EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 25. KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1976 NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1976, № 1

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1976.1.01

М. МЭЭЛ

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИЕМА УЧАЩИХСЯ В СИСТЕМУ СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В статье рассматривается стохастическая модель планирования оптимального распределения учащихся при приеме по специальностям в систему спецобразования. При этом исходным пунктом является запрогнозированная народнохозяйственная потребность в специалистах.

В первой части статьи вводится модель в общем виде как задача оптимального планирования приема. При условии ограниченного приема учащихся в задаче минимизируется взвешенная сумма вероятностей, по которым потребность в специалистах разных специальностей может превысить их выпуск.

Во второй части вышеописанный вид модели упрощается, будучи сведенным к задаче квадратичного планирования, которая практически легко решается. В ходе упрощения сохраняется вероятностный характер задачи.

1. Введение

В опубликованных до сих пор работах по планированию образования преобладает детерминированная трактовка его сути (см., например, [1—4]).

Перемещение учащихся в системе образования описывается в основном с помощью переходящих норм, показывающих, какая часть учащихся в системе образования переходит в новом учебном году на следующую ступень, какая часть выпадает из системы в середине учебного года, какая получает образование своевременно и т. д. Обозначим такую норму перехода через q. Значения статистического периода $(q_1, \ldots, q_n)$ позволяют вывести значение прогнозируемого периода q'_{n+t}. Последнее можно интерпретировать как вероятность перехода в дискретной цепной модели Маркова (см., например, [1]). При детерминированном подходе, как мы его здесь понимаем, случайная величина q'_{n+t} выбирается равной ее ожидаемому среднему значению $\bar{q}'_{n+t}$ без учета вероятности ее осуществления, т. е. без учета возможного отклонения ее от среднего значения.

Значения ограничений или входных показателей, как, например, всего приема учащихся, учебных ресурсов и т. д., зачастую представляются в виде интервалов (см., например, [2]), но эти интервалы не даны в пределах вероятности их исполнения.

Детерминированный подход по своему содержанию проще стохастического, его преимущества позволяют более подробно описать структуру системы образования. В этом случае проще и менее трудоемки практические расчеты. С другой стороны, доверительность прогнозов увеличится, если прогнозируемые значения явлений представить в вероятностном интервале их исполнения. Зная вероятные отклонения действительных значений явлений от их прогнозируемых средних значений, можно обоснованно планировать запасы для возмещения ущерба, образуемого в результате возможных отклонений. Можно предположить, что с развитием счетно-вычислительной техники применение стохастической постановки в практике прогнозирования и планирования облегчится. Опираясь на эти соображения, рассмотрим модель, в которой показатели приводятся в виде стохастических величин.

Основным входным показателем предположим прогнозируемую дополнительную потребность в специалистах γ'_{kt}, $k=1, \ldots, K$, где t — номер прогнозируемого года и k — специальность.* Зададимся целью по возможности удовлетворить γ_{kt}. Средством удовлетворения потребности служит система спецобразования.

Возможный выпуск специалистов из системы спецобразования ($\sum_{k=1}^{K}\beta_{kt}$, где β_{kt} — выпуск специалистов по специальности k в году t) имеет какой-то верхний предел. Это зависит от максимально возможного приема учащихся в систему спецобразования в году h, если $t-h$ — длительность учебного периода. Максимальное число принятых учащихся в свою очередь зависит от многих факторов, например, от максимально возможной доли учащихся в трудовых ресурсах, от имеющихся учебных ресурсов и т. д.

Может случиться, что мы не сможем в полной мере удовлетворить поставленную перед нами цель. Это произойдет, если $\sum_{k=1}^{K}\gamma_{kt}$ превысит возможный верхний предел специалистов, выпускаемых системой спецобразования в году t. От недостатка специалистов народное хозяйство терпит ущерб, который, очевидно, не одинаков для различных специальностей — для одних больше, чем для других. Поэтому можно сказать, что некоторые специальности с точки зрения народного хозяйства важнее, чем другие, и им можно придать больший вес.

Итак, мы, вероятно, не можем полностью удовлетворить потребность народного хозяйства в специалистах по всем специальностям γ_{kt}, $k=1, \ldots, K$. Но мы можем минимизировать взвешенную сумму вероятностей p_{kt}, $k=1, \ldots, K$, по которым γ_{kt} может превысить β_{kt}.

Число выпускников по специальности k в году t (β_{kt}) вытекает из числа учащихся, принятых в систему спецобразования на специальность k в году h (x_{hk}). Так решением задачи определяется оптимальное распределение приема учащихся (x_{hk}, $k=1, \ldots, K$) в условиях ограничения их максимального приема. Для упрощения предположим определенный план, т. е. будем считать, что план приема учащихся в течение прогнозируемого периода не изменится, что x'_{hk} — детерминированная величина и можно записать $x'_{hk}=x_{hk}$ (об определенном и вероятном плане см., например, [5]).

* Прогнозируемое значение явлений отметим дополнительным штрихом в отличие от их действительных значений в прогнозируемом периоде. Так, прогнозируемое значение — γ'_{kt}, действительное — γ_{kt}.

2. Общий вид модели

Опишем модель по видам специальностей.*

2.1. Во-первых, рассмотрим задачу для какой-либо одной специальности k, чтобы показать, как из поставленной сначала цели — удовлетворения γ_{kt} — последует задача оптимизации.

Обе величины — γ'_{kt} и β'_{kt} — случайны. Отсюда следует, что действительные значения прогнозируемого периода этих величин могут отличаться от их прогнозируемых средних значений $\overline{\gamma}'_{kt}$ и $\overline{\beta}'_{kt}$. В целях упрощения представим сначала эти отклонения в виде каких-нибудь конечных, симметричных функций распределения (рис. 1, 2, 3) и для ясности рассмотрим некоторые крайние случаи, которые могут встретиться. Наихудший случай по поставленной нами цели представлен на рис. 1.

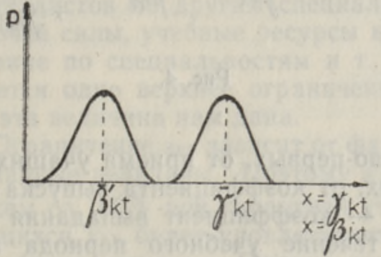

Рис. 1.

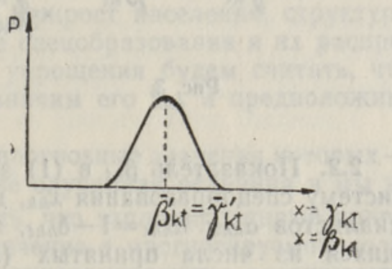

Рис. 2.

Здесь вероятность того, что народнохозяйственная потребность в специалистах по специальности k превышает их выпуск системой спецобразования, равна 1:

$$p_{kt}=P_k(\gamma_{kt}>\beta_{kt})=1.$$

Поскольку мы имеем дело со случайными величинами, при уравновешивании средних значений $\overline{\gamma}'_{kt}=\overline{\beta}'_{kt}$ в половине случаев сохранится опасность, что потребность может превысить выпуск:

$$p_{kt}=P_k(\gamma_{kt}>\beta_{kt})=0{,}5 \text{ (см. рис. 2)}.$$

Опасности, что спрос в специалистах не будет удовлетворен, нет лишь тогда, когда $\overline{\beta}''_{kt}$ настолько превысит $\overline{\gamma}''_{kt}$, что отклонения этих величин от средних не перекрываются (см. рис. 3).

Вероятность, что потребность превысит выпуск, равна здесь 0:

$$p_{kt}=P_k(\gamma_{kt}>\beta_{kt})=0.$$

В общем случае рассеивания величины перекрываются частично, но в силе остается вышеописанная тенденция: чем больше прогнозное среднее значение одной величины $\overline{\beta}'_{kt}$ превысит прогнозное среднее значение другой $\overline{\gamma}'_{kt}$, тем с большей вероятностью его действительное значение β_{kt} превысит действительное значение другой величины γ_{kt} (см. рис. 4).

Во-вторых, из рис. 4 видно, чем меньше рассеивание величин от их заданных средних значений, тем более сжаты их частоты распределения и тем меньше должна быть вероятность, что в данном случае γ_{kt} может

* Аналогичным образом модель применима и в планировании по уровням образования.

превысить β_{kt}. Рассеивание величины от среднего значения характеризует, как известно, дисперсия σ^2. Таким образом, мы можем представить вероятность неудовлетворения потребности $p_{kt}=P_k(\gamma_{kt}>\beta_{kt})$ в виде функции прогнозных средних значений и дисперсий этих величин:

$$p_{kt}=P(\gamma_{kt}>\beta_{kt})=f_k(\bar{\gamma}'_{kt},\ \bar{\beta}'_{kt};\ \sigma^2_{\gamma kt};\ \sigma^2_{\beta kt}). \tag{1}$$

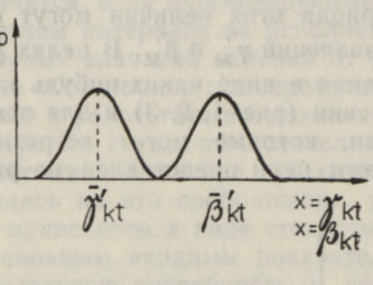

Рис. 3.

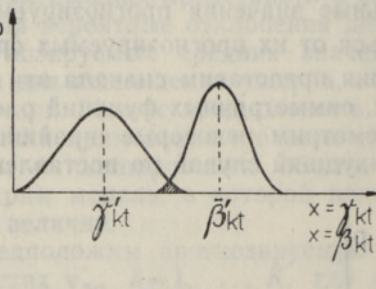

Рис. 4.

2.2. Показатель β_{kt} в (1) зависит, во-первых, от приема учащихся в систему спецобразования x_{hk}, во-вторых, от коэффициента выпуска специалистов α_{hkt}; $\alpha_{hkt}=1-\delta_{hkt}$, где δ_{hkt} — коэффициент выпадания учащихся из числа принятых (x_{hk}) в течение учебного периода $t-h$. Итак,

$$\beta_{kt}=\alpha_{hkt}x_{hk}. \tag{2}$$

В начале статьи мы задались целью путем уравновешивания определить оптимальный прием учащихся в систему спецобразования. Таким образом, в данном случае мы хотим определить x_{hk}, поэтому выразим β'_k в (1) посредством прогноза произведения показателей x_{hk} и α_{hk}:

$$p_{kt}=P_k(\gamma_{kt}>\beta_{kt})=P_k(\gamma_{kt}>\alpha_{hkt}x_{hk})=$$
$$=f_k\{\bar{\gamma}'_{kt},\ E(\alpha_{hkt}x_{hk})',\ \sigma^2_{\gamma kt};\ D(\alpha_{hkt}x_{hk})'\}, \tag{3}$$

где $E(\alpha_{hkt}x_{hk})'$ является прогнозным средним значением произведения $(\alpha_{hkt}x_{hk})$ и $D(\alpha_{hkt}x_{hk})'$ обозначает дисперсию прогноза данного произведения.

О величине γ_{kt} мы предполагаем, что она зависит от таких факторов, влияние которых не входит в область планирования спецобразования. Таким образом, γ_{kt} не представляет собой здесь объекта активного, нормативного * прогноза, а задана извне.

На ожидаемое среднее значение и отклонение коэффициента выпуска специалистов (α_{hkt}) мы вообще-то должны уметь влиять, повышая, например, путем морального или материального стимулирования желание учащихся овладеть специальностью k. Но выявление самых оптимальных способов влияния на α_{hkt} не входит в задачу настоящей статьи. Поэтому предложим, что как γ'_{kt}, так и α'_{hkt} в нашей модели являются входными показателями.

Итак, в соответствии с первоначальной постановкой задачи x_{hk} остается единственным объектом данного нормативного прогноза. Определим его оптимальное значение, которое по возможности удовлетворяло бы предварительно запрогнозированное значение γ_{kt}. Определение такого

* О нормативном прогнозе см., например, [6].

значения для x_{hk} практически возможно: ни x_{hk}, ни $\sum\limits_{k=1}^{K} x_{hk}$ не ограничены снизу, так как нет необходимости принимать ни по какой-либо одной специальности, ни по всей системе спецобразования в целом учащихся больше требуемого γ_{kt} и $\sum\limits_{k=1}^{K} \gamma_{kt}$. (В противоположность системе общего образования, где всем молодым людям необходимо гарантировать возможность учиться). Итак, здесь остается лишь формальное нижнее ограничение:

$$x_{hk} \geqslant 0. \tag{4}$$

С другой стороны, мы могли бы уменьшать значение p_{kt} путем неограниченного увеличения x_{hk}. Но здесь имеется ряд верхних ограничений, которые определяют максимально возможный прием учащихся по специальности k. Последний зависит от таких показателей, как потребность специалистов по другим специальностям, прирост населения, структура рабочей силы, учебные ресурсы в системе спецобразования и их распределение по специальностям и т. д. Для упрощения будем считать, что имеется одно верхнее ограничение. Обозначим его ε_{hk} и предположим, что эта величина нам дана.

Ограничение ε_{hk} зависит от факторов, прогнозные значения которых — случайные величины. Поэтому ε'_{hk} — тоже случайная величина и мы не можем со 100%-ной гарантией утверждать, что запланированный прием учащихся x_{hk} будет удовлетворять ограничение в прогнозируемом году, т. е. будет ниже ε_{hk}. Однако применяя вышеприведенные рассуждения для вероятности p_{kt} по отношению к ε_{hk} и x_{hk}, мы можем потребовать, чтобы запланированный прием учащихся в году h не превысил действительного приема в этом году с какой-либо вероятностью e_k, которая нас еще удовлетворяет:

$$P_k(x_{hk} \leqslant \varepsilon_{hk}) \geqslant e_k.$$

Так как x_{hk} — детерминированная величина, $P_k(x_{hk} \leqslant \varepsilon_{hk})$ зависит лишь от прогнозного среднего значения и дисперсии величины ε_{hk}:

$$P_k(x_{hk} \leqslant \varepsilon_{hk}) = f_k(\overline{\varepsilon'_{hk}}, \sigma^2_{\varepsilon hk}) \geqslant e_k. \tag{5}$$

2.3 Выразим теперь все специальности $k=1, \ldots, K$ по формулам (3), (4) и (5). Тогда мы получим расширенную задачу, которая охватывает всю систему спецобразования.

Как отмечено во введении, от нехватки специалистов одной специальности народное хозяйство терпит больший ущерб, чем от нехватки специалистов другой специальности. Поэтому целесообразно придать одним специальностям больший удельный вес, чем другим. Обозначим вес народнохозяйственной важности специальности k через λ_k. Таким образом получим взвешенную сумму вероятностей p_{kt}, $k=1, \ldots, K$, которую можно рассмотреть, как минимизирующую целевую функцию s:

$$s = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k [P_k(\gamma_{kt} > a_{hkt} x_{hk})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \lambda_k [f_k\{\overline{\gamma'_{kt}}; E(a_{hkt} x_{hk})', \sigma^2_{\gamma kt}; D(a_{hkt} x_{hk})'\}] \to \min. \tag{6}$$

В расширенной задаче к ограничениям приема учащихся по специальностям (5) надо добавить ограничение максимального приема учащихся в систему спецобразования в целом. Обозначим его через ω_h.

Значение ω_h определено в основном величиной трудовых ресурсов и максимально возможной долей учащихся в них. Величина ω_h в нашей задаче служит входным показателем, прогнозирование которого мы подробно не рассматриваем. Отметим лишь, что прогноз ω_h является также величиной случайной, аналогично прогнозу ε_{hk}. Ограничение приема учащихся в систему спецобразования в целом выглядело бы тогда следующим образом:

$$P\left(\sum_{k=1}^{K} x_{hk} \leqslant \omega_h\right) = f(\bar{\omega}'_h;\ \sigma^2_{\omega h}) \geqslant e_\omega. \tag{7}$$

2.4. Наконец, было бы целесообразно добавить еще одно ограничение, которое учитывало бы ограниченность затрат на образование.

Предположим, что у нас уже имеется предварительно запрогнозированная общая сумма ресурсов Ξ'_{ht}, которую возможно использовать для обучения β_t числа специалистов. Удельный коэффициент затрат на обучение одного специалиста обозначим ξ_{ht}. Затраты на обучение всех специалистов $(\xi_{ht}\beta_t)$ не могут превысить Ξ_{ht}.

Удельный коэффициент затрат ξ_{ht} можно прогнозировать в разрезе различных видов затрат. Для этого определим предполагаемые прогрессивные нормативы каждого вида затрат на одного специалиста, затем выразим эти нормативы единой мерой измерения (например, в деньгах) и просуммируем их (о видах затрат системы спецобразования см. [7] стр. 286—298, или [8] стр. 224—257). Прогнозируемый таким путем удельный коэффициент затрат назовем нормативным и обозначим ξ^n_{ht}. Для различных специальностей ξ^n_{ht} должны различаться, поскольку затраты, связанные с обучением разных специалистов могут быть различными (см., например, [9]). Поэтому удельный коэффициент затрат надо выбирать дифференцированно еще и по специальностям:

$$\xi^n_{hkt};\quad k=1, \ldots, K.$$

Если бы все принятые учащиеся успешно завершили учебу (коэффициент выпуска $\alpha_{ht}=1$), к числу принятых учащихся x_h можно было бы применить тот же нормативный удельный коэффициент затрат, который применен к β_t. Но в общем случае приходится удельный коэффициент затрат к величине x_h увеличить за счет учащихся, которые выпадут в течение учебного периода $t-h$ из числа принятых x_h. Размеры затрат, израсходованных на них, зависят от времени τ, в течение которого они пребывали в системе спецобразования, от коэффициента выпуска α_{ht} и удельного коэффициента затрат ξ^n_{ht}. Если мы обозначим применяемый по отношению к x_h удельный коэффициент затрат через ξ^0_{ht}, то

$$\xi^0_{ht} = \varphi(\tau;\ \alpha_{ht},\ \xi^n_{ht}),$$

а по отношению к x_{hk}

$$\xi^0_{hkt} = \varphi(\tau,\ \alpha_{hkt};\ \xi^n_{hkt}),\quad k=1;\ \ldots;\ K. \tag{8}$$

Теперь можно сказать, что затраты на обучение принятых учащихся $\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt}\, x_{hk}\right)$ не могут превысить Ξ_{ht}. Значения величин $\xi^{0\prime}_{hkt}$, $k=1, \ldots, K$, и Ξ'_{ht} случайны. Поэтому представленное условие можно выполнить лишь с известной вероятностью:

$$P\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk} \leqslant \Xi_{ht}\right) \geqslant e_{\xi}. \tag{9}$$

Аналогично целевой функции (см., например, выражение (6)), и здесь можно вероятность $P(\ldots)$ представить зависимой от средних значений и дисперсии обеих случайных величин:

$$P\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk} \leqslant \Xi_{ht}\right) =$$

$$= f\left\{E\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\right)', \overline{\Xi}'_{ht}, D\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\right)', \sigma^2_{\Xi ht}\right\} \geqslant e_{\xi}. \tag{10}$$

2.5. В конечном счете из (4), (5), (6), (7) и (10) вытекает следующая задача оптимального планирования:

$$s = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k [P_k(\gamma_{ht} > \alpha_{hkt} x_{hk})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \lambda_k [f_k\{\overline{\gamma}'_{kt}, E(\alpha_{hkt} x_{hk})', \sigma^2_{\gamma ht}, D(\alpha_{hkt} x_{hk})'\}] \rightarrow \min \tag{11а}$$

при ограничениях:

$$x_{hk} \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, K, \tag{11б}$$

$$P_k(x_{hk} \leqslant \varepsilon_{hk}) = f_k(\overline{\varepsilon}'_{hk}, \sigma^2_{\varepsilon hk}) \geqslant e_k, \quad k = 1, \ldots, K, \tag{11в}$$

$$P\left(\sum_{k=1}^{K} x_{hk} \leqslant \omega_h\right) = f(\overline{\omega}'_h, \sigma^2_{\omega h}) \geqslant e_{\omega}, \tag{11г}$$

$$P\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk} \leqslant \Xi_{ht}\right) =$$

$$= f\left\{E\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\right)', \overline{\Xi}'_{ht}, D\left(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\right)', \sigma^2_{\Xi ht}\right\} \geqslant e_{\xi}. \tag{11д}$$

Представлена нелинейная задача. Вероятности $P(\ldots)$ выражаются здесь через интегралы. В практических расчетах подобную задачу решать весьма сложно, поэтому ниже мы постараемся ее упростить, сохраняя вероятностный характер задачи. При упрощении выразим случайные величины через их средние значения и дисперсии.

3. Упрощение модели в задачу квадратичного планирования

Далее вышеописанную модель представим в упрощенном виде как задачу квадратичного планирования. Для этого попытаемся избежать определения вероятностей $P(\ldots)$ через функции распределения, поскольку последние выражаются в виде интегралов. Встречающиеся в задаче случайные величины выразим в приближенном виде [10, 11, стр. 399—432].

3.1. Ограничения (11в) и (11г) можно выразить посредством квантилей [11], соблюдая требование, чтобы x_{hk}, $k=1,\dots,K$ и $\sum_{k=1}^{K} x_{hk}$ не превышали значений соответствующих квантилей:

$$x_{hk} \leqslant \bar{\varepsilon}'_{hk} - t\sigma_{\varepsilon hk} = \tilde{l}_k;\quad k=1,\ \dots;\ K \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{hk} \leqslant \bar{\omega}'_h - t\sigma_{\omega h} = \tilde{w}, \tag{13}$$

где t представляет собой число t-Стьюдента.

В отличие от ранее приведенного, обе стороны ограничения (11д) имеют случайные величины (с одной стороны, удельные коэффициенты затрат ξ^0_{hkt}, $k=1,\dots,K$, с другой, сумма ресурсов Ξ_{ht}). Здесь мы получим Q квантилей затрат на обучение β_t специалистов:

$$E\Big(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\Big)' + t\sqrt{D\Big(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\Big)'} = \tilde{u}. \tag{14а}$$

Предположив взаимную независимость случайных величин ξ^0_{hkt}, можно показать, что

$$E\Big(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\Big)' = \sum_{k=1}^{K} x_{hk} \bar{\xi}^{0\prime}_{hkt}$$

и

$$D\Big(\sum_{k=1}^{K} \xi^0_{hkt} x_{hk}\Big)' = \sum_{k=1}^{K} x^2_{hk}\, \sigma^2_{\xi^0}.$$

Итак,

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{K} x_{hk} \bar{\xi}^{0\prime}_{hkt} + t\sqrt{\sum_{k=1}^{K} x^2_{hk}\, \sigma^2_{\xi^0}}. \tag{14б}$$

Далее, можно показать, что

$$t\sqrt{\sum_{k=1}^{K} x^2_{hk}\, \sigma^2_{\xi^0}} \simeq tr \sum_{k=1}^{K} x_{hk} \sigma_{\xi^0}, \tag{15}$$

где r — коэффициент, значение которого определяется в ходе практических расчетов [12].

Допустим, что приведенный Q квантиль затрат на обучение не может превзойти R квантиль суммы ресурсов (Ξ_{ht}). Тогда ограничение (11д) можно в приближенном виде переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{K} x_{hk} \bar{\xi}^{0\prime}_{hkt} + tr \sum_{k=1}^{K} x_{hk} \sigma_{\xi^0} \leqslant \bar{\Xi}'_{ht} - t\sigma_{\Xi ht} = \tilde{v} \text{ или} \tag{16а}$$

$$\sum_{k=1}^{K} i_{hkt} x_{hk} + c \sum_{k=1}^{K} j_{hkt} x_{hk} \leqslant \tilde{v}; \tag{16б}$$

где $i_{hkt} = \bar{\xi}^{0\prime}_{hkt}$,

$j_{hkt} = \sigma_{\xi^0}$,

$c = tr$.

3.2. Рассмотрим целевую функцию.

$(\gamma'_{tk}+t\sigma_{\gamma tk})$ является Q квантилей потребности в специалистах;

R квантиль выпуска специалистов выражается

$$\{E(x_{hk}\alpha_{hkt})'-t\sqrt{D(x_{hk}\alpha_{hkt})'}\}=x_{hk}\overline{\alpha}'_{hkt}-tx_{hk}\sigma_\alpha=x_{hk}(\overline{\alpha}'_{hkt}-t\sigma_\alpha).$$

Аналогично рассуждениям, примененным при упрощении ограничения (16), мы можем и при упрощении целевой функции потребовать, чтобы взвешенная сумма квадратов остатков между Q квантилем потребности в специалистах и R квантилем выпуска специалистов по специальностям $k=1,\ldots,K$ была минимальной:

$$\hat{s}=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k[(\overline{\gamma}'_{tk}+t\sigma_{\gamma tk})-x_{hk}(\overline{\alpha}'_{hkt}-t\sigma_\alpha)]^2\to\min. \tag{17а}$$

Обозначив $\overline{\gamma}'_{tk}+t\sigma_{\gamma tk}=a_{tk}$ и $\overline{\alpha}'_{hkt}-t\sigma_\alpha=b_{hkt}$,

можно целевую функцию записать в виде:

$$\hat{s}=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k(a_{tk}-x_{hk}b_{hkt})^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k(a^2_{tk}-2a_{tk}b_{hkt}x_{hk}+b^2_{hkt}x^2_{hk})\to\min. \tag{17б}$$

Поскольку $a^2_{tk}=\text{const}$, то в целевой функции мы его не рассматриваем. Тогда целевая функция примет вид:

$$\hat{s}=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k(b^2_{hkt}x^2_{hk}-2a_{tk}\,b_{hkt}\,x_{hk})\to\min. \tag{17в}$$

3.3. В результате упрощения нами получена следующая задача оптимизации:

$$\hat{s}=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k(b^2_{hkt}x^2_{hk}-2a_{tk}b_{hkt}x_{hk})\to\min \tag{18а}$$

при ограничениях:

$$0\leqslant x_{hk}\leqslant\bar{l}_k;\quad k=1,\ldots,K, \tag{18б}$$

$$\sum_{k=1}^{K}x_{hk}\leqslant\tilde{w}, \tag{18в}$$

$$\sum_{k=1}^{K}i_{hkt}x_{hk}+c\sum_{k=1}^{K}j_{hkt}x_{hk}\leqslant\tilde{v}. \tag{18г}$$

Резюмируя, можно сказать, что задача (18) со строго выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями относительно легко решается.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Thonstad, A Mathematical Model of the Norwegian Educational System. Mathematical Models in Educational Planning. OECD, Directorate for Scientific Affairs, Paris 1967, 125—158.
2. A. Lukka, Optimal Enrolment Policy for Higher Education. Zeitschrift für Operations Research, 1974, B. 18, Nr. 4, 121—129.
3. J. Kovács, A Model for Planning School Enrolment. Acta Oeconomica, 1969, V. 4, no 2, 7—37.
4. В. Ляляев, Динамическая экономико-математическая модель системы образования и подготовки кадров. В сб.: Вопросы планирования и использования специалистов в народном хозяйстве. М., 1971, 17—32.
5. Ю. Эннусте, О принципе определенно-вероятностного планирования, моделях и функционировании экономики. Изв. АН ЭССР. Общ. науки, 1974, 23, 1, 3—21
6. И. Бестужев-Лада, Критерии оптимума в нормативном прогнозировании. В сб.: Анализ и прогноз в системах управления (Тезисы докладов научно-технической конференции). Минск, 1975, 27—29.
7. В. Жамин, Экономика образования. М., 1969.
8. K. Fox, Economic Analysis for Educational Planning. Resource Allocation in Nonmarket Systems, Baltimore—London, Hopkins Univ. Press, 1972.
9. В. Корчагин, Образовательный потенциал общества. Изв. АН СССР. Сер. эконом., 1974, № 6, 19—29.
10. Ü. Ennuste, Uncertainty, Information and Decomposition in the Planning of a Production System. Economics of Planning, 1969, 9, 3, 258—266.
11. Е. Гольштейн, Д. Юдин, Новые направления в линейном программировании. М., 1966.
12. В. Колбин, В. Танская, Некоторые задачи стохастического линейного программирования и алгоритмы их решения. В сб.: Математические программы и вычислительные методы оптимального планирования. М., 1971, 391—401.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
8/VIII 1975

M. MEEL

ERIHARIDUSSÜSTEEMI VASTUVÕETAVATE ÕPILASTE OPTIMAALSE JAOTUSE PLANEERIMISE STOHHASTILINE MUDEL

Resümee

Artiklis kirjeldatakse üht võimalikku stohhastilist mudelit eriharidussüsteemi vastuvõetavate õpilaste optimaalse jaotuse planeerimiseks erialade kaupa. Seejuures on lähtutud rahvamajanduse prognoositud spetsialistidevajadusest.

Artikli esimeses osas esitatakse optimaalse planeerimise ülesande üldkuju mudel. Ülesandes minimeeritakse erialatõenäosuste kaalutud summat, kusjuures kitsendavateks tingimusteks on õpilaste koguvastuvõtt ja hariduskulud. Erialatõenäosuse all mõistetakse siin tõenäosust, millega rahvamajanduse vajadus mingi eriala spetsialistide järele võib ületada selle eriala spetsialistide väljalaske eriharidussüsteemist.

Artikli teises osas on ülalkirjeldatud mudel lihtsustatud ruutplaneerimisülesandeks, sest viimast on praktikas suhteliselt lihtne lahendada. Seejuures on püütud säilitada ülesande tõenäosuslikku iseloomu.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
8. VIII 1975

M. MEEL

A STOCHASTIC MODEL FOR PLANNING OPTIMAL ENROLMENT POLICY IN THE VOCATIONAL-EDUCATIONAL SYSTEM

Summary

The paper deals with a stochastic model for planning optimal enrolment policy in the vocational-educational system, according to specialities needed in various branches of the national economy of the Republic.

The first part of the article deals with the concept of the model in the form of an optimal programming problem. Under the conditions of a limited enrolment, the weighed sum of speciality-probabilities is minimized. By the term of speciality-probability is meant the probability according to which the demand for specialists is greater than their output by the vocational-educational system.

The second part of the article simplifies the above-mentioned model, turning it into a quadratic-programming problem in the interests of its relatively easy solving in practice. In the process of simplifying, the stochastic nature of the problem is preserved.

Academy of Sciences of the Estonian SSR, Institute of Economics

Received
Aug. 8, 1975