https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1988.2.03

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. ÜHISKONNATEADUSED
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR. SOCIAL SCIENCES

1988, 37, 2

Урмас СЕПП

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЛАГА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ПУТЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей статье мы продолжаем исследование метода оценки распределенного лага, основанного на графической трактовке строительного лага. По данной проблематике ранее были рассмотрены частные случаи при оценке лага. Так, показана возможность определения параметров распределенного лага с помощью одной функции роста незавершенного строительства [1]. Использование для этой цели нескольких функций позволило адекватнее учесть разные траектории роста незавершенного строительства [2]. В обоих случаях в качестве метода вычисления параметров применялась простая процедура приближения распределенного лага к качественной структуре. В данной статье показывается, что процедура приближения может быть корректно сформулирована. Вследствие этого задача оценки распределенного лага обобщается (предварительного определения строительного лага не требуется), а сама задача решается путем нелинейного программирования.

Исходная концепция

Рассмотрим распределенный лаг согласно формулировке [1]:

$$K_n = \sum_t \omega_t F_{n+t-1} + \varepsilon_n, \tag{1}$$

где K_n — осуществленные в году n капитальные вложения, входящие в стоимость основных фондов; t — продолжительность запаздывания ввода фондов от начала осуществления капитальных вложений ($t=1, 2, \ldots, t_{max}$); F_{n+t-1} — основные фонды, ввод которых соответствует запаздыванию t; ω_t — коэффициент лагового распределения, показывающий долю стоимости основных фондов в году $n+t-1$, входящую в состав K_n; ε_n — ошибка уравнения.

Задача оценки распределенного лага состоит в определении значений ω_t.

В теоретическом плане предложенный нами алгоритм основывается на графической трактовке строительного лага.[1] В связи с этим можно опираться на следующие закономерности: 1) $\int_0^T f(t)\,dt = L$, где функция $f(t)$ отражает траекторию нарастания доли осуществленных капитальных вложений в течение периода строительства (инвестирования). Таким образом, $t=[0, T]$, где T — срок строительства (в терминах формулы (1) — $T=t_{max}$); L — продолжительность строительного лага; 2) $f(0)=0$ (объем незавершенного строительства равен нулю); 3) $f(T) = 1$ (в момент завершения строительства объем осуществленных капитальных вложений равен сметной стоимости введенных основных фондов).[2]

---

[1] О графической трактовке строительного лага см. подробнее [3].

[2] L оценена заранее. Показателю T присваиваем значения в определенном интервале (об определении L и T см. [2, с. 24—25]).

Решим систему

$$\int_0^T f(t)\,dt = L, \quad f(0)=0, \quad f(T)=1 \tag{2}$$

относительно параметров $f(t)$ и вычислим с помощью этих параметров значения ω_t для каждого T^i:

$$\omega^i_{T^i-g+1-m} = f(T^i-g) - f(T^i-c), \tag{3}$$

где $g=0,1,\ldots,\ T^i-m$; $m=\begin{cases} 1, & \text{если } T^i \text{ — целое число,} \\ T_d, & \text{если } T^i \text{ — не целое число;} \end{cases}$

T^i — определенное значение T; T_d — дробная часть T^i (напр., если $T^i=2{,}3$, то $T_d=0{,}3$); $c=1,2,\ldots,T^i$.

Для проверки качества показателей T^i и ω^i_t вычислим среднюю ошибку аппроксимации:

$$\bar{v}^i = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} \frac{|K_n - K^i_n|}{K_n} \cdot 100, \tag{4}$$

где

$$K^i_n = \sum_{g=0}^{T^i-m} F_{n+g}\,\omega^i_{T^i-g+1-m}, \tag{5}$$

n — год анализируемого периода, $n=[1,\ m]$; m — количество лет в анализируемом периоде.

Чем меньше $\bar{v}^i$, тем ближе T^i и ω^i к их реальным значениям. Следовательно, наиболее адекватны истинным те значения T^i и ω^i, при которых $\bar{v}^i$ минимальна.

Описанный подход реализуется в практических расчетах при условии предварительной оценки L (иначе система (2) не поддается решению). Ошибка в оценке L влечет за собой неправильные расчеты T и n.

Формулировка задачи

Чтобы избежать предварительной оценки L, сформулируем задачу оценки распределенного лага так, чтобы и L входил в число искомых параметров.

Для этого выразим (5) через (3):

$$K^*_n = \sum_{g,\,c} F_{n+g}[f(T-g) - f(T-c)], \tag{6}$$

откуда получим выражение для теоретического объема капитальных вложений K^*_n, определяемого величинами T и L. Зависимость K^*_n от T очевидна из (6). T действует на K^*_n также через $f(t)$ (это явствует из (2)). L определяет K^*_n только через воздействие на $f(t)$ (это также видно из (2)).

Заменим критерий адекватности (4) теоретического ряда капитальных вложений близкой ему суммой значений квадратичных отклонений теоретических капитальных вложений от фактических. Логика такова, что чем меньше эта сумма, тем ближе L, T и структура распределенного лага к их реальным значениям. Следовательно, для приближения L, T и структуры лага к их истинным значениям придется решить задачу

$$\min \sum_n (K_n - K^*_n)^2. \tag{7}$$

Конкретизация задачи

Для практической реализации правил (6) и (7) необходимо специфицировать $f(t)$. Поскольку вопрос спецификации уже рассматривался [2, с. 25—27], то отметим здесь лишь то, что из элементарных функций предъявляемым к спецификации $f(t)$ требованиям удовлетворяют только степенная функция и некоторые модели, входящие в число полиномов.

Запишем эти функции в формализованном виде:
1. Степенная функция (СФ) $f(t)=a_1t^{a_2}$.
2. Квадратичная функция (КВФ) $f(t)=a_1t+a_2t^2$.
3. Кубическая функция 1 (КФ1) $f(t)=a_1t+a_2t^3$.
4. Кубическая функция 2 (КФ2) $f(t)=a_1t_2+a_2t^3$.

Чтобы представить K^*_n с помощью названных функций, выразим a_1 и a_2 из системы (2).[3] Так как вывод a_1 и a_2 состоит из тривиальных преобразований, приведем здесь только найденные выражения:

1) при СФ

$$a_1=T^{1-T/L},\quad a_2=T^{T/L-1};\tag{8}$$

2) при КВФ

$$a_1=(6L/T-2)/T,\quad a_2=(3T-6L)/T^3;\tag{9}$$

3) при КФ1

$$a_1=(4L/T-1)/T,\quad a_2=(2T-4L)/T^4;\tag{10}$$

4) при КФ2

$$a_1=(12L/T-3)/T^2,\quad a_2=(4T-12L)/T^4.\tag{11}$$

Определив a_1 и a_2, запишем задачу (7) с учетом (6) и (8)—(11) относительно рассматриваемых спецификаций. Для СФ —

$$\min\sum_n\{K_n-T^{(1-T/L)}\sum_{g,\,c}[(T-g)^{(T/L-1)}-(T-c)^{(T/L-1)}]F_{n+g}\}^2,\tag{12}$$

для КВФ —

$$\min\sum_n\left\{K_n-\sum_{g,\,c}\left[\frac{6L/T-2}{T}(c-g)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3T-6L}{T^3}((T-g)^2-(T-c)^2)\right]F_{n+g}\right\}^2,\tag{13}$$

для КФ1 —

$$\min\sum_n\left\{K_n-\sum_{g,\,c}\left[\frac{4L/T-1}{T}(c-g)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2T-4L}{T^4}((T-g)^3-(T-c)^3)\right]F_{n+g}\right\}^2,\tag{14}$$

для КФ2 —

$$\min\sum_n\left\{K_n-\sum_{g,\,c}\left(\frac{12L/T-3}{T^2}[(T-g)^2-(T-c)^2]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4T-12L}{T^4}[(T-g)^3-(T-c)^3]\right)F_{n+g}\right\}^2,\tag{15}$$

где T, L — искомые величины, g, c — вспомогательные величины (см. (3)), K_n, F_n — эмпирические значения капитальных вложений и основных фондов.

---

[3] Эта процедура необходима, потому что до вычисления (7) параметры a_1 и a_2 остаются неизвестными, а для вычисления (7) надо использовать (6), где a_1 и a_2 уже определены.

Необходимость ограничений

Итак, мы имеем четыре спецификации $f(t)$. Может возникнуть вопрос, рационально ли применять несколько спецификаций при оценке лага. Легче ведь ограничиться лишь одной из них и на ее основе решать задачу лага.

Все же применение не одной, а нескольких спецификаций $f(t)$ оправдано. Следует учесть, что перед оценкой лага о $f(t)$ нам известно, кроме обстоятельств, сформализованных в (2), только то, что $f(t)$ в интервале $[0, T]$ есть монотонно возрастающая функция.[4] Из-за нехватки информации следует в качестве спецификации $f(t)$ попросту испробовать разные функции с тем, чтобы по-разному представить процесс роста осуществленных капитальных вложений.[5]

Каждая из четырех рассматриваемых функций имеет определенные свойства. Эти свойства могут не соответствовать смоделированному объекту. В этом случае решение задач (12)—(15) путем безусловной минимизации не обеспечивает результатов, подчиняющихся экономической интерпретации. Негодность найденных результатов обусловлена тем, что $f(t)$ имеет экстремум в $[0, T]$. Тогда, естественно, $f(t)$ в $[0, T]$ — не монотонная функция. Такая функция отражает ситуацию, когда суммарный объем осуществленных капитальных вложений в начале строительного периода растет, а в конце убывает (или наоборот). Названная ситуация, конечно, с точки зрения экономической практики, нереальна. Чтобы $f(t)$ не имела в $[0, T]$ экстремума, следует задачи минимизации (12)—(15) дополнить соответствующими ограничениями.

Ограничения

1. $f(t)$, специфицированная в форме СФ (задача (12)). Так как СФ не имеет экстремума при $t>0$ и всегда $T>L>0$, т. е. $a_1>0$ и $a_2>0$, то при использовании СФ дополнительные ограничения не требуются. Поэтому оценка распределенного лага на основе СФ — это задача безусловной минимизации, которая представлена выражением (12).

2. $f(t)$, специфицированная как КВФ (задача (13)). Экстремум КВФ выражается как $(a_1t+a_2t^2)' \Rightarrow a_1+2a_2t=0$, откуда значение аргумента при экстремуме $t_E=-a_1/2a_2$. Чтобы $t_E \notin [0, T]$, необходимо выполнение неравенств

$$t_E=-\frac{a_1}{2a_2}<0 \tag{16}$$

и

$$t_E=-\frac{a_1}{2a_2}>T. \tag{17}$$

Заменим a_1 и a_2 выражением (9) и решим (16) и (17) относительно L/T:

$$\frac{L}{T}>\frac{1}{3} \tag{18}$$

и

$$\frac{L}{T}>\frac{2}{3}. \tag{19}$$

Рассмотрим условие (18). Из графической трактовки строительного

---

[4] Вопрос монотонности подробнее рассмотрен в [1, с. 9—13].

[5] В нашем контексте это относится прежде всего к скорости и ускорению функции в интервале $[0, T]$.

лага известно, что точка $L/T=1/3$ входит в интервал вариации L/T, где $f(t)$ имеет неотрицательное ускорение.[6] КВФ имеет неотрицательное ускорение в двух случаях: 1) $a_1>0$ и $a_2<0$; 2) $a_1>0$ и $a_2>0$.

Заменим a_1 и a_2 выражением (9) и решим $a_1>0$ и $a_2<0$ относительно L/T. В результате выясняется, что $a_1>0$, если $L/T>1/3$, и $a_2<0$, если $L/T>1/2$. Следовательно, оба неравенства удовлетворяются лишь тогда, когда $L/T>1/2$. По графической трактовке строительного лага при $L/T>1/2$ $f(t)$ имеет отрицательное ускорение. Это противоречит исходному предположению о неотрицательном ускорении $f(t)$. В силу этого можно считать, что при $a_1>0$ и $a_2<0$ КВФ не имеет вблизи точки $L/T=1/3$ неотрицательного ускорения, следовательно, условия $a_1>0$ и $a_2<0$ можно в интервале $t=[1, T]$ считать ошибочными.

Рассмотрим вторую возможность неотрицательного ускорения КВФ. С помощью (9) опять решаем $a_1>0$ и $a_2>0$. Получаем, что оба неравенства удовлетворяются, если $1/3<L/T<1/2$. В этом промежутке $f(t)$ действительно имеет неотрицательное ускорение, что соответствует исходной предпосылке.

Следовательно, (18) дает лишь нижнюю границу для L/T при $t_E<0$. Верхняя граница этого показателя вытекает из анализа $f(t)$ в случае $L/T>1/3$ и составляет 1/2. Поэтому $1/3<L/T<1/2$.

Исследуем теперь условие (19). Ситуация $L/T>2/3$ отражает рост осуществленных капитальных вложений $f(t)$ с отрицательным ускорением. Так как в интервале $L/T\in(2/3, 1)$, где 1 — максимальное значение L/T, $f(t)$ может иметь только отрицательное ускорение, то противоречия между (19) и характером $f(t)$ не возникает. Поэтому из (19) вытекает, что требование $t_E>T$ выполняется при $2/3<L/T<1$.

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что требование $t_E\notin[0, T]$ выполняется при КВФ, если

$$\frac{L}{T}\in\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right\}. \tag{20}$$

3. Приведенные условия являются ограничениями при решении задачи (13). Ход выведения ограничений задачи минимизации при использовании КФ1 и КФ2 аналогичен. Чтобы не повторяться, ограничимся представлением результатов.

Итак, условие $t_E\notin[0, T]$ выполняется при КФ1, если

$$\frac{L}{T}\in\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{8}, 1\right)\right\}, \tag{21}$$

и при КФ2, если

$$\frac{L}{T}\in\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}. \tag{22}$$

Таким образом, (21) является ограничением задачи (14) и (22) — задачи (15).

Пример

Пусть имеется произвольный ряд стоимости введенных в эксплуатацию по годам основных фондов F_n (табл. 1). Определены продолжительность T (3 года), а также коэффициенты распределенного лага: $\omega_1=0{,}2$, $\omega_2=0{,}3$, $\omega_3=0{,}5$. На основе этих коэффициентов и с помощью формулы $K_n=\omega_3F_n+\omega_2F_{n+1}+\omega_3F_{n+2}$ рассчитаны годовые объемы осуществленных капитальных вложений K_n (табл. 1). По исходным данным, строительный лаг составляет $L=0{,}2\cdot2{,}5+0{,}3\cdot1{,}5+0{,}5\cdot0{,}5=1{,}2$ г.

[6] Подробнее вопрос о связи $f(t)$ с L/T изложен в [1, с. 12, 13; 2, с. 24, 25].

Таблица 1

Исходные данные, млн. руб.

Год	F_n	K_n	K^*_n	Год	F_n	K_n	K^*_n
1	100	108	108,048	7	170	186	186,712
2	120	123	122,891	8	200	207	206,892
3	110	132	131,664	9	210		
4	150	159	158,748	10	220		
5	160	168	168,006	11	230		
6	180	181	180,951				

Кроме того, нам известны временные ряды капитальных вложений и введенных фондов. Для использования описанного выше подхода этих данных достаточно. Остальные исходные показатели — T, L и структура ω — понадобятся в стадии проверки качества найденных результатов (насколько теоретические характеристики лага совпадают с исходными).

Чтобы оценить распределенный лаг, решим четыре задачи минимизации[7]:

1) при использовании СФ в качестве модели $f(t)$ соответствующая задача представлена выражением (12);

2) при использовании КВФ задача (13) решается ограничением (20);

3) при КФ1 задача (14) решается ограничением (21);

4) при КФ2 задача (15) решается ограничением (22).

Таблица 2

Результаты спецификации $f(t)$

	СФ	КВФ	КФ1	КФ2
L	1,13502996	1,14781853	1,14724525	1,13429375
T	3,75226106	3,0...	3,02454093	3,64999063
Сумма квадратичных отклонений, млн. руб.	3,77430886	3,40096644	0,711911604	3,46752379

В результате вычислений (табл. 2) выяснилось, что лучшую аппроксимацию эмпирического ряда дает КФ1: средняя ошибка аппроксимации не превышает 0,13%.

Найденные с помощью КФ1 значения $T=3{,}0$ и $L=1{,}1$ почти идентичны исходным величинам этих показателей (3,0 и 1,2).

По формуле (10) найдем значения параметров КФ1: $a_1=0{,}1710173$ и $a_2=0{,}0174480$. Чтобы определить структуру распределенного лага, воспользуемся формулой (3). При этом выясняется, что $\omega_4=0{,}5089823$, $\omega_3=0{,}2970383$, $\omega_2=0{,}1897813$ и $\omega_1=0{,}0041972$. Как видим, найденная структура с коэффициентами 0,51; 0,30; 0,19 хорошо отражает исходную (0,5; 0,3; 0,2), а смоделированный с ее помощью временной ряд капитальных вложений близок фактическому (см. в табл. 1 показатель K^*_n).

Выводы

1. Представленный метод обеспечивает достаточную точность оценки распределенного лага.

2. Адекватность метода обусловлена тем, что алгоритм его основан на отражении с помощью $f(t)$ реального процесса осуществления капитальных вложений. В этом смысле рассматриваемый алгоритм имеет

[7] С использованием метода поиска по деформируемому многограннику [4, с. 163—173], модифицированного для учета тривиальных ограничений. Соответствующая программа была внедрена по [4, с. 498—501] в Институте экономики АН ЭССР С. Роосе.

преимущество перед традиционными методами оценки распределенного лага, использующих в качестве объекта моделирования абстрактное и потому прямым путем неопределяемое явление (структура лага).

3. Представленный метод является относительно чувствительным инструментом оценки распределенного лага. Адекватность метода в разных ситуациях (разные продолжительности T или L, разные траектории роста осуществленных капитальных вложений) обеспечивается применением нескольких спецификаций $f(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Сепп У.* Оценка параметров распределенного лага капитальных вложений. — Изв. АН ЭССР. Обществ. н., 1984, № 1, 8—18.
2. *Сепп У.* Алгоритм оценки распределенного лага. — Изв. АН ЭССР. Обществ. н., 1986, № 1, 23—29.
3. *Первушин В. А., Липанович В. И.* Лаг капитальных вложений и его измерение. — Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура, 1977, вып. 12, 74—81.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.

Представил К. Хабихт

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/I 1987

Urmas SEPP

KAPITAALMAHUTUSTE JAOTATUD VIITAJA HINDAMINE MITTELINEAARSE PROGRAMMEERIMISE TEEL

Artiklis esitatud hindamismeetod põhineb ehitusviitaja graafilisel käsitlusel. On näidatud, et kui korrektselt formuleerida viitaja graafilisel käsitlusel põhinev lahendusmeetod, siis on võimalik jaotatud viitaja hindamise ülesanne esitada mittelineaarse programmeerimise probleemina. On rõhutatud, et selle probleemi lahendina saadud viitaja adekvaatsuse tõstmise eesmärgil on vajalik kapitaalmahutuste investeeritud trajektoori peegeldada mitte ühe, vaid mitme funktsiooniga. Niiviisi saab kvaliteetse tulemuse ka siis, kui üks kasutatavatest funktsioonidest ei peaks mingil põhjusel lahendit kindlustama.

Artiklis on rõhutatud, et mitme funktsiooni kasutamisel on tõenäoline funktsiooni ekstreemumpunkti sattumine määramispiirkonda. Sellisel juhul satub funktsioon vastuollu reaalse investeerimisprotsessiga (kapitaalmahutuste kumulatiivne summa saab reaalsuses vaid kasvada, mitte mingil juhul aga kahaneda). Niisuguse võimaluse vältimiseks on soovitatud täiendada viitaja hindamise ülesannet kitsendustega.

Esitatud algoritmi kasutamist on illustreeritud arvnäitega.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
14. I 1987

Urmas SEPP

ESTIMATION OF A DISTRIBUTED LAG OF CAPITAL INVESTMENTS BY NONLINEAR PROGRAMMING

In the article the author presents an algorithm of estimating a distributed lag. The algorithm is based on the graphic treatment of construction lag. He points out that if the formerly used approximation method is formulated correctly the problem of lag estimation can be presented in a generalized form which represents a minimization problem in mathematics. For estimating a lag it is necessary to model the increase of capital investments during the construction period. On this purpose four functions has been used. In some situations extremum can occur in a function's domain of definition. To avoid it the corresponding restrictions must be inserted into a lag problem. The formulating of restrictions has been briefly characterized. As the minimized function cannot be linearized, the corresponding problem represents a problem of nonlinear programming. Its solution has been illustrated by a numerical example.

The author has come to a conclusion that the recommended estimation method guarantees sufficient adequacy of results. Besides, the method is sufficiently sensitive to be used adequately in different situations of investments (duration of building period or construction lag, trajectory of capital investments' increase).

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Jan. 14, 1987
Received