EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1981, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1981, № 3

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1981.3.06

Ю. ЭННУСТЕ

ПРИНЦИПЫ ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДВУХЭТАПНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ И ИХ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Представил К. Хабихт

В статье рассматриваются принципы поэтапной декомпозиции двухэтапных задач стохастического программирования, основанные на координации ценами и лимитами. Выясняются возможности использования этих принципов при решении числовых задач и дается их экономическая интерпретация.

1. Введение

1. Методы поэтапной декомпозиции двухэтапных задач стохастического программирования представляют интерес как при решении числовых задач, так и при моделировании и интерпретации хозяйственных механизмов. Числовые задачи легко решаются сейчас в крайне упрощенном виде (линейная задача, где только свободный член стохастический). При этом явно определим лишь план первого этапа. Можно надеяться, что методы декомпозиции при решении таких задач могут оказаться эффективными по следующим причинам. Во-первых, они помогают преодолевать трудности, связанные с размерностью, весьма обычные в экономических задачах. Во-вторых, эти методы разлагают (путем координации) первоначальную задачу, содержащую два вида плановых показателей (определенные и гибкие или независимые от случайных событий и зависимые от них), на подзадачи с плановыми показателями одного вида. Одни из них содержат только определенный план, а другие — только гибкий.

Как известно, методы декомпозиции интерпретируемы и как математические модели хозяйственных механизмов. В этом отношении методы декомпозиции стохастических экономических оптимизационных задач особенно интересны, поскольку упомянутые задачи адекватнее описывают экономические объекты, чем детерминированные. Ниже особое внимание уделено экономическим интерпретациям и новые результаты получены как для цен, так и лимитов.

2. Одним из общих приемов решения стохастических оптимизационных задач является замена их детерминированным эквивалентом или аппроксимацией. Поэтому здесь при декомпозиции можно исходить из первоначального стохастического вида или же из выведенного детерминированного эквивалента. В данной статье мы придерживаемся первого пути, предполагая, что он позволит получить более общие и более интересные интерпретации [1, 2], чем анализ соответствующих детер-

минированных аналогов, некоторые элементы которого есть, например, в работах [3, 4].

В начале статьи формулируется исходная задача, которая является модификацией задачи, представленной в работе [1]. Она сепарабельна в разрезе этапов и первый этап ее также стохастичен (хотя там и отыскивается определенный план). Далее на основании исходной задачи рассматриваются принципы декомпозиционных методов, в которых для координации используются цены. Основой служит теория Куна—Таккера, которая для стохастического случая обзорно представлена в работе [1]. В конце статьи рассматриваются принципы координации лимитами. В обоих случаях существенное место отводится экономическим интерпретациям и делаются замечания о возможностях применения описанных выше принципов при решении числовых задач.

2. Постановка исходной задачи

1. Пусть весь плановый период разделен на два этапа (этапы, в свою очередь, могут разделяться на интервалы, но они не имеют принципиального значения и здесь не рассматриваются). В течение планового периода реализуется случайное событие s из заданного множества S с заданным распределением вероятности $p(s)$. Содержательно s обозначает состояние природы и от этого состояния зависят параметры как первого, так и второго этапов. Какое именно событие s реализуется, выяснится только в конце первого этапа. Но уже к началу его необходимо составить определенный план по крайней мере на этот этап. А план второго этапа можно оставить зависимым (если это целесообразно) от реализации случайного события, которая станет известна к началу второго этапа. Тем самым в плане второго этапа можно учесть поступающую дополнительную информацию. Добавим, что в экономических задачах определенный план первого этапа не должен быть обусловлен наличием полной информации. Это обусловливается характером экономической деятельности и прежде всего длительностью сроков различных инвестиций, потребностью в предварительной заготовке запасов и т. д. [5].

Таким образом, для всего планового периода отыскивается определенно-гибкий план $x=(x_1, x_2(s))$, где x_1 — определенный план первого этапа и $x_2(s)$ — гибкий или зависимый от события s план второго этапа. Предположим, что $x_1 \in C_1 \subset R_+^{n_1}$ и $x_2 \in C_2 \subset R_+^{n_2}$, где множества C_1 и C_2 — замкнутые, выпуклые, непустые и описывают какие-либо прямые ограничения на планы. Далее предположим, что критерии и ограничения обоих этапов — стохастические строго выпуклые функции. Целевой функцией пусть будет математическое ожидание, а вероятность удовлетворения стохастических ограничений пусть будет равняться 1.

2. На основании вышесказанного запишем следующую выпуклую задачу. Минимизировать целевую функцию:

$$E\{f_{10}(s, x_1)+f_{20}(s, x_2(s))\} \tag{1а}$$

при условиях:

$$f_{1i}(s, x_1) \leqslant b_{1i}(s), \quad i=1, \ldots, m_1, \tag{1б}$$

$$f^1_{2i}(s, x_1)+f_{2i}(s, x_2(s)) \leqslant b_{2i}(s), \quad i=1, \ldots, m_2, \tag{1в}$$

$$x_1 \in C_1 \quad \text{и} \quad x_2(s) \in C_2. \tag{1г}$$

На первом этапе задачи имеется m_1 ресурсов, а на втором — m_2. План первого этапа влияет и на баланс ресурсов второго через т. н. переходные ресурсы (фонды, капитальные вложения, запасы и т. д.), которые описываются функцией $f^1_{2i}(s, x_1)$ в ограничении второго этапа (1в).

3. Координация ценами

1. Для поэтапной декомпозиции задачи (1) и координации ценами подзадач, следуя работе [1], составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = E\Big\{f_{10}(s, x_1) + f_{20}(s, x_2(s)) + \sum_{i=1}^{m_1} y_{1i}(s)\,[f_{1i}(s, x_1) - b_{1i}(s)] + \sum_{i=1}^{m_2} y_{2i}(s)\,[f^1_{2i}(s, x_1) + f_{2i}(s, x_2(s)) - b_{2i}(s)]\Big\}, \tag{2}$$

где $y = (y_1(s), y_2(s))$, $y_1(s), y_2(s) \geqslant 0$ и $x_1 \in C_1$, $x_2(s) \in C_2$.

Известно, что x^* — компонента седловой точки (x^*, y^*) функции (2) является решением задачи (1). Таким образом, решение задачи (1) можем заменить определением седловой точки (2). При этом (2) сепарирует исходную задачу на две подзадачи и задачу координирующего центра. При заданной центром цене y подзадача первого этапа имеет вид:

$$\min_{x_1 \in C_1} E\Big\{f_{10}(s, x_1) + \sum_{i=1}^{m_1} y_{1i}(s) f_{1i}(s, x_1) + \sum_{i=1}^{m_2} y_{2i}(s) f^1_{2i}(s, x_1)\Big\} \tag{3}$$

и подзадача второго этапа:

$$\min_{x_2(s) \in C_2} E\Big\{f_{20}(s, x_2(s)) + \sum_{i=1}^{m_2} y_{2i}(s) f_{2i}(s, x_2(s))\Big\}. \tag{4}$$

Задача координирующего центра в ходе решения — корригирование цены y таким образом, чтобы она приближалась к оптимальной цене y^*.

Соответственно общей теории декомпозиции оптимального планирования [3, 4], стратегией центра в ходе итерации является повышение цен тех ресурсов, при которых ограничения задачи (1) не удовлетворены и наоборот. Исходя из функции Лагранжа (2), для координации подзадач обоих этапов центр должен использовать гибкие цены $y_1(s)$ и $y_2(s)$. При решении подзадач учитываются расходы по этим ценам.

Из описанной выше схемы следует, что в заданных предпосылках гибкость цен превосходит гибкость плана. Хотя на первом этапе ведутся поиски определенного плана, для координации подзадач этого этапа все-таки необходимо использовать гибкие цены. Это утверждение действительно, если предположить, что для ограничений первого этапа отсутствует полная информация. Далее рассмотрим случай, когда это предположение недействительно.

2. В случае, когда ограничения первого этапа не зависят от события s (для этого этапа имеется полная информация), в задаче (1) получаем следующие детерминированные элементы:

$$f_{1i}(x_1),\ b_{1i} \text{ и } f^1_{2i}(x_1).$$

Теперь подзадача первого этапа имеет вид:

$$\min_{x_1 \in C_1} \left\{ Ef_{10}(s, x_1) + \sum_{i=1}^{m_1} y_{1i} f_{1i}(x_1) + \sum_{i=1}^{m_2} \bar{y}_{2i} f^1_{2i}(x_1) \right\}, \tag{5}$$

где $\bar{y}_{2i} = Ey_{2i}(s)$.

Поэтому при предположении, что для этапа определенного плана имеется полная информация, этот этап координируется определенными ценами. При этом цены переходных ресурсов выражены в виде математического ожидания цен второго этапа. Такие же результаты получены и на основании теории двойственности в работе [2].

3. Разработка подходящих методов декомпозиции для решения конкретных числовых задач, основанных на координации ценами, кажется целесообразной. Именно, решение подзадачи (3) простое. Сильное сепарирующее влияние цен также подает надежду на выражение гибкого плана задачи (4) второго этапа в виде функции переменного s. Например, если функции задачи (4) сепарабельны в отношении плановых показателей $x_{2j}(s)$, $j = s, \ldots, n_2$, то их оптимальные значения можно выразить через частные производные с проектированием на множество C_2. Поэтому решение второго этапа можем представить в виде $x_{2j}(s) = h_{2j}(s, y_2(s))$. При помощи последних функций центр имеет возможность корригировать цены.

4. Координация лимитами

1. Задача поэтапного координирования лимитами, эквивалентная задаче (1), имеет вид:

$$\min_{d \in D} g(d) = \min_x E\{f_{10}(s, x_1) + f_{20}(s, x_2(s))\} \tag{6а}$$

при условиях:

$$f_{1i}(s, x_1) \leqslant b_{1i}(s), \quad i = 1, \ldots, m_1, \tag{6б}$$

$$f^1_{2i}(s, x_1) \leqslant d_{2i}(s), \quad i = 1, \ldots, m_2, \tag{6в}$$

$$d_{2i}(s) + f_{2i}(s, x_2(s)) \leqslant b_{2i}(s), \quad i = 1, \ldots, m_2, \tag{6г}$$

где $x_1 \in C_1$, $x_2(s) \in C_2$ и D таковы, что решение задачи (6) существует.

При заданном лимите $d = (d_{2i}(s))$, $i = 1, \ldots, m_2$, задача (6) сепарируется на две поэтапные подзадачи. Подзадача первого этапа — минимизация целевой функции:

$$Ef_{10}(s, x_1) \tag{7а}$$

при условиях:

$$f_{1i}(s, x_1) \leqslant b_{1i}(s), \quad i = 1, \ldots, m_1, \tag{7б}$$

$$f^1_{2i}(s, x_1) \leqslant d_{2i}(s), \quad i = 1, \ldots, m_2,\ x_1 \in C_1. \tag{7в}$$

Задача второго этапа — минимизация целевой функции

$$Ef_{20}(s, x_2(s)) \tag{8а}$$

при условиях:

$$d_{2i}(s) + f_{2i}(s, x_2(s)) \leqslant b_{2i}(s), \quad i = 1, \ldots, m_2, \quad x_2(s) \in C_2. \tag{8б}$$

Цель центра — определить величину оптимального лимита $d^*_{2i}(s)$, $i=1, \ldots, m_2$. Признаком оптимальности является равенство двойственных решений $y^1_{2i}(s)$ и $y_{2i}(s)$ соответствующих ограничений (7в) и (8б) [3, 4]. Экономически двойственные решения ограничений определяют предельные эффективности соответствующих ресурсов в соответствующих подзадачах.

Ограничения координируются центром путем такого перераспределения лимитов, которое уравняло бы соответствующие двойственные решения. Снова подтверждается то, что определенный план ограничивается гибкими лимитами.

2. Рассмотрим теперь координацию лимитами в случае, когда имеется полная информация о первом этапе. Ограничение (7в) принимает вид $f^1_{2i}(x_1)=d_{2i}$, $i=1, \ldots, m_2$, и его двойственное решение y^1_{2i} определенное. Но двойственное решение $y_{2i}(s)$ ограничения (8б) зависит от случайного события. Интуитивно можно предполагать, что в данных условиях при корригировании необходимо стремиться к равенству $y^1_{2i}=Ey_{2i}(s)$. Экономически это значит, что предельная эффективность переходных ресурсов на первом этапе должна равняться математическому ожиданию предельной эффективности во втором этапе.

3. Решение числовых задач, основанных на принципах координации лимитами, все еще кажется затруднительным. Отсутствуют хорошие методы определения гибкого плана $x_2(s)$ подзадачи (8), а также определения гибких двойственных решений обеих (7) и (8) подзадач [6]. Однако же применение этого принципа может найти место и в приближенных решениях линейных задач. Как известно, координация ценами в линейных случаях не гарантирует сбалансированного решения. Для определения приближенного сбалансированного решения путем лимитирования бесконечное множество событий можно аппроксимировать множеством, состоящим из конечного их числа. В этом случае затруднить решение может только слишком большая размерность.

5. Выводы

1. Методы декомпозиции двухэтапных стохастических оптимизационных задач могут оказаться ценными как при решении числовых задач, так и при интерпретации хозяйственных механизмов.

2. Особенно перспективными методами решения кажутся методы, основанные на координации ценами, имеющими особенно сильное сепарирующее влияние. При их помощи можно было бы представить планы второго этапа в явном виде.

3. Впервые на основании декомпозиционных методов двухэтапных стохастических задач интерпретируются гибкие и определенно-гибкие цены, а также соответствующие лимиты. Впервые установлен принцип большей гибкости цен и лимитов по сравнению с гибкостью плана.

4. Дальнейшему исследованию подлежат более сложные принципы координации, например, комбинированное использование цен и лимитов, а также декомпозиция и координация поэтапных несепарабельных задач. Эти принципы были бы интересны прежде всего с точки зрения экономических интерпретаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rockafellar, R., Wets, R. Stochastic convex programming: Kuhn-Tucker conditions. — J. Mathem. Econom., 1975, v. 2, p. 349—370.
2. Garstka, S. An economic interpretation of stochastic programs. — Mathem. Programming, 1980, v. 18, N 1, p. 62—67.
3. Эннусте Ю. А. Принципы декомпозиционного анализа оптимального планирования. Таллин, 1976.
4. Ennuste, Ü. A theory of decomposed optimal planning. Tallinn, 1978.
5. Эннусте Ю. О некоторых возможностях совершенствования стохастического социально-экономического программирования. — Изв. АН ЭССР. Обществ. науки, 1980, № 1, с. 19—26.
6. Kall, P. Computational methods for solving two-stage stochastic linear programming problems. — J. Appl. Mathem. and Physics, 1979, v. 30, p. 261—271.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/XI 1980

Ü. ENNUSTE

STOHHASTILISE KAHESTAADIUMILISE OPTIMUMÜLESANDE DEKOMPONEERITUD LAHENDAMISE PÕHIMÕTTEID JA NENDE MAJANDUSLIKKE TÕLGENDUSI

Kahestaadiumiliste stohhastiliste optimumülesannete dekompositsioonimeetodid on lootustandvad nii arvülesannete lahendamiseks kui ka majandamismehhanismide interpreteerimiseks. Eriti häid võimalusi pakuvad hindadega koordineerimisel põhinevad meetodid nende suure separeeriva toime tõttu. Limiitidega koordineerimine näib olevat vähem hõlpus. Uudsena on õnnestunud interpreteerida paindlikhindu ja kindel-paindlikhindu ning samasuguseid limiite. Niisamuti uudsena on püstitatud printsiip, et koordineerimise paindlikkus peab ületama plaani paindlikkuse.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
18. XI 1980

Ü. ENNUSTE

SOME PRINCIPLES AND ECONOMIC INTERPRETATION OF DECOMPOSED SOLUTION OF STOCHASTIC TWO-STAGE OPTIMUM PROBLEM

Principles of stage-wise decomposition of stochastic two-stage economic optimum problems where co-ordination is conducted by means of prices and limits, are treated. Possibilities of applying these principles for solving numerical problems are elucidated, and their economic interpretations presented.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
Nov. 18, 1980