EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 24. KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED, 1975, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1975, № 3
https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1975.3.02

А. ОЛЬМ

КОМПРОМИССНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОЦЕЛЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. При решении почти всех практических задач экономического планирования желательно экстремизирование нескольких критериев, например, при составлении плана развития какого-то предприятия (отрасли, региона) — максимизировать выпуск валовой и товарной продукции, валовой доход, прибыль, в то же время минимизировать производственные и приведенные затраты, объем капиталовложений, затраты труда и т. д. В случае линейной задачи это означает, что требуется экстремизировать s целевых функций

$$C_1^T X,\ C_2^T X,\ \ldots,\ C_s^T X \tag{1}$$

при условиях

$$AX \leqslant B, \tag{2}$$

$$X \geqslant \Theta, \tag{3}$$

где C_i^T — транспонированный n-мерный вектор заданных коэффициентов i-й целевой функции;
A — n-мерный вектор искомых величин;
B — заданная $m \times n$-мерная матрица;
X — m-мерный вектор свободных членов;
Θ — n-мерный нулевой вектор.

Поскольку любую систему можно оптимизировать только относительно одного критерия, решение задачи, экстремизирующее одну из целевых функций (1), отнюдь не оптимально относительно остальных критериев (1). Например, производственный план, рассчитанный на максимум валовой продукции предприятия, как правило, не обеспечивает максимальной прибыли, тем более — минимальной потребности в рабочей силе.

Для разработки приемлемого и эффективного плана многоцелевой экономической системы нужно найти такое компромиссное решение многоцелевой задачи (1) ... (3), которое было бы в некотором смысле «хорошим» одновременно относительно всех критериев (1). Естественно, что переход на компромисс заставляет отказаться от строгого оптимума по одним критериям оптимальности, чтобы добиться улучшения результатов по другим.

2. Самый простой и распространенный в практике метод решения многоцелевых задач состоит в оптимизации наиболее важного критерия при дополнительных ограничениях на величины остальных целевых функций (см. например [1, 2]).

Серьезный недостаток этого простого метода заключается в том, что операция назначения ограничений для величин целевых функций «второстепенной важности» формально не определяется и остается на уровне выбора экспертов. Вторая трудность состоит в том, что при неудачном выборе дополнительных ограничений область допустимых компромиссных решений может оказаться пустой.

Последнего можно избежать при методе последовательных уступок, описанном в [1, 3, 4]: все критерии располагаются в порядке их важности, сначала обращается в оптимум наиболее важный критерий, затем назначается допустимая (с точки зрения задачи) уступка по этому критерию и оптимизируется второй критерий при дополнительном ограничении, согласно которому первый критерий может отличаться от оптимума не более чем на принятую уступку; далее назначается допустимая уступка по второму критерию, добавляется соответствующее ограничение и оптимизируется третий критерий и т. д. Последний в таком ряду план принимается за компромиссное решение исходной многоцелевой задачи. Нужно отметить, что и здесь назначение обоснованных уступок по рассматриваемым критериям остается нерешенной проблемой.

В [5] компромиссное решение многоцелевой задачи линейного программирования находится как некоторая линейная комбинация решений соответствующих одноцелевых задач. Для определения коэффициентов комбинации разработана специальная теоретико-игровая модель. Однако в [6] указано, что такое решение, как правило, находится внутри множества допустимых решений и поэтому можно найти другой план, который по всем критериям превышает качество предложенного компромиссного решения.

Можно ожидать, что при решении многих экономических задач эффективен синтез обобщенного критерия, т. е. образование одного составного критерия в виде некоторой функции (например, суммы) от всех рассматриваемых критериев [2, 3, 4, 7, 8].* В экстремум обращается этот единственный, обобщенный критерий. Недостаток метода заключается в том, что при найденном решении экстремум составного критерия может достигаться при весьма неподходящих значениях одних критериев, скомпенсированных за счет величин других целевых функций.

Весьма удачен подход к решению многоцелевых задач типа (1) ... (3), предложенный в [6]. Сначала решают s задач, максимизируя по одному критерию из (1) (предполагается, что все функции (1) подлежат максимизации, а максимальное значение i-й целевой функции обозначено через M_i). Затем формулируется новая одноцелевая задача: найти такое компромиссное решение, которое удовлетворяет условиям (2), (3), дополнительным ограничениям

$$\frac{M_i - C_i^T X}{|M_i|} \leqslant \omega, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{4}$$

и минимизирует ω. Полученное компромиссное решение даст минимальный общий верхний предел ω^* для относительных отклонений от всех максимальных значений M_i целевых функций.

3. В [6] предполагается, что все целевые функции (1) одинаково важны. Однако в большинстве экономических задач степени важности отдельных критериев различны. Поэтому целесообразно дополнить разработанную в [6] методику определения компромиссного решения так, чтобы можно было учитывать целевые функции (1) с различными весами. При усовершенствованной методике отпадает необходимость заново перфорировать матрицу A перед решением компромиссного варианта, что неизбежно, если в применяемой программе предусмотрено перфорирование матрицы по столбцам.

Будем считать, что все целевые функции (1) подлежат минимизации. Для этого достаточно знак максимизируемых критериев заменить на обратный.

---

* Отметим, что из указанной литературы [2, 5, 6, 8] посвящены многоцелевым задачам линейного программирования, в остальных обсуждаются задачи общего вида.

Расчетный оптимальный состав и экономические показатели тракторного парка в растениеводстве ЭССР в расчете на 1000 *га* обрабатываемой площади

Типы тракторов и наименование показателей	Целевые функции			Компромиссы		Имеется на 1/01. 1974
	Количество тракторов	Прямые затраты	Стоимость тракторов	1:3:3,5	1:2:2,5	
1. Колесный типа Т-150К	2,73	0,57	0,57	1,23	1,62	0,07
2. Гусеничный типа Т-74	1,02	3,92	2,60	1,25	1,25	3,50
3. Колесный типа МТЗ-80	9,25	6,06	8,13	9,12	8,24	5,56
4. Тракторы класса 0,6 т (Т-25 и Т-16)	—	6,83	3,92	1,63	2,21	6,98
5. Другие	—	—	—	—	—	0,86
А. Количество тракторов, шт.	13,00	17,38	15,22	13,23	13,32	16,97
% к минимальному количеству	**100**	**133,7**	**117,1**	**101,8**	**102,4**	
Б. Прямые затраты, руб.	29242	24701	25854	26026	25896	
% к минимальным затратам	**118,4**	**100**	**104,7**	**105,4**	**104,8**	
В. Стоимость тракторов, руб.	61457	52396	52088	53400	53729	
% к минимальной стоимости	**118,0**	**100,6**	**100**	**102,5**	**103,2**	

Присоединим к ограничениям (2) s дополнительных ограничений вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(i)} x - c_{n+1}^{(i)} y \leqslant q_i, \quad i=1, \ldots, s, \tag{5}$$

где $\sum_{k=1}^{n} c_k^{(i)} x$ — i-я целевая функция (1), а $c_{n+1}^{(i)}$ и q_i — любые постоянные числа, причем $c_{n+1}^{(i)}$ должны быть выбраны положительными. Целесообразно взять, например, $c_{n+1}^{(i)}=1$ и $q_i=0$, $i=1, \ldots, s$. Затем решаем s одноцелевых задач с ограничениями (2), (3), (5), принимая в качестве критерия поочередно целевые функции (1). Поскольку при этом неизвестная y не входит ни в одну из целевых функций, дополнительные ограничения (5) никак не влияют на решения одноцелевых задач. В результате определяется s оптимальных планов X_i^* и соответствующие этим планам минимальные значения целевых функций $M_i^*=C_i^T X_i^*$. В программах решения задач линейного программирования, как правило, оптимальные решения выводятся на широкой печати в целом, в виде таблицы. По строкам этих таблиц, соответствующим ограничениям (5), легко получить величины всех j-х целевых функций при применении каждого i-го оптимального плана, т. е. величины $C_j^T X_i^*$, $i \neq j$. Эти величины нужны для экономического анализа оптимальных планов одноцелевых задач.

Путем экспертной оценки приоритета отдельных целевых функций определяются положительные весовые коэффициенты β_i, обратно пропорциональные степеням важности соответствующих критериев. Смысл этих коэффициентов состоит в том, что отклонение величины i-й целевой функции $C_i^T X$ от минимально возможной величины $M_i^*=C_i^T X_i^*$ на β_i процентов считается в экономическом отношении равноценным β_j процентам отклонения j-го критерия $C_j^T X$ от $M_j^*=C_j^T X_j^*$; $i \neq j$; i, $j=1, \ldots, s$.

Для перехода к определению компромиссного решения в дополнительных ограничениях (5) константы q_i заменяются на M^*_i, а коэффициенты $c^{(i)}_{n+1}$ — на величины $\frac{1}{100}\beta_i|M^*_i|$. Эти ограничения примут вид

$$
\begin{aligned}
&c^{(1)}_1 x_1 + c^{(1)}_2 x_2 + \ldots + c^{(1)}_n x_n - \frac{1}{100}\beta_1|M^*_1|y \leqslant M^*_1,\\
&c^{(2)}_1 x_1 + c^{(2)}_2 x_2 + \ldots + c^{(2)}_n x_n - \frac{1}{100}\beta_2|M^*_2|y \leqslant M^*_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c^{(s)}_1 x_1 + c^{(s)}_2 x_2 + \ldots + c^{(s)}_n x_n - \frac{1}{100}\beta_s|M^*_s|y \leqslant M^*_s.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Задача состоит в минимизации дополнительной переменной y:

$$y \to \min! \tag{7}$$

при выполнении условий (2), (3) и (6). Решение $X^*(\overline{\beta})$ этой задачи и является компромиссным решением исходной многоцелевой задачи (1), (2) и (3), учитывающим одновременно все критерии (1) с различными весами. При применении компромиссного решения $X^*(\overline{\beta})$ величина $C^T_i X$ каждой i-й целевой функции превышает свое минимально возможное значение не более чем на $\beta_i y^*$ процентов, где y^* — минимизированное значение целевой функции (7).

Отметим, что для уменьшения степени абстракции при определении экспертами весовых коэффициентов β_i целесообразно, помимо самих коэффициентов β_i, сопоставлять величины $\beta_i M^*_i$ и $\beta_j M^*_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, s$, измеряемые в натуральных единицах соответствующих критериев. Можно пойти еще дальше: при назначении взаимных относительных уступок $\frac{1}{100}\beta_i|M^*_i| = d_i$ отвлечься от минимально возможных величин M^*_i и непосредственно взвешивать уступки d_i в натуральных единицах по каждой i-й целевой функции. Это значит, что эксперты по всевозможным парам индексов i и j, $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, s$, дают заключения: уступка на d_i единиц по i-му критерию равнозначна проигрышу d_j единиц по j-му критерию. Следует подчеркнуть, что при таком подходе к определению взаимных уступок целевых функций естественным образом устраняются значительные затруднения, возникающие в случае, если $M^*_i = 0$ (см. (4) и (6)).

Нетрудно заметить, что описанная методика определения компромиссного решения X^* задачи линейного программирования (1), (2), (3) с несколькими целевыми функциями является по сути дела процедурой нахождения наилучшего приближения вектора целей $(C^T_1 X, C^T_2 X, \ldots, C^T_s X)^T$ к идеальному вектору $(M^*_1, M^*_2, \ldots, M^*_s)^T$, причем качество приближения оценивается кратностью вектора уступок, выражаемого либо в виде $\frac{1}{100}(\beta_1|M^*_1|, \beta_2|M^*_2|, \ldots, \beta_s|M^*_s|)^T$, либо в виде $(d_1, d_2, \ldots, d_s)^T$.

Иногда желаемые величины всех (или некоторых) целевых функций (1) могут быть предписаны вышестоящими органами. В таком случае соответствующие одноцелевые задачи можно не решать, а вместо M^*_i в выражении (6) записать предписанные величины. В ходе вычисления компромиссного решения определяется теперь допустимое решение, обеспечивающее наименьшие взвешенные отклонения уже не от минимально возможных значений целевых функций, а от предписанных значений.

До сих пор предполагалось, что все целевые функции подлежат минимизации. Если некоторые функции (1) следует максимизировать, то знаки при переменной y и знаки неравенств в соответствующих ограничениях (5) и (6) следует заменить на обратные, а M_i^* в этих ограничениях будут обозначать наибольшие возможные значения максимизируемых критериев.

4. Изложенная методика решения многоцелевых задач программирования апробировалась в Эстонском научно-исследовательском институте земледелия и мелиорации в задачах текущего планирования хозяйства и определения оптимальной структуры тракторного парка в растениеводстве Эстонской ССР.

Оптимальная структура тракторного парка определялась на основании среднего расчетного хозяйства республики, для которого была составлена линейная модель проведения механизированных работ в растениеводстве.

В модели учитывались девять напряженных периодов полевых работ, охватывающих в общей сложности 85 календарных дней. Из энергомашин в модель включены пять наиболее перспективных марок тракторов: колесный типа Т-150К и гусеничный типа Т-74 класса тяги 3 *т*, колесный типа МТЗ-80 класса 1,4 *т*, колесный типа Т-25 и самоходное шасси типа Т-16 класса 0,6 *т*.

Основные ограничения вытекают из требования проведения всех работ в заданные агротехнические сроки. Естественное ограничение состоит в том, что ни в один из периодов не может быть использовано тракторов больше, чем их имеется в хозяйстве (количества тракторов различных марок являются искомыми переменными). Учитывается также ряд требований по согласованности объемов и сроков взаимосвязанных работ. Всего модель содержит 120 ограничений и 200 переменных.

В качестве минимизируемых целевых функций рассматривались:

1) общее количество тракторов в парке;

2) прямые производственные затраты на проведение механизированных работ в напряженные периоды;

3) капиталовложения (стоимость тракторов).

Минимизация первого критерия практически равноценна максимизации производительности труда механизаторов.

После решения трех одноцелевых задач были решены два варианта компромиссных задач с разными весами целевых функций. В первом варианте компромисса мы приняли, что увеличение тракторного парка на один трактор, прямых затрат на 5600 руб. и стоимости тракторного парка на 14 000 руб. в экономическом отношении равноценны. Во втором варианте считаются сравнимыми один трактор, 3800 руб. прямых затрат и 10 000 руб. капиталовложений на приобретение тракторов. Учитывая минимальные значения M_i^* целевых функций (см. таблицу), нетрудно найти, что коэффициенты β_i (см. (6)) в первом варианте компромисса равны 1; 3 и 3,5, а во втором — 1, 2 и 2,5 соответственно. Присваиваемые нами отдельным критериям веса обратно пропорциональны этим коэффициентам.

Все задачи решались на ЭВМ «Минск-22» по программе «МЕЛЕНА» [9]. Для решения одноцелевых задач потребовалось от 1,5 до 2 *ч* машинного времени, для компромиссных вариантов — около 3 *ч*.

В таблице приведены основные показатели решений всех задач: количества тракторов отдельных типов, значения всех трех целевых функций и их относительные величины в процентах от минимально возможных значений. Количества тракторов и значения целевых функций пересчитаны на 1000 *га* обрабатываемой площади. При перерасчете на 1000 *га* пашни нужно иметь в виду, что в Эстонской ССР отношение обрабатываемой площади к пашне составляет 1,2.

Легко заметить, что в компромиссных решениях действительно учтены все три целевые функции одновременно. В обоих вариантах компромисса количество тракторов увеличивается по сравнению с минимально возможным количеством лишь примерно на 2% (против 33,7% при минимизации только прямых затрат и 17,1% при минимизации капиталовложений), прямые затраты превышают минимальные только на 5% (против 18,4% при минимизации количества тракторов). Увеличение стоимости тракторного парка сверх минимальной величины в 6 раз меньше, чем при минимизации количества тракторов.

Для сравнения в таблице приведены количества тракторов на 1000 *га* обрабатываемой площади в республике на 1 января 1974 г. Поскольку нами учтены только работы по растениеводству, для получения сравнимых данных к вычисленным количествам тракторов класса 1,4 *т* нужно прибавить 0,6 ... 1,0 трактор, а класса 0,6 *т* — 1,2 ... 1,6 трактора, необходимые (по приближенным расчетам) для обслуживания животноводства.

Из таблицы явствует, что состав и структура существующего тракторного парка близки к вычисленным в задаче минимизации прямых затрат на тракторные работы. Но поскольку в республике ощущается острый недостаток механизаторов, в предстоящие годы нужно ориентироваться на состав парка, вычисленный на основе компромиссного решения, где наибольший вес придается повышению производительности труда трактористов. Более половины тракторов класса тяги 3 *т* должны быть мощными колесными тракторами типа Т-150К. Количество тракторов класса 1,4 *т* нужно увеличить на 60 ... 80%. Резко должно сократиться количество тракторов класса 0,6 *т* — в настоящее время наиболее многочисленного. При приведенных компромиссных решениях прямые затраты на 1000 *га* обрабатываемой площади снижаются (по сравнению с тракторным парком, рассчитанным исходя из минимизации количества тракторов) на 3000 руб. и капиталовложения на приобретение тракторов — почти на 8000 руб.

5. Описанная методика применима для решения всех задач линейного программирования, в которых требуется одновременно учитывать несколько целевых функций с различными весами. Особо следует отметить, что экономико-математический смысл общенародного лозунга «Дать продукции больше, лучшего качества, с меньшими затратами» в принципе состоит также в определении компромиссного решения, учитывающего одновременно все три перечисленных критерия. При этом определение степеней относительной важности увеличения продукции, повышения ее качества и снижения производственных затрат остается задачей экспертов или директивных органов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Вентцель. Введение в исследование операций. М., 1964, 24—28.
2. O. Radzikowski. Methoden zur Einbeziehung mehr als einer Zielfunktion bei der Optimierungsrechnung. Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik (Miedzylesie bei Warschau). Vortragsmanuskript für die mehrseitige Institutskonferenz 1965 in Oberbärenburg, DDR (цит. по [5]).
3. Э. Й. Вилкас, Е. З. Майминас. К проблеме сложных решений. Кибернетика, 1968, 5, 68—73.
4. Л. А. Растригин. Системы экстремального управления. М., 1974, 566—572.
5. Х. Юттлер. Линейная модель с несколькими целевыми функциями. Экономика и математические методы, 1967, 3, 3, 397—406.
6. М. И. Тамм. Компромиссное решение задачи линейного программирования с несколькими целевыми функциями. Экономика и математические методы, 1973, 9, 2, 328—329.
7. Ю. Б. Гермейер. Введение в теорию исследования операций. М., 1971, 36—61.
8. М. Е. Салуквадзе. Задачи оптимального управления при наличии нескольких критериев качества. Автореф. докт. дисс. М., 1974, 29—34.
9. Б. Н. Михалев. Программа компактного мультипликативного алгоритма симплекс-метода с повторениями («МЕЛЕНА»). В кн.: Программы для ЭВМ «Минск-22». М., 1970, 1—107.

Эстонский научно-исследовательский институт земледелия и мелиорации

Поступила в редакцию 8/VIII 1974

A. OLM

LINEAARSE PLANEERIMISE PALJUSIHILISTE ÜLESANNETE KOMPROMISSLAHENDID

Resümee

Artiklis refereeritakse mitme sihifunktsiooniga lineaarse planeerimise ülesannete lahendamisel kasutatavaid võtteid. Sobivaimaks loetakse M. Tamme esitatud metoodikat [6]. Viimast täiendatakse kaalukoefitsientide kasutuselevõtuga võimaldamaks arvestada sihifunktsioonide erinevat tähtsusastet. Käsitletakse mõningaid kaasnevaid praktilisi probleeme. Täiustatud metoodika kasutamise rakendusliku näitena tuuakse Eesti NSV taimekasvatustööde mehhaniseerimiseks vajaliku traktoripargi optimaalse koosseisu arvutus.

Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse Teadusliku Uurimise Instituut

Toimetusse saabunud 8. VIII 1974

A. OLM

COMPROMISE SOLUTIONS OF MULTIOBJECTIVE PROBLEMS IN LINEAR PROGRAMMING

Summary

Various methods of solving linear programming problems with several objective functions are reviewed. The method proposed by M. Tamm [6] is considered the best one. In order to improve the above-mentioned method, we have introduced specific weighting coefficients for calculating objective functions of different importance. Some related problems of practical nature are discussed. For illustrating the economical efficiency of the improved method, we have computed and presented the optimal structure of a tractor fleet intended for an overall mechanization of the basic operations of field work in the Estonian SSR.

Estonian Institute of Agriculture and Land Improvement

Received Aug. 8, 1974