EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. VI KÖIDE
TEHNILISTE JA FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE TEADUSTE SEERIA. 1957, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ VI
СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 1957, № 1

https://doi.org/10.3176/tech.phys.math.1957.1.02

KOMPLEKSSETE KORDAJATEGA KUUPVÕRRANDITE NOMOGRAAFILINE LAHENDAMINE

K. ALLIK

Praktiline vajadus leida komplekssete kordajatega kuupvõrrandi lahendeid esineb mitmesugustel tehnika aladel. Kuigi neid lahendeid on võimalik otseselt arvutada (võrrandi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

iga lahend esineb teatavasti ka komplekssete a, b ja c puhul avaldisena

$$R + \frac{P}{R} - \frac{a}{3},$$

milles $P = \frac{3b - a^2}{9}$, $Q = \frac{9ab - 2a^3 - 27c}{54}$ ja $R = \sqrt[3]{Q + \sqrt{Q^2 + P^3}}$, osutub see arvutamine võrdlemisi raskeks, sest ta sisaldab juure leidmisi kompleksarvudest.

Alljärgnevalt selgub, et komplekssete kordajatega kuupvõrrandeid saab teisendada võrrandiks

$$z^3 + z^2 + L = 0,$$

mille lahendid on leitavad võrknomogrammide abil; seejuures nähtub ühtlasi, et abisuuruse L arvutamine ega üleminek nomogrammilt leitud lahenditest esialgse võrrandi lahendile ei sisalda juurimisi. Nomogramm ise esitatakse kolmel lehel — iga lahendi jaoks eraldi; antud formaadi, joonte tiheduse ja ühiku pikkuse puhul võib tema täpsust ja töötamisulatust juba lugeda inseneripraktika tavalistele nõuetele vastavaks.

1. Kuupvõrrandi teisendamine

Võrrandit $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ võib teisendada võrrandiks $z^3 + z^2 + L = 0$ kahel viisil. Esimene, lihtsam viis on see, et võetakse

$$x = \frac{k}{z} - \frac{a}{3}$$

ning sel teel saadud võrrand

$$\frac{k^3}{z^3} + \frac{3b - a^2}{3} \cdot \frac{k}{z} + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = 0$$

ehk

$$z^3 + \frac{9(3b - a^2)k}{2a^3 - 9ab + 27c} z^2 + \frac{27k^3}{2a^3 - 9ab + 27c} = 0$$

lihtsustatakse tingimusega, et $k = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{9(3b - a^2)}$; tulemuseks on võrrand

$$z^3 + z^2 + \frac{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}{27\,(3b - a^2)^3} = 0.$$

Kui kasutada abisuurusi M ja N, mis on defineeritud valemipaariga

$$M = 2a^3 - 9ab + 27c$$
$$N = 3(3b - a^2),$$

siis saab võrrandisse $z^3 + z^2 + L = 0$ vabaliikme arvutamist ja selle võrrandi lahenditelt üleminekut esialgse võrrandi lahenditele teostada järgmiselt:

$$L = \frac{M^2}{N^3},\; x = \frac{M}{3Nz} - \frac{a}{3}.$$

Kirjeldatud viis ei ole rakendatav siis, kui $N = 0$, s. t. kui $3b = a^2$; aga ka sel juhul, kui $3b$ ja a^2 erinevad teineteisest vähe, mistõttu $|L|$ osutub väga suureks, tuleb kasutada teist viisi.

Teine viis võrrandi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ teisendamiseks lähtub asjaolust, et see võrrand on kirjutatav (eeldusel $c \neq 0$) ka järgmiselt:

$$\frac{1}{x^3} + \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{c} = 0,$$

milles nüüd võetakse

$$\frac{1}{x} = \frac{g}{z} - \frac{b}{3c}.$$

Nii saadud võrrand otsitavaga z on

$$\frac{g^3}{z^3} + \left(\frac{a}{c} - \frac{b^2}{3c^2}\right)\frac{g}{z} + \left(\frac{1}{c} - \frac{ab}{3c^2} + \frac{2b^3}{27c^3}\right) = 0$$

ehk
$$z^3 + \frac{9(3ac - b^2)\,g}{2b^3 - 9abc + 27c^2}\,z^2 + \frac{27c^3g^3}{2b^3 - 9abc + 27c^2} = 0$$

ning see lihtsustub võrrandiks $z^3 + z^2 + L = 0$ konstandi g sobival valikul:

$$g = \frac{2b^3 - 9abc + 27c^2}{9(3ac - b^2)}.$$

Kasutades tähistust

$$H = 2b^3 - 9abc + 27c^2$$
$$K = 3\,(3ac - b^2),$$

võib võrrandi $z^3 + z^2 + L = 0$ vabaliikme arvutamist ning üleminekut selle võrrandi lahenditelt esialgse võrrandi lahenditele teostada järgmiselt:

$$L = \frac{H^2}{K^3},\; x = \frac{3cKz}{H - bKz}.$$

Kumbki viis ei ole rakendatav sel juhul, kui $3b = a^2$ ja $3ac = b^2$. Kuid siis on võrrand $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ lihtsalt

$$x^3+ax^2+\frac{a^2}{3}x+\frac{a^3}{27}=0 \text{ ehk } \left(x+\frac{a}{3}\right)^3=0,$$

mille kõik kolm lahendit esinevad arvuna $-\frac{a}{3}$.

2. Kuupvõrrandi $z^3+z^2+L=0$ lahendi reaalosa võrrand ja imaginaarosa võrrand

Kui tähistada $L=m+ni$ ja $z=X+Yi$, siis on võrrand $z^3+z^2+L=0$ kirjutatav järgmiselt:

$$(X+Yi)^3+(X+Yi)^2+m+ni=0$$

ehk

$$X^3-3XY^2+X^2-Y^2+m+(3X^2Y-Y^3+2XY+n)i=0,$$

mis tähendab teatavasti võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} X^3-3XY^2+X^2-Y^2+m=0 \\ 3X^2Y-Y^3+2XY+n=0. \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja järeldada üht võrrandit, mis seoks otsitavat X konstantidega m ja n, ning teist võrrandit, mis seoks otsitavat Y samade konstantidega. Selleks tuleb eelmisest võrrandisüsteemist elimineerida ükskord Y ja teinekord X.

Et süsteemi esimesest võrrandist saadakse

$$Y^2=\frac{X^3+X^2+m}{3X+1},$$

teine võrrand aga on $\quad Y(3X^2+2X-Y^2)+n=0 \quad$ ehk eelnenu põhjal

$$Y=-\frac{n(3x+1)}{8X^3+8X^2+2X-m},$$

siis osutub suuruse Y elimineerimise tulemuseks nähtavasti järgmine võrrand:

$$\frac{X^3+X^2+m}{3X+1}=\frac{n^2(3x+1)^2}{(8X^3+8X^2+2X-m)^2}$$

ehk

$$n^2(3X+1)^3=[X^2(X+1)+m][2X(2X+1)^2-m]^2.$$

Selle võrrandi järgi valmistatakse nomogramm võrrandi $z^3+z^2+L=0$ lahendi reaalosa leidmiseks.

Suuruse X elimineerimine samast võrrandisüsteemist võib toimuda näiteks sel teel, et temast esmalt järeldatakse võrrand

$$(X^3-3XY^2+X^2-Y^2+m)\cdot 3Y=(3X^2Y-Y^3+2XY+n)X$$

ehk $-8XY^3+X^2Y-3Y^3+3mY-nX=0$, millest

$$X^2Y=8XY^3+nX+3Y^3-3mY;$$

kuid süsteemi teisest võrrandist saadakse

$$3X^2Y=Y^3-2XY-n,$$

järelikult

$$Y^3-2XY-n=24XY^3+3nX+9Y^3-9mY$$

ehk
$$(24Y^3+2Y+3n)X+8Y^3-9mY+n=0,$$

seega
$$X=-\frac{8Y^3-9mY+n}{24Y^3+2Y+3n}.$$

Teiselt poolt aga on võrrandisüsteemi teine võrrand kirjutatav ka järgmiselt:
$$3Y\left(X+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{Y}{3}-Y^3+n=0.$$

See koos eelmisega annab järelduseks
$$3Y\left(\frac{1}{3}-\frac{8Y^3-9mY+n}{24Y^3+2Y+3n}\right)^2-\frac{Y}{3}-Y^3+n=0$$

ehk
$$27Y^3\left(m+\frac{2}{27}\right)^2=\left[Y\left(Y^2+\frac{1}{3}\right)-n\right]\left[2Y\left(4Y^2+\frac{1}{3}\right)+n\right]^2.$$

Niisugune on võrrand, mille järgi valmistatakse nomogramm võrrandi $z^3+z^2+L=0$ lahendi imaginaarosa leidmiseks.

3. Võrrandi $z^3+z^2+L=0$ lahendamise nomogrammid ja nende omadusi

Võrrandi $z^3+z^2+m+ni=0$ lahendi reaalosa X rahuldab, nagu eelnevalt on selgunud, võrrandit

$$\text{(I)}\qquad n^2(3X+1)^3=[X^2(X+1)+m]\,[2X(2X+1)^2-m]^2.$$

Kui selles lugeda m abstsissiks ja n ordinaadiks, siis esitab ta üheparameetrilist jooneperet, millel parameetrina esineb X. Iga parameetri väärtus määrab joone ning niisugustest joontest, kui parameetri väärtusi võetakse mingi sobiv hulk, moodustub võrknomogramm. Kui on vaja leida mõnesuguse tuntud kompleksarvu $m+ni$ puhul võrrandi $z^3+z^2+m+ni=0$ lahendeid, siis saab niisuguselt võrknomogrammilt lahendite reaalosi ära lugeda kui neid parameetri X väärtusi, milledega määratud jooned läbivad punkti (m, n).

Võrrandi $z^3+z^2+m+ni=0$ lahendi imaginaarosa Yi leidmiseks saadakse võrknomogramm võrrandi

$$\text{(II)}\qquad 27Y^3\left(m+\frac{2}{27}\right)^2=\left[Y\left(Y^2+\frac{1}{3}\right)-n\right]\left[2Y\left(4Y^2+\frac{1}{3}\right)+n\right]^2$$

järgi, kui selles loetakse m abstsissiks ja n ordinaadiks, Y aga joonepere parameetriks.

Nomogrammide tegeliku valmistamise seisukohalt on oluline ette teada mõningaid küsimusesolevate jooneperede omadusi. Et võrrandil $z^3+z^2+m+ni=0$ on alati kolm lahendit, siis katab kumbki joonepere tasapinda kolmekordselt. Kumbagi jooneperet võiks seepärast jaotada kolmeks osapereks ehk parveks nii, et igaüks neist katab tasapinda ühekordselt, ning joonestamisel esitada nad erinevates värvides. Ühtlasi on vaja silmas pidada, et üks parv jooni lahendite reaalosade nomogrammil kuulub kokku ühega kolmest jooneparvest imaginaarosade nomogrammil; need kokkukuuluvad parved võib seepärast esitada ühes ja samas värvis. Kui kirjeldatud viisil kasutada kolme värvi kummalgi võrknomogrammil, siis luuakse otsene võimalus lahendi reaalosa just sobiva imaginaarosaga kokku lugeda.

Olgu tähendatud, et kokkusobimist võimaldab kindlaks teha (ja seega määrab jooneparvedele ühise värvi) niisugune seos, mis avaldab kas suuruse X andmeil m, n ja Y või suuruse Y andmeil m, n ja X; eelnenud seoseist on seega kasutatav niihästi

$$X = -\frac{8Y^3 - 9mY + n}{24Y^3 + 2Y + 3n} \quad \text{kui ka} \quad Y = -\frac{n(3X+1)}{8X^3 + 8X^2 + 2X - m}.$$

Kui kolme värvi ei ole võimalik nomogrammide joonestamisel kasutada (näiteks, kui neist nomogrammidest tahetakse teha fotokoopiaid), siis on otstarbekohane jaotada nomogrammidel esinevad jooneparved kolmele joonisele nii, et ühisele joonisele mahutatakse üks parv jooni lahendite reaalosade nomogrammilt ja sellega just kokkusobiv parv jooni imaginaarosade nomogrammilt. Nii saadakse kolm joonist, üks võrrandi $z^3 + z^2 + m + ni = 0$ ühe lahendi leidmiseks (lahendi reaalosa X äralugemiseks ühe jooneparve abil ja sama lahendi imaginaarosa kordaja Y äralugemiseks teise jooneparve abil), teine joonis teise lahendi leidmiseks ja kolmas joonis kolmanda lahendi leidmiseks. Käesolevale artiklile lisatud kolm joonist ongi niisugused lahendite nomogrammid.

Nomogrammide valmistamiseks on tähtis ka ette välja selgitada, kas jooneperedel on sümmeetriatelgi, missuguses koordinaadistiku piirkonnas on kõige vajalikum nomogrammi osa ning missugustel X ja Y väärtustel kuuluvad jooned sellesse ossa. Neile küsimustele saab leida vastuse samade võrrandite (I ja II) abil, millede järgi nomogrammid valmistatakse. Nii on vastavast võrrandist (I) näha, et jooneperes, mille parameetriks on X, osutub iga joon enesega sümmeetriliseks abstsisstelje suhtes, — võrrandis ei esine ordinaat n teisiti kui ainult ruudus. Teise joonepere võrrandist (II) nähtub, et selle pere iga joon on enesega sümmeetriline püstsirgjoone $m + \frac{2}{27} = 0$ suhtes; tõepoolest — abstsiss m on võrrandis esindatud ainult avaldisega $(m + \frac{2}{27})^2$.

Peale joonte sümmeetriatelje leidub kummalgi nomogrammil ka joonepere sümmeetriatelg. Kerge on näha, et teine joonepere (parameetriga Y) on sümmeetriline abstsisstelje suhtes: kui suuruste m, n ja Y väärtusekolmik α, β, γ rahuldab pere võrrandit (II), siis rahuldab teda samuti väärtusekolmik α, $-\beta$, $-\gamma$; järelikult joon, mille puhul $Y = \gamma$, osutub abstsisstelje suhtes sümmeetriliseks joonega, millel $Y = -\gamma$. Esimese joonepere sümmeetriatelge ei ole selle pere võrrandist (I) nii kerge näha, kuid kontrollimisel selgub, et kui suuruste m, n ja X väärtusekolmik α, β, δ rahuldab pere võrrandit, siis rahuldab teda samuti väärtusekolmik $-\alpha - \frac{4}{27}$, β, $-\delta - \frac{2}{3}$. Järelikult osutub joon, mille puhul $X = \delta$, sümmeetriliseks joonega, millel $X = -\delta - \frac{2}{3}$; sümmeetriateljena esineb seejuures püstsirge $m + \frac{2}{27} = 0$, sest mistahes α ja β puhul on punktid (α, β) ja $(-\alpha - \frac{4}{27}, \beta)$ teineteisega sümmeetrilised nimelt selle püstsirge suhtes.

Nomogrammide keskse, kõige vajalikuma osa asukoht selgub järgmiste teoreemide abil.

Teoreem 1. Kui võrrandi $z^3 + z^2 + L = 0$ kõik lahendid on reaalsed, siis täidab L tingimust

$$-\frac{4}{27} \leqslant L \leqslant 0.$$

Tõestuseks saab kasutada seda tuntud asjaolu, et reaalsete P ja Q puhul on võrrandi $v^3+3Pv-2Q=0$ kõigi lahendite reaalsuseks vajalik ja piisav tingimus $P^3+Q^2\leqslant 0$.

Eeldusel, et võrrandi $z^3+z^2+L=0$ kõik lahendid on reaalsed, osutub ka L reaalseks, sest teatavasti on lahendite korrutis $-L$. Teisendusega $z=\frac{1}{v}$ sellest võrrandist järeldunud võrrandil (juhul $L\neq 0$)

$$v^3+\frac{1}{L}v+\frac{1}{L}=0$$

on seega samuti kõik lahendid reaalsed. Järelikult on täidetud vastav tingimus

$$P^3+Q^2\leqslant 0,$$

kusjuures $3P=\frac{1}{L}$ ja $-2Q=\frac{1}{L}$. Et seega $P=\frac{1}{3L}$ ja $Q=-\frac{1}{2L}$, siis eelmine võrratus kinnitab, et

$$\frac{1}{27L^3}+\frac{1}{4L^2}\leqslant 0 \text{ ehk } \frac{1}{4L^2}\leqslant-\frac{1}{27L^3}.$$

Siit nähtub kõigepealt, et $L<0$; ühtlasi järeldub seetõttu (korrutamisel arvuga L^3)

$$\frac{L}{4}\geqslant-\frac{1}{27},$$

millega osutub teoreem tõestatuks. (Sest ainsal seni kõrvale jäänud juhul $L=0$ on teoreemi kehtivus ilmne: võrrandil $z^3+z^2=0$ on ainult reaalsed lahendid, nimelt 0, 0 ja -1).

Teoreemist saab järeldada, et teises jooneperes ei lõika ükski joon abstsisstelge punktide $(-\frac{4}{27}, 0)$ ja $(0; 0)$ vahel, vaid nad asetsevad abstsisstelje lõigu $-\frac{4}{27}\leqslant m\leqslant 0$ ümber.

Teoreem 2. Kui võrrandi $z^3+z^2+L=0$ kõik lahendid on reaalsed, siis täidavad nad tingimust

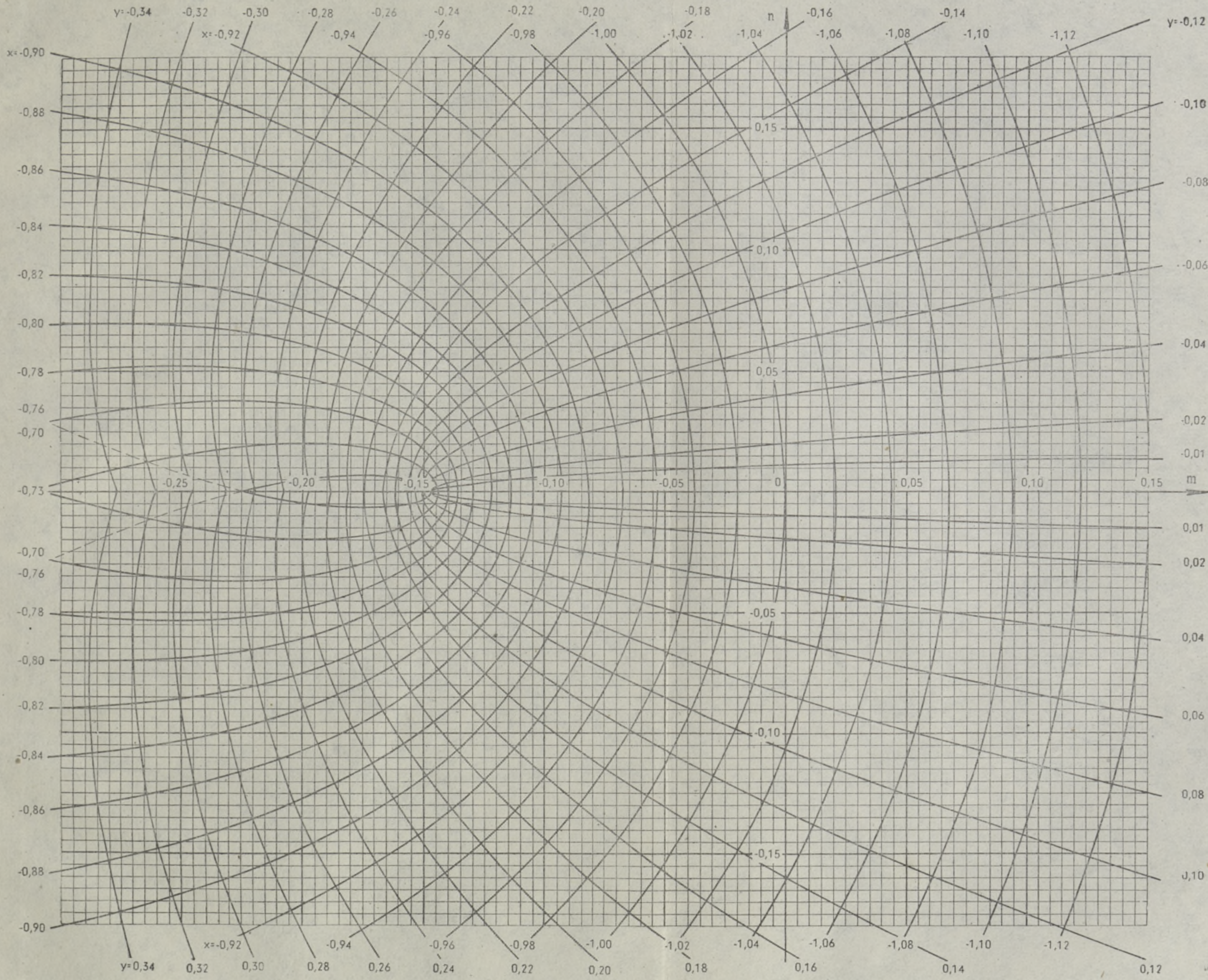
$$-1\leqslant z\leqslant\frac{1}{3}.$$

Tõestuseks saab kõigepealt märkida, et eelmise teoreemiga kättenäidatud äärmistel vabaliikme L väärtustel osutuvad lahendid järgmisteks:

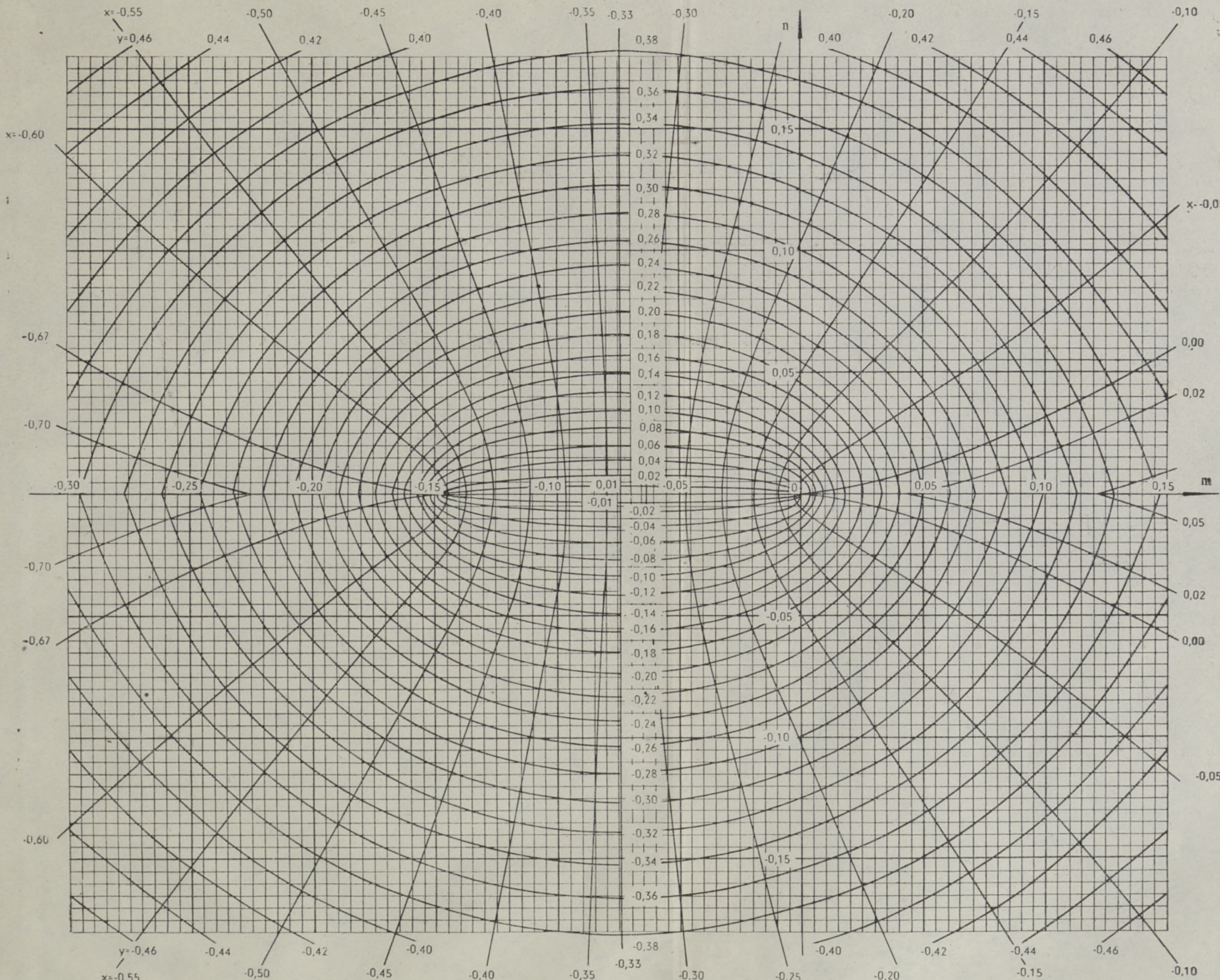
võrrandi $z^3+z^2-\frac{4}{27}=0$ lahendid on $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{3}$,

võrrandi $z^3+z^2=0$ lahendid on -1, 0 ja 0.

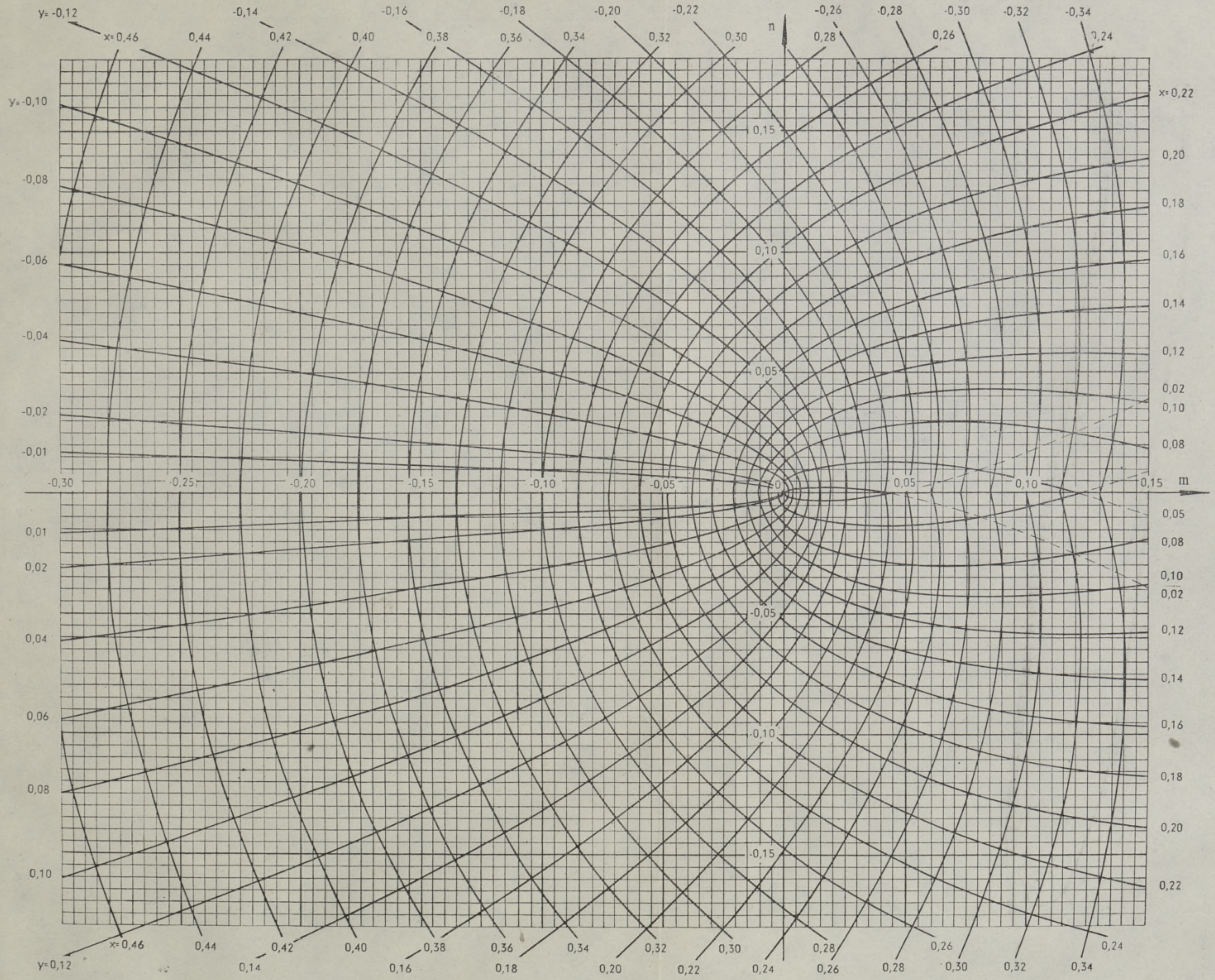
Et juhul $-\frac{4}{27}<L<0$ võrrandi $z^3+z^2+L=0$ lahendid asetsevad arvude -1 ja $\frac{1}{3}$ vahel, see selgub reaalse argumendi x funktsioonide $x^3+x^2-\frac{4}{27}$, x^3+x^2+L ja x^3+x^2 graafikute võrdlemisel; et teine graafik


y=-0,34
-0,32
-0,30
-0,28
-0,26
-0,24
-0,22
-0,20
-0,18
-0,16
-0,14
y=-0,12
x=-0,92
-0,94
-0,96
-0,98
-1,00
-1,02
-1,04
-1,06
-1,08
-1,10
-1,12
x=-0,90
-0,88
-0,86
-0,84
-0,82
-0,80
-0,78
-0,76
-0,70
-0,73
n
m
0,15
0,10
0,05
-0,05
-0,10
-0,15
-0,25
-0,20
-0,15
-0,10
-0,05
0
0,05
0,10
0,15
-0,10
-0,08
-0,06
-0,04
-0,02
-0,01
0,01
0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
y=0,34
0,32
0,30
0,28
0,26
0,24
0,22
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12

Joon. 1



Joon. 2


y= -0,12
-0,14
-0,16
-0,18
-0,20
-0,22
-0,26
-0,28
-0,30
-0,32
-0,34
x= 0,46
0,44
0,42
0,40
0,38
0,36
0,34
0,32
0,30
0,28
0,26
0,24
n
m
x= 0,22
0,15
0,10
0,05
-0,05
-0,10
-0,15
-0,30
-0,25
-0,20
-0,15
-0,10
-0,05
0
0,05
0,10
0,15
y= -0,10
-0,08
-0,06
-0,04
-0,02
-0,01
0,01
0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
y= 0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,22
0,24
0,26
0,28
0,30
0,32
0,34

Joon. 3

asetseb esimese ja kolmanda vahel, siis lõikab ta ka abstsisstelge vahepealsetes punktides.* Järelikult juhul $-\frac{4}{27} < L < 0$ täidavad võrrandi $z^3 + z^2 + L = 0$ kolm lahendit z_1, z_2 ja z_3 tingimusi:

$$-1 < z_1 < -\frac{2}{3}, \qquad -\frac{2}{3} < z_2 < 0, \qquad 0 < z_3 < \frac{1}{3}.$$

Teoreem 3. Kui $-\frac{4}{27} \leqslant m \leqslant 0$, siis on võrrandi $2x(2x+1)^2 - m = 0$ kõik lahendid reaalsed.

Tõestuseks saab kasutada asjaolu, et (nagu teoreemi 1 tõestamisel on märgitud) võrrandi $z^3 + z^2 + L = 0$ kõigi lahendite reaalsuseks vajalik ja piisav tingimus on $-\frac{4}{27} \leqslant L \leqslant 0$. Eeldusel $-\frac{4}{27} \leqslant m \leqslant 0$ osutuvad seega võrrandi

$$z^3 + z^2 + m = 0$$

kõik lahendid reaalseteks; kuid samast võrrandist järeldub teisendusega $z = -(2x+1)$ võrrand

$$2x(2x+1)^2 - m = 0,$$

mille lahendeid saab arvutada eelmise võrrandi lahendite järgi valemi

$$x = -\frac{z+1}{2}$$

abil; siit nähtub, et ka need lahendid osutuvad kõik reaalseteks.

Teoreemidest 1 ja 3 saab järeldada, et kui $m < -\frac{2}{3}$ või kui $m > 0$, siis osutuvad võrrandi $z^3 + z^2 + m = 0$ komplekssete lahendite reaalosad võrdseteks võrrandi $2X(2X+1)^2 - m = 0$ reaalse lahendiga.** Seevastu juhul, kui $-\frac{4}{27} \leqslant m \leqslant 0$ ja $n = 0$, osutuvad võrrandi $2X(2X+1)^2 - m = 0$ lahendid nomogrammi valmistamisel ülearusteks.

Juuresolevad nomogrammid on valmistatud ainult ulatusega

$$-0{,}30 \leqslant m \leqslant 0{,}15 \text{ ja } -0{,}18 \leqslant n \leqslant 0{,}18.$$

Niisugune ulatus on osutunud praktiliselt küllaldaseks mõnesuguste tehniliste probleemide lahendamisel, näiteks elektrimasinate üleminekuprotsesside matemaatilisel uurimisel.

Tallinna Polütehniline Instituut

Saabus toimetusse
4. XI 1956

* Võrrandi $f(x) = 0$ lahenditeks osutuvad teatavasti funktsioonigraafiku ja abstsisstelje lõikepunktide abstsissid.

** Ühtlasi selgub, et võrrandil $[X^2(X+1) + m][2X(2X+1)^2 - m]^2 = 0$ on neil juhtudel täpselt 3 reaalset lahendit.

НОМОГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. К. Аллик

Резюме

Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ при условии $a^2 \neq 3b$ можно преобразовать в уравнение $z^3 + z^2 + L = 0$, причем

$$L = \frac{M^2}{N^3}, \qquad M = 2a^3 - 9ab + 27c, \qquad N = 3(3b - a^2),$$

$$x = \frac{M}{3Nz} - \frac{a}{3}.$$

Если же $3b = a^2$, то исходное уравнение приводится к уравнению $z^3 + z^2 + L = 0$ преобразованием $x = \dfrac{3cKz}{H - bKz}$ при $H = 2b^3 - 9abc + 27c^2$, $K = 3(3ac - b^2)$, а L вычисляется по формуле $L = \dfrac{H^2}{K^3}$.

Посредством обозначений $z = X + Yi$ и $L = m + ni$ уравнение $z^3 + z^2 + L = 0$ превращается в систему двух уравнений

$$\begin{cases} X^3 - 3XY^2 + X^2 - Y^2 + m = 0 \\ 3X^2Y - Y^3 + 2XY + n = 0, \end{cases}$$

следствиями которой являются:

$$n^2(3X + 1)^3 = [X^2(X + 1) + m]\,[2X(2X + 1)^2 - m]^2$$

— уравнение, дающее возможность построения сетчатой номограммы для нахождения значений X по данным m и n, и

$$27\,Y^3\left(m + \frac{2}{27}\right)^2 = \left[\,Y\left(Y^2 + \frac{1}{3}\right) - n\right]\left[2Y\left(4Y^2 + \frac{1}{3}\right) + n\,\right]^2$$

— уравнение, используемое при построении сетчатой номограммы для нахождения значений Y по тем же данным. Каждая из этих номограмм образовывается семейством кривых, троекратно покрывающим плоскость. Поэтому целесообразно разбить каждое семейство на три части и вычертить эти части попарно так, чтобы каждый из трех чертежей дал по одному решению уравнения $z^3 + z^2 + m + ni = 0$.

Некоторые свойства получаемых номограмм определяются следующими теоремами:

1) необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение $z^3 + z^2 + m = 0$ имело три действительных решения, является $-\frac{4}{27} \leqslant m \leqslant 0$;

2) в этом случае решения z_1, z_2, z_3 заключаются между числами -1 и $\frac{1}{3}$ следующим образом:

$$-1 \leqslant z_1 \leqslant -\frac{2}{3}, \qquad -\frac{2}{3} \leqslant z_2 \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant z_3 \leqslant \frac{1}{3};$$

3) уравнение $2X(2X + 1)^2 - m = 0$ в случае $-\frac{4}{27} \leqslant m < 0$ имеет также три действительных решения.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
4 XI 1956

NOMOGRAPHISCHE LÖSUNG KUBISCHER GLEICHUNGEN MIT KOMPLEXEN KOEFFIZIENTEN

K. Allik

Zusammenfassung

Die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kann im Falle $a^2 \neq 3b$ in die Gleichung $z^3 + x^2 + L = 0$ verwandelt werden, wobei

$$L = \frac{M^2}{N^3}, \qquad M = 2a^3 - 9ab + 27c, \qquad N = 3\,(3b - a^2) \qquad \text{und } x = \frac{M}{3Nz} - \frac{a}{3}$$

Wenn aber $3b = a^2$, so kann man die ursprüngliche Gleichung in $z^3 + z^2 + L = 0$ überführen durch Substitution

$$x = \frac{3cKz}{H - bKz} \quad \text{mit } H = 2b^3 - 9abc + 27c^2 \qquad \text{und} \qquad K = 3\,(3ac - b^2);$$

L berechnet sich dann nach der Formel

$$L = \frac{H^2}{K^3}.$$

Bezeichnet man $z = X + Yi$ und $L = m + ni$, so verwandelt sich die Gleichung $z^3 + z^2 + L = 0$ in ein System zweier Gleichungen

$$\begin{cases} X^3 - 3XY^2 + X^2 - Y^2 + m = 0 \\ 3X^2Y - Y^3 + 2XY + n = 0, \end{cases}$$

woraus man als Folgerungen bekommt:

$$n^2(3X + 1)^3 = [X^2(X + 1) + m]\,[2X(2X + 1)^2 - m]^2$$

— eine Gleichung, die es ermöglicht, ein Netznomogramm zur Auffindung der X-Werte nach gegebenen m und n zu zeichnen, und

$$27Y^3\left(m + \frac{2}{27}\right)^2 = \left[Y\left(Y^2 + \frac{1}{3}\right) - n\right]\left[2Y\left(4Y^2 + \frac{1}{3}\right) + n\right]^2$$

— eine Gleichung, die man benutzen kann zur Erzeugung eines Netznomogramms, das die Y-Werte nach denselben Angaben ergibt. Jedes dieser Nomogramme wird durch eine Kurvenschar gebildet, die die Ebene dreifach bedeckt. Deshalb ist es zweckmässig, diese Scharen in drei Teile zu zerlegen und paarweise so auszuzeichnen, dass jede der drei Zeichnungen je eine Lösung der Gleichung $z^3 + z^2 + m + ni = 0$ liefert.

Einige Eigenschaften der erhaltenen Nomogramme werden durch folgende Sätze bestimmt:

1) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung $z^3 + z^2 + m = 0$ drei reelle Lösungen habe, lautet

$$-\frac{4}{27} \leqslant m \leqslant 0;$$

2) in diesem Falle liegen die Lösungen z_1, z_2, z_3 folgendermassen zwischen den Zahlen -1 und $\frac{1}{3}$:

$$-1 \leqslant z_1 \leqslant -\frac{2}{3}, \qquad -\frac{2}{3} \leqslant z_2 \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant z_3 \leqslant \frac{1}{3};$$

3) die Gleichung $2X(2X + 1)^2 - m = 0$ hat im Falle $-\frac{4}{27} \leqslant m \leqslant 0$ ebenfalls drei reelle Lösungen.

Polytechnisches Institut zu Tallinn

Eingegangen am 4. Nov. 1956