EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KOIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1976.2.03

М. КОРЧЕМКИН

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ АДДИТИВНОГО МЕТОДА БАЛАША

Работа посвящена решению задачи об отборе пунктов-потребителей разных видов взаимозаменяемых ресурсов и построении распределительной сети по критерию минимальности суммарных затрат в системе. Алгоритм, составленный для решения этой задачи, представляет собой интерпретацию аддитивного алгоритма Балаша для решения задач линейного программирования с переменными, принимающими значение 0 или 1 [1, 2]. Программа, реализующая этот алгоритм, составлена на алгоритмическом языке «МАЛГОЛ-73» для ЭВМ «Минск-22» и «Минск-32».

Пусть имеется три вида взаимозаменяемых ресурсов — Б, В и Г. Причем ресурс вида Б транспортируется от источника к потребителям по некоторой распределительной сети с узлами p_i, которым соответствуют точка начала сети (источник ресурса вида Б), промежуточные узлы и узлы-потребители $(i=1, \ldots, n)$. Источники ресурсов вида В и Г связаны с каждым потребителем одной дугой. Каждому из μ пунктов-потребителей p_i $(n-\mu<i\leqslant n)$ соответствуют три величины: предполагаемые объемы потребления ресурса вида Б — v_i, ресурса вида В — m_i и ресурса вида Г — u_i в пункте p_i (объем потребления ресурсов в пункте p_i может быть также задан одной величиной в условных единицах).* Степень связности рассматриваемой сети не высока, т. е. сеть состоит из менее чем $n(n-1)$ дуг. Затраты на транспортировку единицы Б-ресурса по дуге, соединяющей пункты p_i и p_j, выражает величина z_{ij}. Затраты на доставку единицы В- и Г-ресурсов в пункт p_i заданы величинами t_i и s_i соответственно. Потребление Б-ресурса всеми пунктами в сумме не должно превышать заданной величины $V1$, а общий объем потребления В-ресурса должен быть не больше фиксированной величины M. Для ускорения работы описанного ниже алгоритма введено ограничение снизу на суммарное потребление Б-ресурса — VS $(VS=V1-\max_i \{v_i\},\ i=1, \ldots, n)$. Потребление Г-ресурса не ограничено. Стоимости использования (производства) ресурсов включены в соответствующие значения затрат на входящих в узлы-потребители (выходящих из узлов-источников) дугах. При этих условиях требуется определить пункты потребления Б-ресурса, построить Б-распределительную сеть и найти пункты потребления В- и Г-ресурсов таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты на использование этих видов ресурсов в пунктах их потребления.

Перейдем к формальному описанию задачи.

---

* В дальнейшем ресурсы видов Б, В и Г называются Б-, В- и Г-ресурсами.

Объемы потребления Б-, В- и Г-ресурсов в точке начала распределительной сети (p_1) и в промежуточных точках приняты равными 0: $v_1=v_2=\ldots=v_{n-\mu}=0$; $m_1=m_2=\ldots=m_{n-\mu}=0$; $u_1=u_2=\ldots=u_{n-\mu}=0$.

Обозначим все множество пунктов через N^0, $N^0=\{p_1,\ldots,p_n\}$, а множество всех возможных дуг Б-распределительной сети — через A. Тогда задачу можно сформулировать так: имеется неориентированный граф $L=[N^0, A]$, на множестве вершин которого заданы величины $v_i\geqslant 0$, $m_i\geqslant 0$, $u_i\geqslant 0$; на множестве ребер задана величина z_{ij}; требуется определить: 1) множество узлов Б-распределительной сети — $N^Б$; 2) множество пунктов потребления В-ресурса — $N^В$; 3) множество пунктов потребления Г-ресурса — $N^Г$; 4) множество дуг, составляющих искомую Б-распределительную сеть, — $A^Б$ и 5) связный граф $L^*=[N^Б, A^Б]$, который минимизирует

$$\sum_{ij\in A^Б} z_{ij}w_{ij}+\sum_{p_i\in N^В} t_i m_i+\sum_{p_i\in N^Г} s_i u_i \tag{1}$$

при ограничениях

$$N^Б\cup N^В\cup N^Г=N^0; \tag{2}$$

$$p_1\in N^Б\subset N^0; \tag{3}$$

$$A^Б\subset A; \tag{4}$$

$$VS\leqslant\sum_{p_i\in N^Б} v_i\leqslant V1; \tag{5}$$

$$\sum_{p_i\in N^В} m_i\leqslant M. \tag{6}$$

Здесь w_{ij} — количество Б-ресурса, транспортируемого по дуге ij; (2) указывает, что один из трех видов ресурсов удовлетворяет потребности каждого пункта $p_i(i=n-\mu+1,\ldots,n)$; (5) — ограничение на суммарное потребление Б-ресурса с условием полного использования его; (6) — ограничение на суммарное потребление В-ресурса.

Очевидно, справедливо следующее утверждение: если граф $L^*=[N^Б, A^Б]$ — решение задачи (1)—(6), то решением будет и $[N^Б, T(N^Б)]$ — дерево минимальной (в смысле затрат z_{ij}) длины, покрывающее множество вершин $N^Б$ и имеющее дуги из $A^Б$.** Действительно, так как L^* и $[N^Б, T(N^Б)]$ имеют одно и то же множество вершин $N^Б$, то значения $\sum\limits_{p_i\in N^В} t_i m_i+\sum\limits_{p_i\in N^Г} s_i u_i$ целевых функций у них совпадают, а первый член целевой функции для минимального дерева $[N^Б, T(N^Б)]$ не больше, чем для L^*. Ограничение (3) выполнено; левые части ограничения (5) совпадают; так как $T(N^Б)\subset A^Б$, то ограничение (4) выполнено, а на ограничения (2) и (6) данное утверждение не влияет. Тогда для решения задачи (1)—(6) нужно определить множества $N^Б$ и $N^В$, которые минимизируют (1) при ограничениях (2)—(6).

Приведем эту задачу к более удобной для описания алгоритма форме. С этой целью каждому множеству $\overline{N}^Б\subset N^0$ поставим в соответствие n-мерный вектор G по следующему правилу:

** О возможности построения дерева, эквивалентного заданной сети по потокам, см. [3, стр. 177—179].

$$g_i = \begin{cases} 1, \text{ если } p_i \in \overline{N^Б}, \\ 0, \text{ в противном случае; } i=1, \ldots, n. \end{cases}$$

Таким же образом с $\overline{N^В}$ и $\overline{N^Г}$ сопоставим n-мерные векторы F и H:

$$f_i = \begin{cases} 1, \text{ если } p_i \in \overline{N^В}, \\ 0, \text{ в противном случае; } \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} 1, \text{ если } g_i \wedge f_i = 0, \\ 0, \text{ если } g_i \vee f_i = 1. \end{cases}$$

Используя принятые обозначения, задачу запишем в следующем виде:
минимизировать

$$\sum_{ij \in A^Б(G)} z_{ij} w_{ij} + \sum_{i=1}^{n} t_i m_i f_i + \sum_{i=1}^{n} s_i u_i h_i \tag{7}$$

при ограничениях

$$g_i = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad i=1, \ldots, n; \tag{8}$$

$$f_i = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad i=1, \ldots, n; \tag{9}$$

$$h_i = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad i=1, \ldots, n; \tag{10}$$

$$G+F+H = (1, 1, \ldots, 1); \tag{11}$$

$$VS \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i g_i \leqslant V1; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i f_i \leqslant M; \tag{13}$$

$$v_i \geqslant 0, \quad m_i \geqslant 0, \quad u_i \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{14}$$

Здесь $A^Б(G)$ означает, что в искомое дерево Б-распределительной сети входят дуги, инцидентные тем точкам p_i и p_j, для которых $g_i = g_j = 1$. Первый член целевой функции вычисляется после построения минимального дерева (см. ниже).

Поскольку в работе используется метод, предложенный Е. Балашем [1, 2], в следующих определениях будем придерживаться терминологии автора. Планом распределения Б-ресурса (или Б-планом) назовем любой n-мерный вектор X, удовлетворяющий условиям (7)—(14). Вектор $Q = (q_1, \ldots, q_m)$, $m \leqslant n$, назовем псевдопланом ранга m, если $q_m = 0$. Каждый псевдоплан Q ранга m порождает некоторое (возможно, пустое) подмножество планов $P(Q)$, у которых первые m компоненты совпадают с Q: $P(Q) = \{X : x_i = q_i,\ i=1, \ldots, m;\ X \text{ удовлетворяет (8), (12)}\}$.

Поставим в соответствие псевдоплану Q два n-мерных вектора $\overline{Q}=(q_1, \ldots, q_m, 0, \ldots, 0)$; $\overline{\overline{Q}}=(q_1, \ldots, q_m, 1, \ldots, 1)$. Обратим внимание на следующее: если псевдоплан Q имеет ранг m, $P(Q)\neq\varnothing$, то для любого $X\in P(Q)$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{q}_i, \ \bar{q}_i \in \overline{Q}. \tag{15}$$

Справедливость этого неравенства очевидна.

Основной алгоритм решения задачи (7)—(14) построен с использованием метода ветвей и границ [4], а также некоторых элементов аддитивного алгоритма Балаша [1, 2]. Он включает в качестве процедур следующие вспомогательные алгоритмы.

1. Алгоритм построения дерева минимальной длины. Пусть в виде пар точек линейно задан набор дуг, предлагаемых для построения Б-распределительной сети, и задан вектор затрат Z на транспортировку единицы Б-ресурса по соответствующим дугам. Требуется построить дерево минимальной длины, связывающее все возможные пункты p_i ($i=1, \ldots, n$).

На нулевом шаге алгоритма находим в векторе затрат Z минимальный элемент z_{ij} и определяем дугу, на которой эти минимальные затраты заданы.

1-й шаг. Находим третью точку минимального дерева (или вторую его дугу) путем сравнения затрат на транспортировку единицы Б-ресурса от каждого возможного пункта до найденных выше пунктов p_i и p_j и выбора наименьшего значения.

2-й шаг. Сравним величины затрат на транспортировку от каждого возможного пункта до каждой из трех найденных точек; выберем наименьшую из этих величин и таким образом определим четвертую точку минимального дерева (или третью дугу) и т. д.

Последним считается тот шаг алгоритма, после выполнения которого все возможные точки будут связаны дугами минимального дерева.

2. Алгоритм определения потоков используется для нахождения количества Б-ресурса, транспортируемого по дугам построенного минимального дерева. Основной шаг алгоритма состоит в следующем:

I. Определим висячие точки минимального дерева (начальная точка p_1 не учитывается). Эти точки могут встретиться в описании минимального дерева только один раз, так как они инцидентны единственным дугам.

II. Определим висячие дуги и положим количество Б-ресурса, транспортируемого по ним, равным потреблению в висячих точках.

III. Прибавим объемы потребления Б-ресурса в висячих точках к объемам потребления Б-ресурса в связанных с ними промежуточных точках.

IV. «Оторвем» висячие дуги от дерева, т. е. исключим их из его описания.

Теперь у нас есть новые висячие точки нового дерева с потреблением Б-ресурса в них, увеличенным на значение потребления в предыдущих «оторванных» висячих точках. Переходим вновь к выполнению п. I.

Последним считается тот шаг алгоритма, после выполнения которого получится тривиальное дерево, состоящее только из начальной точки p_i (корня дерева).

3. Алгоритм выделения простых цепей применяется для подсчета величин затрат на транспортировку единицы Б-ресурса от

точки p_1 в каждую висячую точку построенного минимального дерева. Дерево Б-распределительной сети представляется в виде суммы простых цепей, связывающих его корень с каждой висячей точкой. В результате выполнения алгоритма всем простым цепям ставятся в соответствие величины суммарных затрат на транспортировку единицы Б-ресурса к их концевым точкам.

На нулевом шаге алгоритма «отрываем» от минимального дерева висячие точки и инцидентные им дуги. Выполняем основной шаг:

I. Определим новые висячие точки и инцидентные им дуги. Прибавим величины затрат на этих дугах к соответствующим значениям затрат на транспортировку по дугам, «оторванным» на предыдущем шаге.

II. «Оторвем» новые висячие точки и инцидентные им дуги. Выполним п. I.

Последним шагом алгоритма считается тот, после выполнения которого получится дерево, состоящее из начальной точки p_1 и пунктов-потребителей Б-ресурса p_i $(i=n-\mu+1, \ldots, n)$, связанных с ней дугами, на которых заданы соответствующие полные затраты на транспортировку единицы Б-ресурса от p_1 к p_i.

Перейдем к описанию основного алгоритма.

Обозначим через C нижнюю границу целевой функции (7) на множестве планов (8)—(14), D — нижнюю границу первого слагаемого целевой функции и G — план, на котором достигается D. С помощью алгоритмов, описанных выше, построим минимальное дерево, включающее все n точек, и определим затраты на транспортировку единицы Б-ресурса к каждому потребителю $p_i (i=n-\mu+1, \ldots, n)$.

Будем считать, что доминирующим в целевой функции (7) является первое слагаемое. Поэтому прежде всего определяются Б-планы, а планы снабжения В- и Г-ресурсами вычисляются после определения первых.

0-й шаг. Если $X=(1, 1, \ldots, 1)$ — Б-план, то в силу условия (15) он есть решение задачи (таким образом, $N^{Б}=(1, 1, \ldots, 1)$, $N^{В}=(0, 0, \ldots, 0)$ и $N^{Г}=(0, 0, \ldots, 0)$). Если X не является Б-планом, то образуем μ псевдопланов $Q^{1,s}$, $s=1, \ldots, \mu$, по следующему правилу:

$$q_i^{1,s}=\begin{cases} 0, & \text{если } i=s, \\ 1, & \text{в остальных случаях, } i=1, \ldots, s. \end{cases}$$

Так как единичный вектор не является Б-планом, то любой Б-план содержит нулевые компоненты. Первый из них может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на μ-м. Следовательно, $\bigcup_{s=1}^{\mu} P(Q^{1,s})$ содержит все Б-планы задачи.

k-й шаг $(k \geqslant 1)$. Общий шаг алгоритма состоит в исключении подмножеств либо заведомо пустых, либо имеющих неудовлетворительные оценки целевой функции и, если исключены не все подмножества, в разбивке по определенному правилу (ветвлении) одного из оставшихся подмножеств на несколько новых. Пусть на шаге $k-1$ получены подмножества

$$P(Q^{k,1}), \ldots, P(Q^{k,s(k)}).$$

I. Исключаем из дальнейшего рассмотрения подмножества $P(Q^{k,\nu})$, для которых $\sum_{i=1}^{n} v_i \bar{q}_i^{k,\nu} > V1$. В силу оценки (15) эти подмножества пусты.

II. Исключаем подмножества $P(Q^{k,\nu})$, для которых $\sum_{i=1}^{n} v_i \bar{\bar{q}}_i^{k,\nu} < VS$. Исключение правомерно в силу ограничения (12).

III. Исключаем также подмножества $P(Q^{k,\nu})$, для которых $\bar{\bar{Q}} \in \in P(Q^{k,\nu})$, т. е. $\bar{\bar{Q}}^{k,\nu}$ является Б-планом. При этом для пунктов, не вошедших в Б-план, выбираем по признаку минимальности затрат один из двух оставшихся видов ресурсов В или Г, проверяя общее количество потребляемого В-ресурса на ограничение (13). Находим нижнюю оценку целевой функции (7). Запоминаем полученные плановые векторы: $G = \bar{\bar{Q}}^{k,\nu}$, F и H.

IV. Запоминаем и те подмножества $P(Q^{k,\nu})$, для которых значение первого слагаемого целевой функции (7) при Б-плане $\bar{\bar{Q}}^{k,\nu}$ до $\delta\%$ больше минимального. Находим планы снабжения В- и Г-ресурсами аналогично п. III.

Если на некотором шаге алгоритма после выполнения п. I—IV исключены все подмножества, то G — оптимальный Б-план, F — план снабжения В-ресурсом и H — план снабжения Г-ресурсом. Также получены Б-планы, значения D для которых отличаются от минимального не более чем на $\delta\%$, и соответствующие планы снабжения В- и Г-ресурсами. Если же после выполнения п. I—IV остались подмножества

$$P(Q^{k,1}),\ \ldots,\ P(Q^{k,s'(k)}),$$

выполняем п. V.

V. Подмножество $P(Q^{k,T})$, подлежащее дальнейшему ветвлению, определяем из условия

$$\sum_{ij \in A^{Б}(\bar{\bar{Q}}^{k,T})} w_{ij} z_{ij} = \min_{\nu=1,\ldots,s'(k)} \left(\sum_{ij \in A^{Б}(\bar{\bar{Q}}^{k,\nu})} w_{ij} z_{ij} \right).$$

Пусть T выбрано, и ранг псевдоплана $Q^{k,T}$ равен $\mu - r$. Образуем r псевдопланов $Q^{k,T,\nu}$, $\nu = 1, \ldots, r$, по следующему правилу:

$$q_i^{k,T,\nu} = \begin{cases} \bar{\bar{q}}_i^{k,T}, & \text{если } i \leqslant \mu - r, \\ 0, & \text{если } i = \mu - r + \nu, \\ 1, & \text{в остальных случаях; } i = 1, \ldots, \mu - r + \nu. \end{cases}$$

Так как вектор $\bar{\bar{Q}}^{k,T}$ не является Б-планом (иначе он был бы исключен в п. III), то любой Б-план содержит нулевые компоненты среди r последних. Поэтому

$$\bigcup_{\nu=1}^{r} P(Q^{k,T,\nu}) = P(Q^{k,T}).$$

Подмножества

$$P(Q^{k,1}),\ \ldots,\ P(Q^{k,T-1}),\ P(Q^{k,T+1}),\ \ldots,\ P(Q^{k,s'(k)}),$$
$$P(Q^{k,T,1}),\ \ldots,\ P(Q^{k,T,r})$$

обозначим заново через

$$P(Q^{k+1,1});\ \ldots,\ P(Q^{k+1,s(k+1)})$$

и перейдем к выполнению шага $k+1$.

Получив после выполнения алгоритма оптимальный Б-план и планы снабжения В- и Г-ресурсами, а также ряд планов, близких к оптимальному, проверим дерево Б-распределительной сети на условие минимальности длины. Построим новое дерево минимальной (в смысле затрат) длины для точек, вошедших в оптимальный Б-план. Если оно является частью первоначального, то задача решена. В противном случае выполняем алгоритм с 0-го шага для нового дерева Б-распределительной сети.

В соответствии с изложенным алгоритмом автором была составлена программа на языке «МАЛГОЛ-73». Программа позволяет решать задачи на сети с числом узлов до 110 и дуг — до 400. Время решения зависит от размерности сети и ограничения на ресурсы газа.

С помощью данной программы было решено несколько задач на ЭВМ «Минск-22». Например, реальная задача о снабжении топливом одного из районов (Б-ресурс — газ, В-ресурс — мазут, Г-ресурс — уголь, сеть с числом узлов — 40 и дуг — 78, доля газа в общей потребности в топливе составляет 15%) решалась 4 *мин*. Были получены оптимальный план и семь планов с значением D, отличающимся не более чем на 2% от оптимального.

В целом, экспериментальные расчеты показали эффективность применения разработанного метода для решения определенного класса задач газоснабжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Balas, An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables. Operations Research, 1965, **13**, 4, 517—546.
2. E. Balas, Discrete Programming by the Filter Method. Operations Research, 1967, **15**, 5, 915—957.
3. Т. Ху, Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., 1974.
4. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел, Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и математические методы, 1965, **1**, 1, 94—107.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24/VI 1975

M. KORTŠEMKIN

RESSURSSIDE OPTIMAALNE JAOTAMINE BALASI ADITIIVMEETODIL

Resümee

Artiklis esitatakse üks piiratud ressursside optimaalse jaotamise võimalusi. Ülesanne on jaotada kolme liiki ressursse tarbijate vahel, kusjuures transpordikulud oleksid minimaalsed.

Ühe ressursi transpordikulud ühiku kohta on esitatud jaotusvõrgu kaartel, ülejäänute omad ja tarbijate vajadused võrgu sõlmedes. Algoritm sisaldab elemente Balasi aditiivsest algoritmist lineaarsete ülesannete lahendamiseks, kui muutuja on 0 või 1. Algoritmi sobivust on kontrollitud praktikas.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
24. VI 1975

M. KORCHEMKIN

OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION BY THE BALAS ADDITIVE METHOD

Summary

This work is an attempt at the solution of a problem of limited resource allocation. The problem is to choose customers of three resource types and compose a distributive network so as to minimize transport costs in the system.

The costs of the one of the types of resource transport per unit are determined on the arcs of the excess network considered. The costs of the two other types of resource transport and the customers' demands are determined at the nodes of the network. An algorithm for solving this problem includes the elements of Balas additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. The efficiency of the algorithm has been proved by experimental computation.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
June 24, 1975