view of the theory of photoelasticity. The photoelastic effects in our case are much more complicated than it is considered by the elementary theory. It follows that the angle of rotation of the plane of polarization does not coincide with the angle of rotation of the principal stress, and the plane of polarization and the principal stress rotate in opposite directions. Therefore the relative phase-retardation is decreased by the rotation.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Building and Building-Materials

Received
Oct. 22, 1956