EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1978, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1978.2.01

Ю. ЭННУСТЕ

О ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ И ДИСПЕРСИЙ [1]

В статье ставятся некоторые задачи оптимального планирования на основе средних значений (математических ожиданий) и дисперсий данных. Сначала формулируются задачи с жестким планом, затем задачи с гибким планом и, наконец, приводятся замечания к задачам с жестко-гибким планом. Выясняется, что описанные задачи ближе к действительности, чем задачи, составленные с помощью только средних значений, хотя их решение значительно сложнее.

1. Вводные замечания

1. Полная информация о данных любой задачи планирования отсутствует. Для учета этого обстоятельства предположим, что данные в задаче — это случайные величины, и для упрощенного описания используем здесь только их средние значения (математические ожидания), дисперсии и коэффициенты корреляции. При этом информационное несовершенство данных выражают значения дисперсий. В случае полной информации они равнялись бы нулю.

С помощью названных параметров (среднее значение, дисперсия и коэффициент корреляции) поставим задачи двух типов: с жестким планом и с гибким планом. В первых дается полная информация о плане (у плана отсутствует дисперсия), а во вторых информация о плане лишь приблизительна, т. е. у плана есть дисперсия. По существу последний случай можно толковать таким образом, что точное значение плана устанавливается позже, сейчас же выясняется лишь среднее значение плана и возможно рассеивание или отклонение от него. Иными словами, этот случай можно толковать и как прогноз плана [1]. При этом выделим два подтипа задач; во-первых, гибкость плана не ограничена и, во-вторых, гибкость плана ограничена. Последний подтип назовем задачей с полугибким планом.

Естественно, что можно составить задачи, в которых комбинируются типы планов различной гибкости; представим некоторые замечания и по этим задачам.

2. Для введения приведем еще несколько правил вычисления средних значений и дисперсий сумм, а также произведений случайных величин. При этом используются следующие обозначения: α_j — случайная величина, E — оператор среднего значения, D — оператор дисперсии и r — коэффициент корреляции. Теперь:

[1] Автор пользуется возможностью поблагодарить канд. физ.-мат. наук Т. Тобиаса за ценные замечания.

$$E\sum\alpha_j=\sum E\alpha_j, \tag{1}$$

$$D\sum\alpha_j=\sum D\alpha_j+2\sum_{k<j}r_{kj}\sqrt{D\alpha_k D\alpha_j}, \tag{2}$$

$$E\alpha_k\alpha_j=E\alpha_k E\alpha_j+r_{kj}\sqrt{D\alpha_k D\alpha_j}, \tag{3}$$

$$D\alpha_k\alpha_j=(1+r_{kj}^2)D\alpha_k D\alpha_j+(E\alpha_k)^2 D\alpha_j+$$
$$+(E\alpha_j)^2 D\alpha_k+2r_{kj}E\alpha_k E\alpha_j\sqrt{D\alpha_k D\alpha_j}. \tag{4}$$

Выражения (1)—(3) общеизвестны. Выражение (4) любезно вывел по просьбе автора Т. Тобиас.

2. Задача с жестким планом

1. Пусть жесткий план описывается детерминированным вектором $x=(x_j)$, $j\in N=\{1,\ldots,n\}$. С планом пусть будет связано множество результатов (расходы-доходы) $M=\{1,\ldots,m\}$. Значение результата $i\in M$, ζ_i, пусть зависит линейно от плана: $\zeta_i=\sum_j\alpha_{ij}x_j$, где α_{ij} — случайная величина.

Каждый случайный результат ζ_i, $i\in M$ должен с заданной достоверностью быть не меньше заданного ограничения β_i, где β_i — независимая от ζ_i случайная величина. Последнее условие запишем здесь с помощью средних значений и дисперсий:

$$E\sum_j\alpha_{ij}x_j-qD\sum_j\alpha_{ij}x_j\geqslant E\beta_i+qD\beta_i,\quad i\in M, \tag{5}$$

где q — заданный коэффициент, определяющий степень достоверности выполнения условия $\zeta_i\geqslant\beta_i$. Вполне понятно, что для выражения вышеприведенного условия существуют и другие возможности.

Для более краткой записи выражения (5) введем следующие обозначения: $E\alpha_{ij}=a_{ij}$, $E\beta_i=b_i$, $D\alpha_{ij}=\sigma^2_{ij}$ и $D\beta_i=\sigma^2_{bi}$. Теперь, предположив, что α_{ij} — независимые, можно записать:

$$\sum_j a_{ij}x_j-q\sum_j\sigma^2_{ij}x^2_j\geqslant b_i+q\sigma^2_{bi}. \tag{6}$$

Мы видим, что по сравнению с аналогичным ограничением, которое учитывало бы только средние значения и имело бы вид $\sum_j a_{ij}x_j\geqslant b_i$, настоящее значительно осторожнее. Осторожность заключается в том, что всякое ограничение выполняется резервом $q(\sigma^2_{bi}+\sum_j\sigma^2_{ij}x^2_j)$. При этом величина резерва зависит не только от дисперсий параметров, но и от квадратичных значений плановых показателей.

2. При описании целевой функции задачи с жестким планом исходим из линейного эффекта $\gamma=\sum\gamma_j x_j$, где γ_j — случайная величина. На основе полученного случайного эффекта γ для составления целевой функции исходим из неоклассической теории риска и записываем:

$$E\sum\gamma_j x_j-pD\sum\gamma_j x_j\to\max, \tag{7}$$

где p — цена риска, которая задана.

Чтобы переписать выражение (7), введем следующие обозначения: $E\gamma_j=c_j$, $D\gamma_j=\sigma^2_{cj}$. Теперь, предполагая, что γ_j независимы, (7) можно записать следующим образом:

$$\sum c_j x_j - p \sum \sigma^2_{cj} x^2_j \to \max. \tag{8}$$

Мы видим, что на основе выбранной целевой функции нужно особенно осторожно увеличивать значения тех плановых показателей, которые связаны с большой дисперсией эффекта (велика $\sigma^2{}_{cj}$).

3. В итоге задача с жестким планом имеет следующий вид:

$$\max \sum_j (c_j - p\sigma^2_{cj} x_j) x_j \Big\} \sum_j (a_{ij} - q\sigma^2_{ij} x_j) x_j \geqslant b_i + q\sigma^2_i, \quad i \in M. \tag{9}$$

Эта задача содержит квадратичные члены плановых показателей как в целевой функции, так и в ограничениях.

В заключение эту задачу можно записать с помощью обычных символов. Для этого обозначим $p_j \sigma^2_{cj} = \hat{c}_j$, $q\sigma^2_{ij} = \hat{a}_{ij}$ и $b_i + q\sigma^2_{bi} = \hat{b}_i$. Теперь получим:

$$\max \sum_j (c_j - \hat{c}_j x_j) x_j \Big\} \sum_j (a_{ij} - \hat{a}_{ij} x_j) x_j \geqslant \hat{b}_i, \tag{10}$$

$$i \in M.$$

3. Задача с гибким планом

1. Пусть гибкий план описывается случайным вектором $\xi = (\xi_j)$, $j \in N$, где координаты ξ_j — случайные величины. Здесь опишем этот план приблизительно лишь с помощью средних значений и дисперсий координат, которые обозначим следующим образом: $E\xi = \bar{x} = (\bar{x}_j)$ и $D\xi = \sigma^2 = (\sigma_j{}^2)$, $j \in N$.

Задачи с гибким планом поставим при следующих упрощающих предположениях: 1) число плановых показателей больше числа результатов: $n > m$, 2) дисперсии плановых показателей $k = m+1, \ldots, n$ заданы, 3) дисперсии планового показателя $i = 1, \ldots, m$ определимы так, что дисперсию показателя i определяет только ограничение i и 4) плановый показатель $i = 1, \ldots, m$ имеет параметр $\alpha_{ii} \equiv 1$.

Задачи с гибким планом разделим на два подтипа: 1) гибкость плана (искомые дисперсии) не ограничена и 2) гибкость плана ограничена. Последний назовем полугибким планом. Начнем с описания задач первого подтипа.

2. При постановке задач с планом неограниченной гибкости исходим из предположения балансирующей гибкости, т. е. задачей гибкости плана является уравновешивание возможного рассеивания результата.

Относительно среднего значения плана запишем следующее ограничивающее условие:

$$E \sum_j \alpha_{ij} \xi_j \geqslant E\beta_i, \quad i \in M, \tag{11}$$

из которого

$$\sum_j [a_{ij} \bar{x}_j + r_{ij} \sigma_{ij} \sigma_j] \geqslant b_i, \quad i \in M, \tag{12}$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции α_{ij} и ξ_j.

Относительно дисперсии планового показателя $i = 1, \ldots, m$ запишем следующее уравновешивающее условие:

$$D\xi_i = D\Big[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \alpha_{ik} \xi_k + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j + \beta_i\Big], \quad i \in M, \tag{13}$$

из которого при упрощающем предположении, что слагаемые независимы, на основе (4) получаем:

$$\sigma_i^2=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\left[(1+r_{ik}^2)\sigma_{ik}^2\sigma_k^2+a_{ik}^2\sigma_k^2+\bar{x}_k^2\sigma_{ik}^2+2r_{ik}\bar{x}_k a_{ik}\sigma_{ik}\sigma_k\right]+$$

$$+\sum_{j=m+1}^{n}\left[(1+r_{ij}^2)\sigma_{ij}^2\sigma_j^2+a_{ij}^2\sigma_j^2+\bar{x}_j^2\sigma_{ij}^2+2r_{ij}\bar{x}_j a_{ij}\sigma_{ij}\sigma_j\right]+\sigma_{bi}^2,\qquad i\in M,\tag{14}$$

где σ_j, $j=m+1,\ldots,n$ заданы.

Целевой функцией пусть будет среднее значение эффекта, где предположим, что γ_j и ξ_j независимы:

$$\sum c_j\bar{x}_j\to\max.\tag{15}$$

Теперь вся задача описана с помощью выражений (12), (14) и (15). Решением ее является среднее значение оптимального плана и такое рассеивание (дисперсия) плана, при котором всегда выполнимы условия ограничения.

Для обычного описания приведенных задач используем обозначения:

$$\sigma_j^2=y_j^2,\ r_{ij}\sigma_{ij}=g_{ij},\ \sigma_{ij}^2=d_{ij},\ (1+r_{ij}^2)=l_{ij},\ 2r_{ij}a_{ik}\sigma_{ik}=h_{ik},\ \sum_{j=m+1}^{n}[\ldots]+$$

$$+\sigma_{bi}^2=d_i.$$

Теперь задача (15) примет вид:

$$\max\sum c_j\bar{x}_j\left.\vphantom{\sum}\right\}\sum_j(a_{ij}\bar{x}_j+g_{ij}y_j)\geqslant b_i,\ y_i^2=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(l_{ik}d_{ik}y_k^2+$$

$$+a_{ij}^2y_k^2+d_{ik}\bar{x}_k^2+h_{ik}\bar{x}_k y_k)+d_i,\qquad i\in M.\tag{16}$$

3. Из задачи (16) легко вывести модель Леонтьева с гибким планом. Для этого предположим, что $m=n$ и a_{ij} — коэффициент Леонтьева. Теперь мы имеем столько же неизвестных, сколько ограничений, и в целевой функции нет необходимости (при предположении единственности решения). Тем самым получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned}&\bar{x}_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}(a_{ij}\bar{x}_j+g_{ij}y_j)+b_i,\qquad i\in M\\&y_i^2=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}(l_{ik}d_{ik}y_k^2+a_{ik}^2y_k^2+d_{ik}\bar{x}_k^2+h_{ik}\bar{x}_k y_k)+d_i,\qquad i\in M,\end{aligned}\right.\tag{17}$$

решение которой достаточно сложно.

Предположив, что $r_{ik}=0$, т. е. плановые показатели и коэффициенты затрат независимы, и обозначив $y_i^2=z_i$, на основе (17) получим две следующие системы уравнений:

$$\bar{x}_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}a_{ik}\bar{x}_k+b_i,\qquad i\in M.\tag{18}$$

$$z_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\left[(d_{ik}+a_{ik}^2)z_k+d_{ik}\bar{x}_k^2\right]+d_{bi},\qquad i\in M.\tag{19}$$

Решение их просто, потому что обе линейны. Решение первого уравнения — это среднее значение плана, с его помощью можно найти решение второго уравнения. Последнее представляет собой уравновешивающую гибкость вокруг среднего значения.

4. В случае полугибкого плана на искомые дисперсии его наложены дополнительные ограничения. Например, обеспечение дисперсии может потребовать определенных ресурсов и т. п. Упомянутые дополнительные ограничения могут быть связаны и со средними значениями плана. Предположим, что вследствие дополнительных ограничений плановая дисперсия становится меньше уравновешивающей дисперсии. Такой неуравновешенностью приведем в соответствие определенные потери, которые учтем в целевой функции.

На основе вышесказанного запишем ограничения задачи с полугибким планом следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_i (a_{ij}\bar{x}_j + g_{ij}y_j) \geqslant b_i, \qquad i \in M, \\ &\sum_j (u_{ej}\bar{x}_j + u_{ej}y_j) \leqslant u_e, \qquad e \in L, \end{aligned} \tag{20}$$

где $L = \{1, \ldots, s\}$ — множество дополнительных ограничений и u_e и u_{ej} заданы.

При образовании целевой функции, как отмечено выше, учитываются и потери, возникающие из неуравновешенности дисперсий. При этом предположим, что искомые дисперсии меньше, чем уравновешивающие. Теперь запишем целевую функцию в виде

$$\sum_j c_j\bar{x}_j + \sum_{i=1}^{m} r_i[y_i^2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} (l_{ik}y_k^2 + a_{ik}^2y_k^2 + d_{ik}\bar{x}_k^2 + h_{ik}\bar{x}_k y_k) - d_i], \tag{21}$$

где $r_i \geqslant 0$ — заданный коэффициент.

Таким образом ясно, что в задачах (20)—(21) можно выбирать большие средние значения плановых показателей и в таком случае также большие дисбалансы (меньшую гибкость) или, наоборот. Выбор зависит от значения параметров r_i или, иными словами, степени потерь, что связано с дисбалансами.

4. Замечания по поводу задач с комбинированным планом

1. Вполне понятно, что можно составлять задачи, содержащие планы с различной жесткостью. Представляется, что именно эти задачи наилучшим образом моделируют действительные процессы планирования и дают наиболее качественные планы [1].

Например, выделим в плановом периоде три стадии. Для первой стадии установим жесткий план, для второй — полугибкий и для третьей — гибкий. Решение такой задачи дает твердые предписания к деятельности на ближайшее время (первая стадия) и показывает, каким мог бы быть план второй стадии. При этом фиксирование последнего произойдет позже, когда будет получена дополнительная информация. В то же время выбор плана первой стадии определяет степень гибкости плана второй стадии. Третья стадия по времени еще далека и гибкость ее плана поначалу не ограничена. Однако среднее значение плана и заданные дисперсии испытывают влияние планов предыдущих стадий.

2. Математическое описание многостадийных задач с комбинированным планом технически довольно сложно и не входит в цели данной

статьи. О технической стороне задач заметим лишь следующее. План первой стадии определяет среднее значение плана второй стадии и области определения дисперсий. План же второй стадии влияет лишь на область определения средних значений плана третьей стадии и может определить также заданные дисперсии плановых показателей третьей стадии.

5. Заключительные замечания

1. Как мы видим, задачи планирования на основе средних значений и дисперсий ближе к задачам действительности, чем задачи только на основе средних значений. Планы становятся предусмотрительнее и появляется возможность учитывать гибкость планов.

Однако описанные задачи представляются достаточно сложными. Математическая сложность заключается в том, что они являются задачами квадратичного программирования, содержащими квадратичные члены как в целевой функции, так и в системе ограничений.

Информационная сложность возрастает в связи с тем, что в дополнение к средним значениям параметров необходимо оценить их дисперсии и коэффициенты корреляции. Особенно своеобразна оценка последних.

2. При постановке описанных выше задач применен ряд упрощающих предположений. Тем самым один из путей дальнейшего развития этой работы заключается в уменьшении упрощений. В качестве второго отметим следующую возможность. Описанные выше задачи поставлены, так сказать, непосредственно. Однако можно и вывести их. Для этого следует исходить из задачи оптимального планирования со стохастическими параметрами и попытаться вывести ее эквиваленты, выраженные с помощью средних значений, дисперсий и коэффициентов корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Эннусте, О принципе определенно-вероятного планирования, моделях и функционировании экономики. Изв. АН Эстонской ССР. Общественные науки, 1974, 1, 3—21.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/X 1977

Ü. ENNUSTE

OPTIMAALSE PLANEERIMISE KESKVÄÄRTUS-DISPERSIOONÜLESANNETEST

Resümee

Artiklis on esitatud mõningad andmete keskväärtuste ja dispersioonide alusel koostatud optimaalse planeerimise ülesanded: jäiga, paindliku ja jäikpaindliku plaaniga ülesanded. Selgub, et need lähendavad tegelikkust paremini kui ainult keskväärtuste alusel koostatud ülesanded, kuid nende lahendamine on oluliselt keerukam.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
11. X 1977

Ü. ENNUSTE

ON MEAN-VARIANCE PROBLEMS OF OPTIMAL PLANNING

Summary

The paper sets some optimal planning problems with the help of the mean values and variances of data. Firstly, problems with an inflexible plan are set, and then there follow problems with a flexible plan and, lastly, some remarks on problems with an inflexible-flexible plan. The paper reveals that the described problems approximate reality better than those compiled with the help of mean values alone; however, their solution is substantially more complicated.

Academy of Sciences of the Estonian SSR, Institute of Economics

Received Oct., 11, 1977