EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KOIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1975, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1975, № 1

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1975.1.01

Ю. ЭННУСТЕ

О ПРИНЦИПАХ КООРДИНАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ

Ниже рассмотрены вопросы координации при оптимальном планировании экономики с использованием метода разложения. Формируются два главных принципа координации и в их рамках ряд принципов. Излагаются математическая суть и экономическое содержание последних, поясняются вопросы комбинированного применения их и в заключение рассматриваются структуры связей между частными задачами, соответствующими различным принципам координации.[1]

1. Вступительные примечания

1. Под решением какой угодно задачи (в дальнейшем также исходной) оптимального планирования экономики путем разложения подразумевается нахождение оптимальных планов с помощью итеративного решения эквивалентной системы, состоящей из сравнительно более простых задач (частных). Эквивалентность означает, что решение системы определяет решение исходной задачи, а система означает, что параметрами каждой частной задачи являются также решения других частных задач (хотя бы одной).

Эквивалентная система, конечно, образовывается на базе исходной задачи, причем для этого требуется применение двух видов принципов [1] — разложения и координации. С помощью первых исходная задача разбирается на составные части, а с помощью вторых эти части связываются воедино.

Ниже мы будем заниматься только принципами координации, причем ограничимся общей трактовкой — без доказательства теорем и не вдаваясь в детали отдельных методов. В пределах возможности будем опираться на работы, где применяется дедуктивный подход, а там, где такие работы отсутствуют, исходим из эвристических и индуктивных рассуждений.[2] Таким образом, здесь ряд участков математик может рассматривать только как некоторую исследовательскую программу.

Аналогично М. Месаровичу [2], для вступления попытаемся описать систему координированных частных задач в общем виде, чтобы обосновать классификацию принципов координации. Попутно опишем классы исходных задач, на базе которых эти системы составляются.

---

[1] Автор выражает благодарность С. Ульму за многие ценные примечания к первой версии данной статьи. К сожалению, не все примечания могли быть учтены.

[2] Представляется, что принципы первого вида — принципы разложения; занимаясь структурой исходной задачи, а тем самым и ее содержанием, принципы разложения целесообразно выводить индуктивными методами и интуитивно. Принципы координации же основаны на математических методах оптимизации и таким образом по сути дела выводимы формальной логикой. В принципе последние относятся к объектам математики. Эвристические или интуитивные рассуждения применимы только в зависимости от степени разработки соответствующих математических правил.

2. Пусть $p(a,x)$ — решимая исходная задача, где a — вектор параметров, x — вектор искомого решения или плана, оптимальное значение которого обозначим через x^*. На базе этой задачи образована итеративная система частных задач

$$D(p)=\begin{cases} p_r(a_r,\ \overset{k}{u_r},\ \overset{k}{v_r}), \\ \underset{r}{u}^{k+1}=U_r v^k, \quad r\in R, \end{cases} \tag{1}$$

где $R=\{1,\ \ldots,\ s\}$ — множество частных задач; $k=1,\ 2,\ \ldots$ — шаг итерации; $p_r(\ldots)$ — частная задача r; a_r — вектор начальных параметров r-й частной задачи, $a_r=A_r a$, причем матрица A_r определена применяемым принципом разложения[3]; вектор v_r — решение частной задачи r; вектор u_r — параметр координации частной задачи r, вектор $v=(v_r)$, $r\in R$ — решение системы, равновесное значение (если оно существует) обозначим через v^0 (причем под равновесным значением подразумевается точка сходимости $v^k\to v^0$, $k\to\infty$, итерации системы $D(p)$); матрицу U_r назовем координационной матрицей частной задачи $r\in R$.

Утверждаем, что система $D(p)$ тогда и только тогда эквивалентна исходной задаче $p(a,x)$, когда равновесное значение v^0 системы существует и какая-либо заданная композиция его $G(v^0)=x^0$ равна оптимальному решению исходной задачи $x^0=x^*$.

Утверждаем также, что система частных задач дизъюнктивна, если множества индексов векторов v_r, $r\in R$ не пересекаются. В противном случае система конъюнктивна. Для уточнения этих понятий обозначим множество индексов координат вектора v_r через $R_r=\{1,\ldots,s_r\}$, таким образом: $v_r=(v_{rl})$, $l\in R_r$. Теперь заметим, что система дизъюнктивна, если $R_r\cap R_q=\varnothing$; $r,\ q\in R$, $r\neq q$, и конъюнктивна, если найдется такая пара r и q, что $R_r\cap R_q\neq\varnothing$, $r,\ q\in R$, $r\neq q$.

3. Для классификации принципов координации в системе $D(p)$ даем одно дополнительное определение и делаем предположение.

Частные задачи системы $r\in R$ делим на планирующие и координирующие. Решения v_r планирующих частных задач содержат компоненты решения x исходной задачи, при координирующих задачах такие компоненты отсутствуют. С целью уточнения обозначим множество координат решения x исходной задачи через $N=\{1,\ \ldots,\ n\}$, $j\in N$. Теперь утверждаем, что частная задача r является планирующей, если $R_r\cap N\neq\varnothing$, и координирующей, если $R_r\cap N=\varnothing$.

Понятно, что в эквивалентной системе $D(p)$ планирующие частные задачи существуют (координирующие могут существовать). Поэтому естественно принять их за основу при классификации координации. Предполагаем, что в наиболее общем виде планирующая частная задача является задачей оптимального планирования со следующей структурой:

$$\max_{v_r} f_r(v_r)\Big\}\ g_r(v_r)\geqslant b_r,\quad v_r\in V_r. \tag{2}$$

Оказывается, что данная задача имеет две так наз. основные сферы, отделенные фигурными скобками: первая представляет собой целевую функцию, вторая — систему ограничений. На их основе сформулируем два главных принципа координации: 1) если координирующие параметры u_r содержатся только в целевой функции, имеет место стимулирование, 2) если координирующие параметры содержатся только в системе ограничений, имеет место лимитирование.

В рамках этих главных принципов определим ряд принципов в зависимости от содержания, места и формы применения параметров координации. Описания важнейших принципов стимулирования даны в п. 2, описания принципов лимитирования приведем в п. 3. Если разные принципы применяются параллельно, то говорим о комбинированных принципах и рассмотрим их в п. 4.

---

[3] Выше указывалось, что принципы разложения здесь рассматриваться не будут и предполагается, что матрица A_r, $r\in R$ задана.

При описании принципов попытаемся выявить как их математическую суть, так и экономическое содержание. Для характеристики принципов опишем их свойства. Существенным свойством является применимость принципа, под которой подразумевается то обстоятельство, что при данных исходной задаче и принципе разложения можно с помощью соответствующего принципа координации создать систему частных задач, эквивалентную исходной задаче. Рассмотрим также некоторые свойства сходимости систем, сложность координации и пр.

4. Для пояснения принципов координации исходим из задачи оптимального планирования, где имеется m ограниченных результатов (ресурсов, видов продукции, целей и пр.) с индексом $i \in M = \{1, \ldots, m\}$ и n планируемых деятельностей с индексом $j \in N = \{1, \ldots, n\}$. Планируемую интенсивность применения деятельности j обозначим $x_j \in X_j$, где прямое ограничение плана X_j задано. Теперь полный план выражается в виде $x = (x_j)$, $j \in N$, $x \in X = \prod\limits_j X_j$.

Связанные с планом x ограниченные результаты $z = (z_i)$, $i \in M$, определены действительными значениями векторной функции результата: $z = g(x) = (g_i(x))$, $i \in M$. На результаты наложен вектор ограничений $b = (b_i)$, $i \in M$. Цель заключается в максимизации скалярной целевой функции $f(x)$ с действительными значениями.

Теперь можно записать следующую задачу оптимального планирования, для которой предполагается существование решения:

$$\max_x f(x) \left.\vphantom{\int}\right\} g(x) \geqslant b, \quad x \in X. \tag{3}$$

Назовем ее компактной задачей.

В общем займемся частным случаем этой задачи, когда целевая функция и функция результата аддитивно сепарабельны относительно x_j, $j \in N$. В таком случае имеем задачу

$$\max_x \sum f_j(x_j) \left.\vphantom{\int}\right\} \sum g_j(x_j) \geqslant b, \quad x_j \in X_j, \tag{4}$$

где f_j — скалярная функция с действительным значением, а g_j — векторная функция с действительным значением $g_j(x_j) = (g_{ij}(x_j))$, $i \in M$.

2. Принципы стимулирования

Из элементарных принципов стимулирования экономически особо существенны принципы цен, с рассмотрения которых и начнем. В заключение приведем некоторые замечания о принципах наложения штрафа.

2.1. Принципы цен. Трактовку принципов цен начнем с принципа цены результата. Далее рассмотрим принцип цены деятельности и принцип координированной начальной цены.

2.1.1. Принцип цены результата. 1. Исходим из сепарабельной задачи (4). Для создания эквивалентной ей системы частных задач применим следующие рассуждения. В задаче (4) деятельности связаны с общим ограничением. $\sum\limits_j g_{ij}(x_j) \geqslant b_i$, $i \in M$, для устранения которого заменим его новым членом в целевой функции, предназначенным для стимулирования выполнения этого ограничения. Дополнительный член целевой функции образуем так, чтобы он состоял из ограничений $\sum\limits_j g_{ij}(x_j) \geqslant b_i$, $i \in M$ и стимулирующей цены результата, или просто цены, которую обозначим $y = (y_i) \geqslant 0$, $i \in M$.

Таким образом, на основе (4) получим следующую координированную или стимулированную задачу в форме функции Лагранжа:

$$L(x, y) = \sum_j f_j(x_j) + \sum_i y_i \Big(\sum_j g_{ij}(x_j) - b_i \Big), \tag{5}$$

которая должна удовлетворять еще условию $x_j \in X_j$, $j \in N$.

Под решением функции Лагранжа (5) мы понимаем седловую точку (x^0, y^0), определенную как

$$L(x^0, y) \geqslant L(x^0, y^0) \geqslant L(x, y^0), \quad y \geqslant 0, \quad x \in X. \tag{6}$$

Таким образом, координированная задача (5) эквивалентна исходной (4) тогда и только тогда, когда $x^0 = x^*$ является решением задачи (4).

Пользуясь результатами С. Карлина [3], можно утверждать, что координированная задача (5) имеет решение и эквивалентна исходной задаче тогда, когда последняя вогнута. Здесь под вогнутой подразумевается такая задача, где множества X_j, $j \in N$ выпуклы, ограниченны и замкнуты, а функции $g_{ij}(x_j)$ и $f_j(x_j)$ вогнуты. Добавим, что при отсутствии предположения о вогнутости необязательно, чтобы (5), стимулированная ценами результатов, была эквивалентна исходной (4).

Необходимые и достаточные условия седловой точки (x^0, y^0) представим в виде

$$x^0 \in \{x \mid L(x, y^0) = \max, \quad x \in X\}, \tag{7}$$

$$\sum_j g_{ij}(x_j^0) \geqslant b_i, \quad i \in M, \tag{8}$$

$$y_i^0 \left(\sum_j g_{ij}(x_j^0) - b_i\right) = 0, \quad i \in M. \tag{9}$$

Для нахождения значений x^0 и y^0, выполняющих эти условия, воспользуемся итерацией по следующему принципу: 1° на основе приближения y^k найдем с помощью (7), приближение $x^k = x^k(y^k)$.

2° на основе последнего найдем $y^{k+1} = y^{k+1}(x^k)$ [4] и весь цикл повторится.

Однако для того чтобы этот процесс сходился к седловой точке, предположения о вогнутости исходной задачи недостаточно.[5] Пользуясь результатом П. Мозеке и Г. Геллинка [4], можно сделать уточнение, что для этого исходная задача должна быть «достаточно» строго вогнутой.

Нетрудно увидеть, что при таком процессе координированная задача (5) аддитивно сепарабельна относительно x_j, $j \in N$ и получается система уравнений

$$\begin{cases} \max\limits_{x_j} f_j(x_j) + \sum y_i g_{ij}(x_j), & x_j \in X_j, \quad j \in N, \\ y_i = y_i(x), \quad i \in M. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь задача координации $y_i(x)$ должна быть построена таким образом, чтобы выполнялись условия (8) и (9).

Отметим, что (10) может толковаться как система, состоящая из $s = n + 1$ или $r = n + m$ частных задач в зависимости от того, рассматривается ли задача координации $y_i(x)$, $i \in M$ как одна или m задач. Воспользуемся первым способом и обозначим задачу координации через $j = 0$.

Теперь определена также система (1) в том смысле, что заданы частные задачи $R = \{0,1, \ldots, n\}$, и решение системы $v = (y, x)$. Нетрудно увидеть, что в данном случае матрицы U_v являются векторами $U_0 = (0,1)$ и $U_j = (1,0)$, $j = 1, \ldots, n$. Структуры матриц U_r в дальнейшем применим в п. 5 при изучении морфологии частных задач.

2. Для выявления классов методов, применяющих принцип цены результата, рассмотрим типы задачи координации $j = 0$. Здесь известны два основных типа. Один из них предложен Х. Эвереттом [5], второй основан на понятии так наз. двойственных функций [6].

Идея Х. Эверетта опирается на две теоремы. Первая утверждает, что если $x(y)$ — решение $L(x, y)$ при данном y, т. е. является решением задачи $\max\limits_{x \in X} L(x, y)$, то $x(y)$ служит также решением индуцированной задачи

---

[4] Вектор ограничений b относится к параметрам функций $y^{k+1}(\ldots)$.

[5] В случае нестрогой вогнутости (линейности) выражение (7) необязательно дает при y^0 значение x^0, при котором условие (8) выполнено.

$$\left.\max_{x\in X}\sum f_j(x_j)\right\}\sum_j g_{ij}(x_j)\geqslant\sum_j g_{ij}(x(y)),\quad i\in M.$$

Очевидно, что при каком-либо заданном y индуцированный вектор ограничений $\sum g_{ij}(x(y))$ необязательно равен наложенным на исходную задачу ограничениям b. Для улучшения y таким образом, чтобы индуцированное ограничение приближалось к начальному ограничению b, Х. Эверетт использует вторую так наз. λ-теорему. Из последней вытекает, что для увеличения значения индуцированного ограничения i следует увеличить цену результата i и наоборот.

Отсюда получим следующий принцип итерации с шагом $k=1,\ldots$

1^0 выбери $y_i^{k=1}\geqslant 0$, $i\in M$,

2^0 найди $x_j^k\,(y_j^k)$, $j\in N$,

3^0 выбери на основе x_j^k, $j\in N$ новое y_i^{k+1} так, чтобы $\sum_j g_{ij}(x^{k+1})$ приближалось к b_i, $i\in M$, и вернись к действию 2^0.

Здесь для корригирования y^k можно пользоваться различными конкретными алгоритмами. Фиксацией алгоритма определен и метод.

Для пояснения метода двойственных функций образуем на основе лагранжевой функции $L(x,y)$ следующую функцию $y\geqslant 0$:

$$h(y)=\max_{x\in X} L(x,y). \tag{11}$$

Допустим, что $X(y)=\{x\mid\exists\max\limits_{x\in X} L(x,y)\}$ и на этой основе представим область определения функции $h(y)$:

$$Y=\{y\mid y\geqslant 0,\quad x\in X(y)\}.$$

Теперь утверждаем, что задача, двойственная задаче (4), выражается в виде

$$\min_{y\in Y} h(y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} L(x,y). \tag{12}$$

Нетрудно увидеть, что решением двойственной задачи является седловая точка [5].

Двойственная функция (12) дает основание для итеративного нахождения седловой точки при движении в направлении, противоположном градиенту по y. Вместе с тем антиградиент — grad $h(y)$ функции $h(y)$ легко поддается экономической интерпретации, а именно

$$-\operatorname*{grad}_y h(y)=b-\sum g_j(x_j(y)),$$

что показывает несоответствие результатов начальному ограничению b. Следовательно, при несоответствующих результатах имеет место повышение цен и наоборот.

Можно показать [6], что при строгой вогнутости (4) $h(y)$ выпукло и дифференцируется по выпуклому множеству Y. Тем самым градиент определим.

Подытожив, получим следующий принцип итерации:

1^0 выбери $y^{k=1}\in Y$,

2^0 вычисли $x_j^k(y^k)$, $j\in N$, на основе (11)

3^0 найди y^{k+1}, пользуясь градиентом на месте x^k, и вернись к действию 2^0.

Для использования градиента в свою очередь можно применять различные алгоритмы.

3. Говоря о свойствах принципа цены результата, необходимо прежде всего заметить, что этот принцип находит применение и в т. н. дискретной версии принципа максимума Понтрягина [7], а в модифицированном виде и в т. н. принципе согласования взаимодействия Месаровича [2]. Согласно результатам, полученным в [8], можно сказать, что при (4) частная задача планирования j на основе последнего принципа принимает форму

$$\max_{x_j \in X_j} f_j(x_j) - \sum_i y_i w_i \Big\} g_{ij}(x_j) + w_i \geqslant b_i, \quad i \in M,$$

содержание которой таково: стимулирование планирующей задачи ведется в зависимости от того, какую долю результата должны выполнить остальные задачи.

В экономической литературе этот принцип нередко называется также процедурой Ланге-Арроу-Гурвича, или принципом двойственных оценок [9].

О свойствах методов, основанных на принципе цены результата, можно сказать следующее:

а) методы применимы только в предположении, что исходная задача строго выпукла,

б) для образования системы разделенных задач исходная задача должна быть аддитивно сепарабельна,

в) планы-приближения x^k не обязательно должны быть балансирующими, т. е. допустимыми решениями исходной задачи,

г) сходимость немонотонна по целевой функции $f(x)$,

д) координация сравнительно проста, так как все планирующие частные задачи пользуются одним и тем же параметром координации y, корректировка которого также проста.

2.1.2. Принцип цены деятельности. 1. При принципе цены результата на планы планирующих частных задач можно влиять с помощью результатов. Поскольку последние связаны с планом x, на основе цен результатов можно образовать новые цены, непосредственно применимые к планам деятельности. Обозначим через e_j цену, предназначенную для оказания влияния на деятельность $j \in N$, а вектор этих цен через $e = (e_j)$, $j \in N$, где $e \in E = E^n$. Теперь на основе (4) можно записать координированную задачу

$$R(e) = \max_{x \in X} \sum_{j \in N} (f_j(x_j) + e_j x_j), \quad e \in E, \tag{13}$$

которая представляет собой некоторую функцию, сопряженную с функцией $\sum_j f_j(x_j)$, [10].

Интуитивно нетрудно увидеть, что при строгой вогнутости $f_j(x_j)$ решения $x(e)$ сопряженной функции (13) непрерывны и таковы, что $X \subset \{x(e)\}$. Таким образом, существует цена деятельности e^0, при которой $x(e^0) = x^0 = x^*$. В этом смысле можно сказать, что (13) эквивалентна задаче (4).

Одновременно видно, что при данной цене деятельности задача (13) аддитивно сепарабельна относительно x_j. Поэтому в случае итеративного решения задачи опять можно говорить о системе $n+1$ частных задач, где одна дополнительная задача предназначена для определения вектора e.

2. Одно из предписаний нахождения оптимальных цен e^0 таково. Пусть задача (4) решается с помощью лагранжевой функции (5), но с той разницей, что на каждом шагу итерации значение x_j при данном y корригируется путем смещения значения x_j в сторону градиента лагранжевой функции, т. е. в направлении

$$\frac{dL_j(x_j, e)}{dx_j} = \frac{df_j(x_j)}{dx_j} + \sum_i y_i \frac{dg_{ij}(x_j)}{dx_j} = f'_j(x_j) + e_j, \tag{14}$$

где $e_j = \sum_i y_i \dfrac{dg_{ij}(x_j)}{dx_j}$. Таким образом, в координирующей задаче, помимо определения y, на его основе определяется e. Получим следующий принцип итерации:

1^0 выбери $e^{k=1} \in E$,

2^0 на основе данного e^k корригируй значение x_j^k, используя для этого результат выражения (14), с учетом условия $x_j^k \in X_j$, $j \in N$,

3^0 на основе полученного x^{k+1} найди y^{k+1} и вычисли e^{k+1}, вернись к действию 2^0.

3. О свойствах принципа цены деятельности можно заметить следующее:

а) при этом принципе для построения системы частных задач, аддитивно сепарабельной относительно x_j, хотя бы целевая функция исходной задачи должна быть аддитивно сепарабельна и строго вогнута;

б) применимость принципа требует, чтобы все функции исходной задачи были дифференцируемы;

в) в сравнении с принципом цены действия, задача координации сложнее, но планирующие задачи проще.

2.1.3. О принципе координированной начальной цены. При задаче (3) с компактной целевой функцией существует еще одна возможность координации, которую можно рассматривать как принцип цены. Для пояснения сказанного исходим из частного случая (3), когда общие ограничения отсутствуют:

$$\max_x f(x) \Big\} \; x_j \in X_j, \; j \in N, \tag{15}$$

где $f(x)$ вогнуто, а X_j, $j \in N$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество.

Для итеративного решения этой задачи образуем координированную систему частных задач

$$\max_{x_j} f(\check{x}_1, \ldots, x_j, \ldots, \check{x}_n) \Big\} \; x_j \in X_j, \; j \in N, \tag{16}$$

где $\check{x}_l$, $l \in N$, $l \neq j$ — параметры координации, полученные при решении задач $l \in N$, $l \neq j$ на предыдущем шаге итерации. Сходимость решения этой системы не изучалась.[6] По экономическому содержанию метод можно назвать принципом координированной начальной цены.

О свойствах принципа заметим следующее:

а) принцип может самостоятельно применяться только при исходной задаче особой формы, где имеется компактная целевая функция и отсутствуют общие ограничения, помимо того, целевая функция должна быть строго вогнута;

б) параметрами координации служат планы-приближения планирующих частных задач, а координирующая задача отсутствует.

2.2. О принципах наложения штрафа. При этих принципах целевая функция исходной задачи дополняется членами, которые стимулируют уменьшение отклонений, возникающих между координирующими параметрами и планами-приближениями или результатами-приближениями. В соответствии с этим накладываются штрафы на основе отклонения планов или штрафы за деятельность, а также штрафы на основе отклонения результатов или за результаты. Рассмотрим оба вида указанных штрафов.

Предварительно необходимо заметить, что применяемые в теории оптимального планирования штрафы в общем таковы, что даже при сепарабельной исходной задаче нарушают сепарированность хода решения, например, при использовании членов в виде $(\sum_j g_{ij}(x_j) - b)^2$. В данном случае такие методы нас не интересуют.

2.2.1. Принцип штрафа за деятельность. При наложении штрафов на основе планов частная задача $j \in N$, получаемая на основе сепарабельной исходной (4), в принципе имеет форму

$$\max_{x_j} [f_j(x_j) - q_j(x_j, \check{x}_j)] \Big\} \; x_j \in X_j, \tag{17}$$

где $\check{x}_j$ — координирующий параметр, а $q_j(\ldots)$ — функция штрафа, зависящая от шага, которая может, например, иметь форму $r(x_j - \check{x}_j)^2$, где $r \to \infty$ — множитель, зависящий от шага. Как видно, здесь целью координирующей задачи является прогнозирование оптимального плана x^*, $j \in N$.

[6] На родственные методы и их сходимость обращается внимание в [11].

В [12, 13] представлен своеобразный метод штрафа за деятельность, который применяет конъюнктивное разделение штрафа и исходной задачи в разрезе ограничений $i\in M$. Исходя из компактной задачи (3), можно образовать систему частных задач

$$\left.\max_{x_i}\,[f(x_i)-\sum_{l\in M} r(x_i-x_l)^2]\right\}\; g_i(x_i)\geqslant b_i,\ x_i\in X,\ i\in M, \tag{18}$$

где $x_i=(x_{ji})$, $j\in N$. Здесь в частной задаче i координирующим параметром служит x_l, значение которого дает решение задачи $l\in M$ на предыдущем шаге итерации. Таким образом, вся система частных задач состоит только из планирующих задач, координирующая задача отсутствует. Однако все планирующие задачи определяют тот же план x, только исходя из различных ограничений.

2.2.2. Принцип штрафа за результат. При наложении штрафов на основе отклонения результатов и сепарабельной исходной задачи (4) частная задача $j\in N$ в принципе имеет форму

$$\left.\max_{x_j}\,[f_j(x_j)-q_j(g_j(x_j),\check{z}_j)]\right\}\; x_j\in X_j, \tag{19}$$

где $q_j(\ldots)$ — штрафная функция, а $\check{z}_j$ — координирующий параметр частной задачи. К примеру, на основе этого принципа можно образовать систему частных задач

$$\left.\max_{x_j}\,[f_j(x_j)-\sum_i r\theta(g_{ij}(x_j)+\sum_{\substack{k\in N\\ k\neq j}} z_{ik}-b_i)]\right\}\; x_j\in X_j,\ j\in N,$$

где $z_{ik}=g_{ik}(x_k)$, $k\in N$, $k=j$, принимаемое на основе предыдущего шага итерации. $\theta(t)=\min\{0,\ t\}$ и $r\to\infty$. Оказывается, координирующая задача здесь тоже отсутствует.

О применении этого принципа ничего не известно.

3. О принципах лимитирования

При принципах лимитирования на планирующие частные задачи оказывается влияние с помощью корригирования ограничений. Корригирование может вестись с помощью векторов ограничения результатов, непосредственных ограничений плана или ограничительных функций результатов. Рассмотрим их по порядку.

3.1. Принцип лимитирования результатов. 1. Как ниже будет видно, этот принцип можно рассматривать как обратный принципу цены результата. Разделение исходной задачи на самостоятельные системы координированных частных задач проводится таким путем, что общие ограничения делятся между планирующими частными задачами. Получаются координирующие ограничения на результаты частных задач, которые обозначим через $d_j=(d_{ij})$, $i\in M$, $j\in N$.

Теперь на основе аддитивно сепарабельной исходной задачи (4) имеем планирующую частную задачу $j\in N$ в форме

$$\left.\max_{x_j} f_j(x_j)\right\}\; g_j(x_j)\geqslant d_j,\ x_j\in X_j, \tag{20}$$

решение которой запишем в виде $x_j=x_j(d_j)$. Целью координирующей задачи является нахождение такого $d^0=(d^0_j)$, $j\in N$, чтобы $x^0=(x_j(d^0_j))=x^*$.

Понятно, что координирующие ограничения (d_j), $j\in N$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) частные задачи (20) должны быть решимы, т. е. должно выполняться условие

$$d_j\in D_j=\{d_j\mid \exists\, x_j\in X_j,\ g_j(x_j)\geqslant d_j\}; \tag{21}$$

2) при распределении общих ограничений b исходной задачи сумма разделенных ограничений не должна быть меньше начальной суммы, т. е. нельзя распределять боль-

ше ресурсов, чем их имеется, нельзя распределять меньше и обязанностей, чем было поручено первоначально. Иными словами, должно соблюдаться условие

$$\sum_{j\in N} d_j \geqslant b. \tag{22}$$

Обозначив значение целевой функции задачи (20) через $w_j(d_j)$, на основе (4) можно записать координированную задачу

$$\left.\max_{d} w(d) = \sum_{j\in N} w_j(d_j)\right\} \sum d_j \geqslant b,\ d_j \in D_j,\ j\in N,\ d=(d_j),\ j\in N. \tag{23}$$

А. Джеоффрион доказал [14], что (23) и (4) эквивалентны, если d^0 решает (23), а $x^0=(x^0_j)$, $j\in N$ решает (20) при ограничении d^0, то $x^0=x^*$, где x^* — решение (4). И наоборот, $d^*_j = g_j(x^*_j) = d^0$. Тем самым показано также существование решения (23).

Для выявления признака оптимальности координации d воспользуемся результатом К. Багриновского [15]. Для этого седловую точку задачи (20) обозначим через (x^0_j, y^0_j), $j\in N$, где $y^0_j=(y^0_{ij})$, $i\in M$. Теперь можно утверждать, что общее ограничение b распределено балансированно, если $\sum d_j \geqslant b$ и $y^0_j = y^0$, где y^0 — второй компонент седловой точки лагранжевой функции (5), образованной на основе исходной задачи. К. Багриновским доказано наличие балансированного распределения.

Далее указанный автор доказал теорему о том, что балансированное распределение и является оптимальной координацией d^0 в случае, когда эффективные ресурсы $(y^0_i > 0)$ полностью исчерпаны $\sum_j d^0_{ij} = b_i$.

Экономический смысл балансированного распределения состоит в том, что все общие ресурсы должны распределяться между частными задачами с таким расчетом, чтобы их предельные эффекты во всех частных задачах были равными. Если предположить, что частные задачи подчиняются закону понижающейся эффективности $(\delta y_{ij}/\delta d_{ij} < 0$, $\delta^2 y_{ij}/\delta d^2_{ij} > 0)$, понятно, что такое распределение достижимо.

Нетрудно также увидеть, что при итеративном решении (23) она распадается на $s=n+1$ частные задачи, где имеется n задач (20) и одна координирующая задача для нахождения d^0.

2. Методы итерации для нахождения d^0 исходят из предположения, что задан какой-либо допустимый вектор d, удовлетворяющий условиям $d_j\in D_j$ и $\sum d_j \geqslant b$. Далее отыскивается направление для улучшения вектора d. Обозначив производное функции $w(d)$ в направлении $s=(s_j)$, $j\in N$, $s_j=(s_{ij})$, $i\in M$, через $Dw(d,s)$, можно сказать, что наилучшее направление для корригирования d определяется из задачи

$$\left.\max_{s} Dw(d,s)\right\} s\in S(d), \tag{24}$$

где S — множество допустимых направлений [6], которое здесь уточнять не будем.

Согласно Л. Ласдону [6],

$$\left.Dw_j(d_j, s_j) = -\min_{y_j\in Y_j(d_j)} y_j s_j\right\} s\in S(d), \tag{25}$$

где $Y_j(d_j)$ — множество множителей Лагранжа в частной задаче $j\in N$.

В случае, когда функции w_j, $j\in N$ дифференцируемы, Y_j содержит только один элемент $y_j\ (d_j)$. Таким образом (24) принимает форму

$$\left.\min_{s} \sum y_j s_j\right\} s\in S(d).$$

Отсюда видно, что в координирующей задаче существенной информацией являются эффективности (цены) ограничений y_j, $j\in N$. Эту информацию дают планирующие частные задачи и на этой основе координирующая задача накладывает новые ограничения. Иными словами, в таком случае данный принцип можно рассматривать как обратный принцип цены результата в том смысле, что здесь планирующие задачи сообщают координирующей о ценах.

Если же свойство дифференцируемости отсутствует, координация оказывается сложнее. Соответствующие методы решения подобных задач разработаны А. Джеоффрионом [14] и Г. Сильверманом [16]. Одно из эвристических применений этого принципа предложено Дж. Хилом [9].

3. Принцип лимита результатов впервые применен в методе И. Корная и Т. Липтака [17]. На основе [8] этому принципу аналогичен принцип предсказания сотрудничества Месаровича. Согласно последнему, в данном случае планирующая частная задача $j \in N$ имеет форму

$$\max_{x_j} f_j(x_j) \Big\} \; g_j(x_j) + a_j \geqslant b, \quad x_j \in X_j,$$

где a_j — параметр координации.

О свойствах принципа лимита результата заметим следующее:

а) для создания сепарабельной системы частных задач исходная задача должна быть сепарабельна;

б) метод не требует строгой выпуклости функций;

в) планы-приближения в ходе итерации допустимы и сходимость монотонна;

г) координация сравнительно сложна, поскольку для координации каждой планирующей частной задачи имеется свой вектор. Сама задача координации также сложна.

3.3. Принцип лимитирования деятельностей. С одной стороны, этот принцип может рассматриваться как обратный принцип цены деятельности, а с другой, как применение лимита результатов в случае задачи особого вида. Пусть исходная задача такова:

$$\max_{x} \sum f_j(x_j) \Big\} \; \sum x_j \leqslant k, \quad x_j \in X_j, \; j \in N. \tag{26}$$

Применив в этой задаче принцип ограничения результата, получим частные задачи $j \in N$ в форме

$$\max_{x_j} f_j(x_j) \Big\} \; x_j \leqslant k_j, \; x_j \in X_j, \tag{27}$$

где k_j — параметр координации. Правую часть задачи трактуем как одно из координированных ограничений $X_j(k) = \{x_j | x_j \in X_j, \; x_j \leqslant k_j\}$, вследствие чего задача принимает вид

$$\max_{x_j} f_j(x_j) \Big\} \; x_j \in X_j(k_j), \; j \in N. \tag{28}$$

В задаче координации требуется найти такое (k^0_j), $j \in N$, чтобы решения (28) составили решение данной исходной задачи. Здесь применимы те же принципы, что и при ограничении результата, т. е. с точки зрения координации существенно знать предельные эффективности ограничений $x_j \in X_j(k_j)$. Теперь же становится очевидным, что необходимая для координации информация «обращена» в сравнении с принципом цены деятельности.

На принципе лимита деятельности в общем случае мы ниже останавливаться не будем, так как нам не известны работы, на которые можно опереться. Заметим только, что частные случаи этого принципа, где X_j (k_j) содержит всего одну точку, называются диктованием.

3.4. О принципе технологической консультации. Здесь планирующая частная задача координируется с помощью функции результата. Так, возможности или результаты деятельности одной частной задачи могут зависеть от решений остальных частных задач и пр. И наоборот, функции результата остальных частных задач могут зависеть от решения данной частной задачи. Таким образом, речь идет о таком принципе лимитирования, где координация ведется с помощью левой части системы ограничений результатов.

Пусть $g_{jc}(c_j, x_j)$ — координированная функция результата планирующей частной задачи $j \in N$, причем c_j — параметр координации. Теперь при исходной задаче (4) координированную частную задачу можно записать в форме

$$\left.\max_{x_j} f_j(x_j)\right\} g_{jc}(c_j, x_j) \geqslant b_j,\ x_j \in X_j,\ j \in N, \tag{29}$$

где параметры координации задачи j определяются либо из решений остальных планирующих задач, либо из специальной задачи координации. Исследования этого принципа не известны.

4. О комбинированных принципах координации

Как выше указывалось, цель сочетания принципов состоит или в стремлении ускорить ход итеративного решения, или в желании создать более общий метод, или же в том и другом. Понятно, что сочетание принципов сопровождается усложнением координации. Здесь существует оптимум, который зависит от структуры исходной задачи, допускаемой продолжительности хода решения, вычислительной мощности и т. д. Но эти вопросы рассматриваться не будут, остановимся лишь вкратце на экономически более интересных комбинациях, отметим разработанные до сих пор методы и их свойства. Начнем с комбинированного стимулирования, далее рассмотрим перспективные сочетания принципов стимулирования и лимитирования.

4.1. Комбинированное стимулирование. Из пяти принципов стимулирования можно составить различные комбинации. К настоящему времени известны такие сочетания, где используются только два принципа (бикоординации). В экономическом смысле при стимулировании наиболее содержателен принцип цены результата. Поэтому ниже рассматриваются лишь некоторые основанные на этом принципе комбинации.

1. Сочетание цены результата и штрафа за результат использованы Б. Поляком и Н. Третьяковым [18]. По принятым нами обозначениям структура планирующей частной задачи $j \in N$ при их методе (исходная задача (4)) такова:

$$\max_{x_j \in X_j} \left[f_j(x_j) + \sum_i y_i g_{ij}(x_j) - \sum_i q_i (g_{ij}(x_j) - b_{ij})^2\right],$$

где y_i — координирующая цена результата, b_{ij} — координирующий результат, применяемый при штрафовании.

Этот метод позволяет решать линейные задачи, причем сепарабельность исходной задачи сохраняется.

2. Принцип цены результата и штрафа за деятельность использован Л. Дудкиным в случае одного метода, решающего задачу с нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями [19]. Интересно обстоятельство, что штрафной член выражается в агрегированном виде. По этой причине автор называет это методом итеративного агрегирования.

3. По-видимому, можно найти еще несколько примеров комбинированного стимулирования, но наша цель состоит не в этом. Первого примера достаточно, чтобы проиллюстрировать применимость принципа цены к линейной задаче, если его дополнить принципом штрафа. Второй пример может представлять интерес как по скорости сходимости, так и потому, что при координации используются агрегированные показатели.

Оба примера хорошо поддаются экономическому толкованию. Дело в том, что в них планирующие частные задачи стимулируются ценами, но в то же время необходимо следить, чтобы планы не слишком отклонялись от заданных значений. Интуитивно ясно, что такое стимулирование эффективнее, чем использование только цен.

4.2. О сочетании стимулирования и лимитирования. Здесь речь идет о сочетании разных принципов, что с экономической точки зрения представляется особенно содержательным. Однако математическая сторона вопроса сравнительно сложна и пока еще мало работ в этой области. Ниже рассмотрим три из них.

1. Одним из частных случаев сочетания цены результата и лимита деятельности можно считать метод Данцига-Вульфа [20]. В принятых нами терминах этот метод можно описать таким образом. В ходе итерации планирующие частные задачи координируются с помощью цен результатов, за исключением последнего шага, где используется диктование. Подобное дополнение метода цены результата делает его применимым при линейной задаче.[7]

2. Применения цены результата и лимита результата к линейной задаче в более общем виде можно найти в [21], а на эвристическом уровне к вогнутой задаче — в [22, 9]. В принципе планирующая частная задача $j \in N$ в этих работах имеет форму

$$\max_{x_j} \left[f_j(x_j) + \sum_i y_i g_{ij}(x_j)\right] \Big\} \; g_{ij}(x_j) \geqslant b_{ij}, \; x_j \in X_j,$$

где параметрами координации служат y_i и b_{ij}.

Такая комбинация позволяет решать задачи, при отдельном применении обоих принципов нерешимые, например, линейная задача, где при некоторых $j \in N$, $f_j(x_j) \equiv 0$. При принципе цен она не решима, при применении лимита результатов тоже, потому что некоторые частные задачи могут не иметь целевой функции.

3. Применение цены деятельности и лимита результатов рассматривал Ф. Мартинес-Солер [23].

4. Вероятно, при некоторых типах исходной задачи целесообразно составлять еще другие комбинации, однако особый экономический интерес представляет синтез цены результата и лимита результатов.

5. Структура систем частных задач и их зависимость от принципа координации

Одним из аспектов декомпозиционного анализа оптимального планирования является моделирование структур разложенных систем принятия решения. В связи с этим представляет интерес изучение морфологии систем частных задач, а особенно зависимости структуры от принципа координации. Для пояснения опишем прежде всего типы структур типов задач и их соответствие принципам координации.

5.1. Структуры систем задач. При описании структуры воспользуемся понятиями уровня и связи. В настоящем ограничимся только рассмотрением структур с одним или двумя уровнями. За связи между частными задачами примем обмениваемые параметры координации и матрицы U_r, $r \in R$, описывающие их потоки в системе (1). Параметры координации, которые частная задача j посылает другим частным задачам, с точки зрения j называются инструментальными, а те координирующие параметры, которые j получает от других частных задач — индикативными.

1. Предположим, что координирующая задача в сравнении с планирующими находится на более высоком уровне, а планирующие задачи — на одном уровне. Связи между частными задачами на разных уровнях назовем вертикальными, а между частными задачами на одном уровне — горизонтальными.

2. Системы, где координирующая задача отсутствует, содержат один уровень. Таким образом, здесь имеются только горизонтальные связи. Подобную структуру называем децентральной.

3. Системы, содержащие два уровня, могут быть моно- или полицентрическими. В первом случае в системе имеется только одна координирующая задача, а во втором случае их больше.

1) Моноцентрические системы могут быть иерархическими или пирамидальными.

---

[7] Обзор линейных методов декомпозиции дан П. Хагелшуером в [24].

а) В иерархических системах имеются только вертикальные связи, их называем центрально координирующими системами.

б) В пирамидальных системах имеются как вертикальные, так и горизонтальные связи и их называем системами с центрально-децентральной координацией.

2) Полицентрические системы бывают нескольких типов в зависимости от того, находится ли на низшем уровне одна или несколько частных задач, имеются ли только вертикальные или горизонтальные связи. Дополнительно вводятся понятия обратной иерархии и обратной пирамиды.

5.2. Принцип координации как фактор структуры системы частных задач. Если в приведенных структурных терминах рассматривать системы частных задач, описанные в п. 2—4, можно увидеть, что в них естественным способом образовались системы с одним и двумя уровнями, иерархические и обратно иерархические, моноцентрические и полицентрические и т. д.

Вместе с тем видно, что принцип координации — не единственный фактор, от которого зависит структура системы задач. Некоторое влияние оказывает также структура исходной задачи (компактна или сепарабельна), а иногда и выбор задачи координации. Так, метод цены результата может рассматриваться как поли-, так и моноцентрическая иерархическая структура, один метод лимита результатов — только как моноцентрический, а другой — как полицентрический и т. д.

Зависимость структур систем частных задач от нескольких факторов делает их классификации громоздкими и поэтому мы их здесь не представляем. Только заметим, что в каждом конкретном случае подобный структурный анализ интересен прежде всего с точки зрения моделирования разложенных систем принятия решения по следующей причине. Дело в том, что реальные разложенные системы принятия решения сложны и для их моделирования необходимо создать соответствующие сложные методы декомпозиции. Но для этого недостаточно только простого сочетания принципов координации. Нужно следить и за тем, чтобы в создаваемой системе были довольно сложные связи (вертикальные и горизонтальные, иерархические и обратно иерархические и т. д.). Для их создания естественным путем, по-видимому, следует исходить из соответствующей исходной задачи со сложной структурой. Другой путь состоит в модификации систем таким образом, чтобы в них формировалась сложная структура. Например, при принципе цены результата планирующие частные задачи можно дополнить так, чтобы к ним принадлежала задача координации цен на некоторые изделия, и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Эннусте, Проблемы декомпозиционного анализа оптимального планирования. Экономика и математические методы, 1972, 8, 4, 536—545.
2. M. Mesarovič, D. Macko, Y. Takahara, Theory of Multi-Level Hierarchical Control Systems. Academic Press, New York, 1970.
3. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программирования и экономике. М., 1964.
4. P. Moeseke, G. Ghellinck, Decentralization in Separable Programming. Econometrica, 1969, 37, 1, 73—78.
5. H. Everett, Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources. Operations Research, 1963, 11, 3, 399—417.
6. L. Lasdon, Optimization Theory for Large Systems. The MacMillan Company. New York, 1972.
7. А. Пропой, Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М., 1973.
8. Y. Dirickx, L. Jennergren, D. Peterson, Some Relationships between Hierarchical System Theory and Certain Optimization Problems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, September, 514—518.
9. G. Heal, The Theory of Economic Planning. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
10. Р. Рокафеллар, Выпуклый анализ, М., 1973.
11. В. Михалевич, Ю. Ермольев, В. Шкурба, П. Шор, Сложные системы и решение экстремальных задач. Кибернетика АН УССР, 1967, 5, 29—39.
12. J. Lions, R. Teman, Une méthode d'éclament des opérateurs et des contraintes en calcul des variations. C. R. Acad. Sci., Paris 1966, 263, 563—565.

13. М. Сеа, Оптимизация: Теория и алгоритмы. М., 1973.
14. A. Geoffrion, Primal Resource-Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems. Operations Research, 1970, **18**, 3, 375—403.
15. К. Багриновский, Формирование локальных задач и распределение ресурсов. В кн.: Математические методы решения экономических задач. Новосибирск, 1971, 5—41.
16. G. Silverman, Primal Decomposition of Mathematical Programs by Resource Allocation. Operations Research, 1972, **20**, 1, 58—74.
17. J. Kornai, Th. Lipták, Mathematical Planning of Structural Decisions. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1967.
18. Б. Поляк, Н. Третяков, Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономической интерпретации. Экономика и математические методы, 1972, **8**, 5, 740—751.
19. М. Вахутинский, Л. Дудкин, Б. Щенников, Итеративное агрегирование. Изв. АН СССР, Серия экономическая, 1973, 6, 79—91.
20. G. Dantzig, P. Wolfe, Decomposition Principle for Linear Programs. Operations Research, 1960, **8**, 1, 101—111.
21. A. Charnes, R. Clower, K. Kortanek, Effective Control through Coherent Decentralization with Preemptive Goals. Econometrica, 1967, **35**, 2, 294—320.
22. Ю. Эннусте, О разложении задачи оптимального планирования производства. Изв. АН Эст. ССР. Общественные науки, 1970, 1, 3—21.
23. Ф. Мартинес-Солер, Механизмы управления процессами декомпозиции задач вогнутого программирования. В кн.: Вопросы экономико-математического моделирования. М., 1972, 248—272.
24. P. Hagelschuer, Theorie der linearen Dekomposition. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27/VI 1974

Ü. ENNUSTE

MAJANDUSE OPTIMAALSE PLANEERIMISE ÜLESANDE DEKOMPONEERITUD LAHENDAMISE KOORDINEERIMISPRINTSIIPIDEST

Resümee

Artiklis formuleeritakse kaks majanduse optimaalse planeerimisülesande dekomponeeritud lahendamise koordineerimise põhiprintsiipi ja nende raames rida printsiipe. Edasi vaadeldakse viimaste matemaatilist olemust ja majandusteaduslikku sisu, nende kombineeritud rakendamise küsimusi ja erinevatele koordineerimisprintsiipidele vastavate osaülesannete seoste struktuure.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
27. VI 1974

Ü. ENNUSTE

ON THE COORDINATION PRINCIPLES OF DECOMPOSITIONAL ECONOMIC OPTIMUM PLANNING

Summary

The paper deals with coordination principles of decompositional economic optimum planning. Two classes of coordination principles are formulated (stimulation and limitation), and several subprinciples (prices, penalties, limits, consultations, etc.) are studied. An attempt is made to describe the mathematical essence and economic content of the latter. Further, some comments are made on the combination of the subprinciples and on the structure and functioning of some decomposed planning systems.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
June 27, 1974