

Юло ЭННУСТЕ

УКЛОНЕНИЕ ОТ РИСКА, ОБУСЛОВЛЕННОЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ МЕХАНИЗМОМ ПРЕМИРОВАНИЯ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПЛАНАХ

В статье определяется степень уклонения от риска, обусловленная кусочно-линейным механизмом премирования при интервальных планах, а также исследуется ее зависимость от протяженности интервала. Полученный результат обобщает соответствующие данные, полученные при исследовании точечного плана [1]. Показано, что при удлинении интервала плана степень обусловленного уклонения от риска уменьшается.

1. Предварительные замечания

В детерминистской экономической теории деятельность централизованно координируемых агентов в соответствии с планом и правильное представление ими данных в центр обеспечиваются с помощью т. н. гарантирующих механизмов премирования [2]. При использовании подходящих механизмов формируется как правильное представление данных, так и точное выполнение планов агентами и обеспечивается тем самым достижение глобального оптимума [3].

Однако в недетерминистском случае использованию механизмов премирования сопутствует т. н. обусловленное уклонение от риска [1], которое может направить агентов на выбор относительно консервативных и глобально неоптимальных альтернатив плана. Для смягчения этого явления представляет интерес исследование механизмов с интервальными планами, так как выяснилось, что замена точечного плана интервальным позволяет уменьшить степень обусловленного уклонения от риска. При этом механизмы с точечным планом рассматриваются как особые случаи, где интервал концентрируется в точке.

Исследуя степень уклонения от риска при интервальной шкале премирования, будем исходить из крайне упрощенного механизма, а также из того, что агент первоначально нейтрален по отношению к риску и максимизирует математическое ожидание премии. Такие упрощения приняты с целью сконцентрировать внимание только на поставленном вопросе.

2. Вывод степени обусловленного уклонения от риска

Допустим, что нейтральный по отношению к риску агент максимизирует математическое ожидание Ew своей премии w . Премия зависит от случайного результата (напр., от прибыли), который описывается данной нормальной случайной величиной y с функцией плотности $h(y)$, средним значением μ и стандартным отклонением σ . Премия также зависит от механизма, который является кусочно-линейным и в котором используется интервальный план. Пусть конечными точками интервала плана будут y_1 и y_2 и пусть они будут определены следующим образом: $y_1 = \mu - k\sigma$ и $y_2 = \mu + k\sigma$, где $k > 0$ является заданным и определяет пределы интервала.

Как уже было сказано, в целях большей ясности избран предельно простой механизм премирования:

$$\omega = \begin{cases} ay - p(y_1 - y), & \text{если } y \leq y_1, \\ ay, & \text{если } y_2 \geq y \geq y_1, \\ ay - q(y - y_2), & \text{если } y \geq y_2. \end{cases} \quad (1)$$

В данном случае $a > 0$ есть часть, которую агент получает из результата y , если последний приходится на планируемый интервал. Параметры p и q определяют размеры штрафа за единичное невыполнение или за единичное перевыполнение плана.

Для вычисления математического ожидания премии нами используются следующие понятия: s — стандартная случайная величина ($\mu_s = 0$ и $\sigma_s = 1$), $n(s)$ — функция плотности со стандартной случайной величиной,

$$N(t) = \int_{-\infty}^t n(s) ds, \quad M(t) = \int_{-\infty}^t sn(s) ds \quad \text{и} \quad \hat{M}(t) = \int_t^{\infty} sn(s) ds.$$

Теперь по примеру [1] ожидаемое значение премии выводится следующим образом:

$$\begin{aligned} E\omega &= \int_{-\infty}^{y_1} [ay - p(y_1 - y)]h(y) dy + \int_{y_1}^{y_2} ayh(y) dy + \\ &+ \int_{y_2}^{\infty} [ay - q(y - y_2)]h(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} ayh(y) dy - \int_{-\infty}^{y_1} p(y_1 - y)h(y) dy - \\ &- \int_{y_2}^{\infty} q(y - y_2)h(y) dy = a\mu - \int_{-\infty}^{y_1} p[y_1 - (y - \mu) - \mu]h(y) dy - \\ &- \int_{y_2}^{\infty} q[(y - \mu) - y_2 + \mu]h(y) dy = a\mu + \int_{-\infty}^{y_1} p(y - \mu)h(y) dy - \\ &- \int_{-\infty}^{y_1} p(y_1 - \mu)h(y) dy - \int_{y_2}^{\infty} q(y - \mu)h(y) dy - \int_{y_2}^{\infty} q(\mu - y_2)h(y) dy = \\ &= a\mu + p\sigma M(-k) + pk\sigma N(-k) - q\sigma \hat{M}(k) + q\sigma kN(-k) = \\ &= a\mu + \sigma[(p+q)M(-k) + k(p+q)N(-k)] = a\mu - c(k)\sigma, \end{aligned}$$

где

$$c(k) = (p+q) [\hat{M}(k) - kN(-k)].$$

Выяснилось, что математическое ожидание премии для первоначально нейтрального по отношению к риску агента есть линейная комбинация среднего значения результата и его стандартного отклонения. Таким образом, в силу механизма (1) агент начинает учитывать риск результата (который описывается здесь σ), и мы можем говорить об обусловленном уклонении от риска. Последний может направить агента на выбор таких альтернатив, которые глобально не оптимальны. Например, если первоначальная задача (без децентрализации и тем самым без механизма премирования) поставлена на оптимизацию математического ожидания результатов, то ее децентрализованное решение (с помощью премируемых агентов) может дать более консервативный результат и более низкое математическое ожидание.

Степень обусловленного уклонения от риска описываем по примеру [1] следующим образом:

$$r(k) = c(k)/a = (p+q) [\hat{M}(k) - kN(-k)]/a, \quad (2)$$

где в данном случае k характеризует ширину интервала плана. Если $k=0$, то интервал концентрируется в точке, или в определенный план, если k увеличивается, то расширяется и интервал.

3. Зависимость степени обусловленного уклонения от риска от ширины интервала плана

На основе степени обусловленного уклонения от риска (2) мы можем сделать ряд выводов. При этом предположим, что $a, p, q > 0$, что означает, что агент заинтересован в более высоком результате и в том, чтобы он приходился на интервал плана. Согласно дефиниции известно, что

$$\hat{M}(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = \infty, \\ > 0, & \text{если } 0 < k < \infty, \\ 1/\sqrt{2\pi}, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

а также

$$N(-k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = -\infty, \\ > 0, & \text{если } -\infty < k < 0, \\ 1/2, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Теперь легко можно видеть, что максимум степени обусловленного уклонения от риска равен $(p+q)/a\sqrt{2\pi}$ и что он отвечает точечному плану ($k=0$). При расширении интервала плана, однако, степень уклонения от риска уменьшается вплоть до исчезновения. Таким образом, чем шире интервал плана, тем смелее агент выбирает альтернативы, тем меньше он считается с расходимостью результатов альтернативы и больше обращает внимания на математическое ожидание результата. Но при данной альтернативе расширение интервала увеличивает математическое ожидание премии у агента и тем самым выгодно агенту. Но слишком широкие интервалы плана могут оказаться неподходящими для центра и, следовательно, можно говорить об оптимальных для системы пределах интервала плана, что, в свою очередь, является сложной проблемой.

На основе (2) мы видим также, что степень обусловленного уклонения от риска уменьшается вместе с уменьшением $(p+q)/a$. Другими словами, чем ниже меры штрафа и больше доля премии в интервале плана, тем больше учитывает агент при выборе альтернативы математическое ожидание результата.

5. Заключительные замечания

Исследование степени обусловленного интервальным планом уклонения от риска может быть использовано и для более сложных механизмов премирования, и для более сложных целевых функций агента. В этом плане представляет интерес исследование как некоторых линейных [4], так и нелинейных механизмов, а также агентов, целевой функцией которых является, например, максимизация вероятности того, что уровень данной премии будет превышен [1], и т. д.

Но интуитивно представляется ясным, что во всех описанных особых случаях остается справедливым доказанное выше утверждение: использование интервального плана вместо точечного смягчает обусловленное механизмом премирования уклонение от риска и стимулирует агента выбирать более рискованные альтернативы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Itami, H.* Analysis of implied risk-taking behavior under a goal-based incentive scheme. — *Manag. Sci.*, 1976, 23, N 2, 183—197.
2. *Cohen, S.* Incentives, iterative communication, and organizational control. — *J. Econ. Theory*, 1980, 22, N 1, 37—55.
3. *Williams, S.* Realization and Nash implementation. Two aspects of mechanism design. — *Econometrica*, 1986, 54, N 1, 139—151.
4. *Моргунов В. И.* Стимулирование достоверности плановых обязательств. — *Экономика и матем. методы*, 1985, вып. 6, 1125—1127.

Представил К. Хабихт

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/V 1986

Olo ENNUSTE

INTERVALLPLAANIGA TÜKITI LINEAARSE PREMEERIMISEMehHANISMI POOLT TINGITUD RISKIKARTUSEST

Artiklis on tuletatud intervallplaaniga tükiti lineaarse premeerimismehhanismi poolt tingitud riskikartuse määr ning uuritud selle sõltuvust intervalli ulatusest. Saadud tulemus üldistab vastavat tulemust punktplaani puhul. Selgub, et plaaniintervalli laienedes tingitud riskikartuse määr väheneb.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut*

Toimetusse saabunud
29. V 1986

Olo ENNUSTE

ON RISK AVERSION IMPLIED BY A PIECE-WISE LINEAR INCENTIVE MECHANISM WITH AN INTERVAL PLAN

The author derives the rate of risk aversion implied by a piece-wise linear incentive mechanism with an interval plan, and studies its dependence upon the width of the interval. The result obtained is a generalization of the respective result for a point plan [1]. It was found that the rate of implied risk aversion decreases with the expansion of the plan interval.

*Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics*

Received
May 29, 1986