EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1978, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1978, № 3

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1978.3.04

*М. КОРЧЕМКИН*

# МЕТОД РЕШЕНИЯ ПО ЧАСТЯМ ОДНОГО ВИДА ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

В настоящей работе предлагается метод решения транспортных задач большой размерности при малом числе источников ресурса. Разработанный алгоритм решения включает в себя некоторые элементы метода Крона [1] и алгоритма определения потока минимальной стоимости в транспортной сети [2]. Задача поставлена в следующем виде.

Пусть задана транспортная сеть $Q$, состоящая из $m$ узлов-источников ресурса, $n$ узлов-потребителей и $mn$ направленных дуг, связывающих источники с потребителями. В каждом $i$-м источнике задано предложение ресурса в размере $a_i$ $(i=1,\ldots,m)$; в каждом $j$-м узле-потребителе задана потребность в этом ресурсе, равная $b_j$ $(j=1,\ldots,n)$. Каждой дуге $(ij)$ поставлено в соответствие значение затрат на транспортировку единицы ресурса по ней — $c_{ij}(c_{ij}\geqslant 0)$. Предполагается, что число источников значительно меньше числа потребителей $(m\ll n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i=\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.[1]

Требуется решить транспортную задачу линейного программирования: минимизировать $z$,

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,\ \ldots,\ m); \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,\ \ldots,\ n); \tag{3}$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Для решения этой задачи разложим транспортную сеть $Q$ на $m$ изолированных подсетей $Q_i$ с одним источником ресурса (узлом $i$) в каждой и сеть $Q^{\text{п}}$, содержащую дуги, которые не принадлежат $Q_i\,(i=1,\ldots,m)$,

$$Q=Q_1\cup Q_2\cup\ldots\cup Q_m\cup Q^{\text{п}}.$$

Расчленение проведем так, чтобы в каждой подсети $Q_i$ было приблизительно $n/m$ узлов-потребителей.

---

[1] Если это равенство не выполняется, то в сеть следует включить фиктивный источник (или потребитель).

Основная идея излагаемого ниже метода заключается в решении простых задач распределения одного ресурса на полученных подсетях $Q_i$ и транспортной задачи меньшей размерности на сети $Q^{п}$. После решения этих задач определенным образом находятся циклы отрицательной стоимости [3, с. 200], которые ликвидируются путем изменения принадлежности узлов-потребителей некоторым подсетям $Q_i$. В результате неоднократного решения малых задач и перестановки узлов получается оптимальное решение.

Общий шаг алгоритма заключается в выполнении следующих действий.

1. Найдем некоторое допустимое решение задачи (1)—(4). С этой целью для каждой подсети $Q_i$ $(i=1,\ldots,m)$ проверим выполнение неравенства

$$a_i \leqslant \sum_{j \in Q_i} b_j. \tag{5}$$

Обозначим через $Q^\circ$ множество, состоящее из $t$ подсетей $Q^\circ_v$, для которых это неравенство выполняется, и через $Q^*$ — множество из $(m-t)$ подсетей $Q^*_w$, для которых оно не выполняется.[2]

Для каждой подсети $Q^\circ_v$ $(Q^\circ_v \in Q^\circ)$ с источником $v$ решим простейшую задачу.

Минимизировать $$\bar{z}_v = \sum_{j \in Q^\circ_v} c_{vj} x_{vj} \tag{6}$$

при условиях:

$$\sum_{j \in Q^\circ_v} x_{vj} = a_v, \tag{7}$$

$$x_{vj} \leqslant b_j \quad (j \in Q^\circ_v). \tag{8}$$

Для каждой подсети $Q^*_w$ $(Q^*_w \in Q^*)$ с источником $w$ положим $\bar{z}_w = \sum_{j \in Q^*_w} c_{wj} b_j$, т. е. $x_{wj} = b_j$ для всех $j$ $(j \in Q^*_w)$. Определим новое значение объема ресурса $a^*_w$ в источнике $w$: $a^*_w = a_w - \sum_{j \in Q^*_w} b_j$.

После решений задачи (6)—(8) в подсетях $Q^\circ_v$ останутся частично или полностью неудовлетворенными потребности некоторых узлов-потребителей. Обозначим множество всех таких узлов через $B$, а значения потребности в каждом из них — через $b^*_j$ $(j \in B)$.

Рассмотрим теперь часть сети $Q^{п}$, состоящую из узлов-источников $w$, принадлежащих $Q^*$, узлов-потребителей $j$, принадлежащих $B$, и связывающих их дуг. Решим транспортную задачу.

Минимизировать $$\bar{\bar{z}} = \sum_{w \in Q^*} \sum_{j \in B} c_{wj} x_{wj} \tag{9}$$

при условиях:

$$\sum_{j \in B} x_{wj} = a^*_w \quad (w \in Q^*), \tag{10}$$

---

[2] Случай $a_i = \sum_{j \in Q_i} b_j$ для всех $i$ $(i=1,\ldots,m)$ можно не рассматривать, поскольку расчленение сети всегда можно произвести так, чтобы (5) выполнялось, по крайней мере, для одного $i$.

$$\sum_{w \in Q^*} x_{wj} = b_j^* \quad (j \in B), \tag{11}$$

$$x_{wj} \geqslant 0 \quad (w \in Q^*,\ j \in B). \tag{12}$$

Эта задача, естественно, будет иметь гораздо меньшую размерность, чем задача (1)—(4).

В результате решения задач (6)—(8) и (9)—(12) для некоторых дуг $(ij)$ значение $x_{ij}$ может оказаться равным $b_j$. Кроме того, $x_{ij}=b_j$ для всех подсетей $Q_w^*$ из множества $Q^*$. Предположим, что пропускная способность каждой дуги $(ij)$, входящей в узел-потребитель $j$, ограничена размером потребности $b_j$ этого узла, и назовем дуги, для которых $x_{ij}=b_j$, заполненными.[3]

Перейдем к выполнению п. 2.

2. Найдем цикл наибольшей по модулю отрицательной стоимости, включающий по одной дуге из двух подсетей $Q_i$ и две дуги из сети $Q^{\text{п}}$. Будем называть циклы такого вида отрицательными циклами между подсетями $Q_i$. Из алгоритма Клейна [2] следует, что направленность дуг из подсетей $Q_i$ в отрицательном цикле может быть только от потребителя к источнику и дуг из $Q^{\text{п}}$ — от источника одной подсети к потребителю другой. Отметим, что при нахождении отрицательных циклов необходимо исключить из рассмотрения дуги $(ij)$, где $i \in Q^*$, $j \in B$, оказавшиеся заполненными в результате решения задачи (9)—(12).

Для нахождения отрицательных циклов определим $u$ пар векторов $f^{(h)}$ и $g^{(h)} (h=1, \ldots, u)$ по следующим правилам: если $p$ и $q$ узлы-источники и $p \in Q_p^\circ$ (или $p \in Q_p^*$), $q \in Q_q^\circ$ (или $q \in Q_q^*$), то

$$\left.\begin{aligned} f_r^{(h)} &= c_{pr} - c_{qr} \quad \text{для} \quad r \in Q_q^\circ \quad (\text{или} \quad r \in Q_q^*) \quad \text{и} \\ g_s^{(h)} &= c_{qs} - c_{ps} \quad \text{для} \quad s \in Q_p^\circ \quad (\text{или} \quad S \in Q_p^*). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Число элементов векторов $f^{(h)}$ и $g^{(h)}$ равно числу узлов-потребителей в соответствующих подсетях. Число $u$ пар векторов определяется так:

$$u = C_2^m = \frac{m^2 - m}{2}.$$

В выражении (13) для дуг $(pr)$ и $(qs)$, заполненных в результате решения задачи (9)—(12), следует принять $c_{pr} = +\infty$ и $c_{qs} = +\infty$.

Найдем суммы минимальных элементов каждой пары векторов $f^{(h)}$ и $g^{(h)} (h=1, \ldots, u)$ и определим наименьшую из них, т. е. найдем $d$,

$$d = \min_h \left(\min_r \{f_r^{(h)}\} + \min_s \{g_s^{(h)}\}\right). \tag{14}$$

Если $d \geqslant 0$, то отрицательных циклов между подсетями нет. Перейдем к выполнению п. 4.

Если $d < 0$, выполним п. 3.

3. Рассмотрим найденный отрицательный цикл. Его можно определить из минимальных значений векторов $f^{(h)}$ и $g^{(h)}$ в выражении (14), которым соответствуют некоторые пары узлов $k$ и $\varrho$ $(k \in Q_k, \varrho \in Q_k)$ и $l$ и $\nu (l \in Q_l, \nu \in Q_l)$, где узлы $k$ и $l$ — источники, а $\varrho$ и $\nu$ — потребители. Отрицательный цикл будет включать следующие дуги: $(k\nu)$, $(\nu l)$, $(l\varrho)$ и $(\varrho k)$. Для того, чтобы ликвидировать этот отрицательный цикл, перенесем

[3] Назовем дугу заполненной и в том случае, когда $x_{ij}=a_i$ при $a_i < b_j$.

узел $\varrho$ в подсеть $Q_l$, а узел $\nu$ — в подсеть $Q_k$. Таким образом, подсети $Q_k$ и $Q_l$ будут содержать новые узлы-потребители — $\nu$ и $\varrho$ и, соответственно, дуги $(k\nu)$ и $(l\varrho)$. Дуги $(k\varrho)$ и $(l\nu)$ будут теперь входить в сеть $Q^{\text{п}}$.

Проверим выполнение неравенства (5) для измененных подсетей $Q_k$ и $Q_l$. Если хотя бы для одной из этих подсетей неравенство будет выполняться не так, как в п. 1, то перейдем к выполнению п. 1.

Если же $Q_k$ и $Q_l$ не изменяет своей, ранее определенной, принадлежности к множествам $Q^\circ$ или $Q^*$, то выполним еще раз (14) и п. 3, исключив из рассмотрения элементы векторов $f^{(h)}$ и $g^{(h)}$, которым соответствуют узлы $\varrho$ и $\nu$.

Перейдем к выполнению п. 1.

4. Найдем отрицательные циклы, включающие два узла-потребителя из одной подсети. Такие циклы могут быть образованы только парой узлов-потребителей и источником из любой подсети $Q^\circ_v$, источником из некоторой подсети $Q^*_w$ и связывающими их дугами.

Рассмотрим дуги $(kj)$, связывающие некоторый источник $k$ $(k \in Q^*_h)$ с узлами-потребителями $j$ произвольной подсети $Q^\circ_l$ и имеющие в полученном ранее допустимом решении значения $x_{kj} > 0$. Если таких дуг нет, то перейдем к выполнению п. 4 для другой пары подсетей из $Q^\circ$ и $Q^*$. Если же они существуют, то найдем узел-потребитель $\varrho\,(\varrho \in Q^\circ_l)$, такой, что

$$c_{l\varrho} - c_{k\varrho} = \min_{j \in Q^\circ_l} (c_{lj} - c_{kj}) \quad \text{при} \quad x_{kj} > 0. \tag{15}$$

Выберем также узел $\nu\,(\nu \neq \varrho,\ \ \nu \in Q^\circ_l)$ такой, что

$$c_{k\nu} - c_{l\nu} = \min_{j \in Q^\circ_l} (c_{kj} - c_{lj}), \tag{16}$$

причем, если $x_{kj} = b_j$, то $c_{kj} = +\infty$.

Если сумма (15) и (16) будет не отрицательна, то выполним п. 4 для другой пары подсетей.

Обратное означает, что существует отрицательный цикл, состоящий из дуг $(l\varrho)$, $(\varrho k)$, $(k\nu)$ и $(\nu l)$. Определим новые значения потоков, которые следует пропустить по этим дугам, чтобы ликвидировать отрицательный цикл:

$$x'_{l\varrho} = x_{l\varrho} + \Delta x, \quad x'_{k\varrho} = x_{k\varrho} - \Delta x,$$

$$x'_{k\nu} = x_{k\nu} + \Delta x, \quad x'_{l\nu} = x_{l\nu} - \Delta x,$$

где $\Delta x = \min(x_{l\varrho}, x_{k\varrho}, x_{k\nu}, x_{l\nu})$, $\Delta x > 0$.

Новые значения транспортных затрат в подсети $Q^\circ_l$ и сети $Q^{\text{п}}$ будут составлять:

$$\bar{z}'_l = \bar{z}_l + \Delta x (c_{l\varrho} - c_{l\nu}),$$

$$\bar{\bar{z}}' = \bar{\bar{z}} + \Delta x (c_{k\nu} - c_{k\varrho}).$$

Обозначим затраты $\bar{z}'_l$ и $\bar{\bar{z}}'$ через $\bar{z}_l$ и $\bar{\bar{z}}$, соответственно, и выполним настоящее действие еще раз для той же самой пары подсетей — $Q^\circ_l$ и $Q^*_k$.

После ликвидации отрицательных циклов во всех возможных $t(m-t)$ парах подсетей, что, очевидно, не влияет на преобразования, проведенные в п. 3, мы получим схему потока в транспортной сети $Q$ без отрицательных циклов. Это решение будет оптимальным, что следует из основной теоремы в теории потоков минимальной стоимости [3, с. 214—215]. Минимальное значение затрат (1) будет равно

$$z=\sum_{i=1}^{m}\bar{z}_i+\bar{\bar{z}}.$$

Разработанный метод рекомендуется применять для решения задач с сильно «вытянутой» матрицей затрат. Как следует из описания алгоритма, на каждом шаге, за исключением последнего, число проверяемых массивов не превосходит значения $\frac{m^2-m}{2}$. Поэтому наиболее эффективно использование алгоритма для задач со значениями $m$ до 10.

Алгоритм позволяет решать большие задачи на ЭВМ с малым объемом оперативной памяти, поскольку для выполнения каждого действия необходимо оперировать не более, чем с $n$ элементами.

По мнению автора, определенный интерес представляет изучение возможности решения предложенным методом задач частично-целочисленного программирования, вида:

минимизировать $z=\sum_{i\in M}\sum_{j\in N}c_{ij}x_{ij}$

при условиях:

$$x_{ij}\geqslant 0,$$

$$\sum_{j\in N}x_{ij}\leqslant a_i\quad (i\in M),$$

$$\sum_{i\in M}x_{ij}=b_j\quad (j\in N),$$

$$x_{ij}=\begin{cases} b_j,\\ 0\quad (i\in M'\subset M,\ j\in N).\end{cases}$$

Здесь $N$ — множество потребителей, $M$ — множество источников ресурсов, $M'(M'\subset M)$ — подмножество источников ресурсов, потребление которых несовместимо с потреблением ресурсов другого вида.

Примером такой задачи может служить задача оптимизации распределения разных видов топлива (уголь, мазут, газ). Для потребления газа и мазута могут использоваться однотипные установки, а для угля требуется установка другого вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. М., 1972.
2. Klein, M. A primal method for minimal cost flows. — Management Science, 1967, v. 14, N 3, c. 205—220.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., 1974.

*Институт экономики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
29/XII 1977

*M. KORTŠEMKIN*

**MEETOD TEATUD TÜÜPI TRANSPORDIÜLESANNETE OSITI LAHENDAMISEKS**

*Resümee*

On kirjeldatud transpordiülesannete lahendamist juhul, kui ressursside arv $m$ on tunduvalt väiksem tarbijate arvust $n$. Esitatud meetod põhineb transpordivõrgu jaotamisel $m$ ühisosata allvõrguks. Igas sellises allvõrgus on üks ressurss ja ligikaudu $n/m$ tarbijat. Lahendusalgoritmi samm seisneb (a) ühe ressursi jaotamises igas allvõrgus ja (b) väiksemate mõõtmetega transpordiülesande lahendamises. Lahendusalgoritmi sammu läbimisel viiakse mõningad tarbijad ja kaared ühest allvõrgust teise. Algoritmi rakendatakse optimaalse lahendi leidmiseni.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia*
*Majanduse Instituut*

Toimetusse saabunud
29. XII 1977

*M. KORCHEMKIN*

**DECOMPOSITION METHOD OF SOLVING A CERTAIN TYPE OF A TRANSPORTATION PROBLEM**

*Summary*

The paper deals with the transportation problem such that the number of resources $m$ is much less than the number of consumers $n$. The method of solving the problem is based on dividing the transportation network into $m$ isolated subnetworks so that each one includes one resource and about $n/m$ consumers. The principal step of the algorithm consists of (a) solving the simple problems of one resource allocation for each subnetwork, (b) solving the transportation problem on a smaller scale and (c) determining new subnetworks for including some customers and arcs. The process stops as soon as an optimal solution is gained.

*Academy of Sciences of the Estonian SSR,*
*Institute of Economics*

Received
Dec. 29, 1977