EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KOIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1974, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1974, № 1

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1974.1.01

Ю. ЭННУСТЕ

О ПРИНЦИПЕ ОПРЕДЕЛЕННО-ВЕРОЯТНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ, МОДЕЛЯХ И ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ЭКОНОМИКИ

В статье устанавливается такой принцип стохастического центрального планирования экономики, при котором к началу планового периода назначается определенный (детерминированный) план, а на дальнейшее представляется только вероятный план (с заданным распределением). Делается попытка доказать, что подобный принцип эффективен.

Затем описывается содержание макроэкономической задачи стохастического планирования, пытаясь сформулировать к ней детерминистические приближения, реализующие принцип определенно-вероятного планирования. Из упрощающих приближений здесь особенно уместно представление задачи с помощью средних значений и дисперсий.

Наконец, выявляется функционирование определенно-вероятной планирующей системы на нескольких уровнях, для практического применения рекомендуется координация с интервалами.

1. Введение

Классическая теория равновесия экономики и теория оптимального планирования экономики большей частью исходят из детерминистической трактовки. Однако нам кажется, что включение элементов случайности в эти теории становится все более необходимым хотя бы по следующим причинам. Во-первых, в связи с ростом влияния науки и техники на развитие экономики и неопределенностью развития их самих возрастает необходимость учета неустойчивости экономики и риска. Во-вторых, некоторые проекты становятся до того обширными и весомыми, что возможности их успеха или провала нужно учитывать уже на макроэкономическом уровне, особенно в случае структурного анализа последнего. В-третьих, современная теория стохастического планирования уже позволяет учитывать неопределенность, по крайней мере в первом приближении.

Несмотря на то что индетерминистическая теория более сложна, эффект можно ожидать как от решения конкретных плановых задач, так и от улучшения планирования и теории функционирования экономики. В планах можно будет описывать риск, оптимальные запасы, информацию и ее ценность и т. д. Теория планирования и функционирования экономики, опирающаяся на стохастическую трактовку, несомненно, более адекватна, а применение ее выводов более эффективно [1—3].

В статье сделана попытка внести некоторую ясность в проблемы центрального макроэкономического планирования, исходя из следующих рассуждений. Знания планирующего о каком-либо будущем моменте неопределенны, причем неопределенность с приближением рассматриваемого момента уменьшается. Учет указанных обстоятельств при составлении и анализе задач макроэкономического планирования позволяет в новых аспектах выявлять принципы планирования на одном и нескольких уровнях, соотношение между планом и прогнозом, планирование запасов, ценность информации в планировании и т. д.

При макроэкономическом планировании на одном уровне в случае неопределенности целесообразно охватить задачей сравнительно большой период (учетный период), но определенные плановые показатели (фиксированные величины, которые будут рассматриваться ниже) выгодно дать только на сравнительно короткий период (период определенного плана). Короткий период определенного плана позволяет на последующем шаге планирования учесть поступившую новую информацию.

Однако нельзя забывать о том, что установленные в макроэкономическом плане агрегированные показатели служат основой составления более детальных планов. Может случиться, что при коротком периоде определенного плана информации для составления детальных планов окажется недостаточно и это приведет к экономическим потерям. Для снижения последних имеется два способа:

1) удлинить период макроэкономического определенного плана,

2) короткий определенный план продолжить вероятным планом, создавая тем самым период вероятного плана (вероятный план дается с вероятностным распределением в зависимости от случайных событий).

В статье делается попытка показать, что экономически приемлем последний способ. Как приближение вероятный план можно представить с помощью доверительного интервала, причем устанавливаемый на последующем шаге планирования определенный план должен с большой вероятностью войти в этот интервал.

Не обязательно, чтобы период вероятного плана продолжался до конца учетного периода, остающийся подпериод называется периодом прогноза. Представление показателей этого периода в явном виде имеет только ориентировочное значение (в отличие от вероятного плана прогноз не связан с каким-либо соглашением о стимулировании).

Задачи определенно-вероятного оптимального планирования экономики опираются на задачи стохастического планирования в несколько стадий. Вот пример задачи из трех стадий:

$$\max_{x_{\mathrm{I}}} \mathop{E}_{\zeta_{\mathrm{I}}} \{\varphi_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}}) + \max_{x_{\mathrm{II}}} \mathop{E}_{\zeta_{\mathrm{II}}} [\varphi_{\mathrm{II}}(x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}}) + \max_{x_{\mathrm{III}}} \mathop{E}_{\zeta_{\mathrm{III}}} \varphi_{\mathrm{III}}(x_{\mathrm{III}}, \zeta_{\mathrm{III}}, x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})]\},$$

которую можно истолковать таким образом: $x_{\mathrm{I}} = \mathrm{fix}$ — определенный план, $x_{\mathrm{II}} = x_{\mathrm{II}}(\zeta_{\mathrm{I}})$ и $x_{\mathrm{III}} = x_{\mathrm{III}}(\zeta_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{II}})$ — вероятные планы.

В задачах описанного типа установление и представление x_{II} и x_{III} в практической форме затруднительно. В статье рекомендуется использовать для этого детерминистические приближения задачи, где случайные параметры описываются с помощью средних значений и дисперсий.

Задачи, представленные с помощью средних значений и дисперсий, хорошо поддаются исследованию и интерпретации посредством методов разложения, что позволяет внести некоторую ясность в принципы центрально координируемого стохастического планирования.

В статье изучается координация разложенной задачи с помощью цен (стимулирование). При этом методе подзадачи, или единицы, назначают для себя условно-оптимальные планы, используя для этого заданные центром цены. О соответствующих этим планам производственно-потребительских структурах они сообщают центру. Поскольку планируемые единицами производственно-потребительские структуры случайны (даже в случае определенных планов), то для их балансирования центр вынужден применять еще цены за риск. Итак, в стохастическом случае координация сложнее, чем при детерминистической трактовке. Для практических целей здесь в качестве упрощающего приближения целесообразно использовать так наз. координацию интервалами. В таком случае единицы сообщают центру доверительные интервалы производства и потребления.

В конце введения нам хотелось бы воспользоваться приятной возможностью поблагодарить К. Хабихта, И. Петерсена, Р. Таваста и Э. Райка за ценные замечания к более ранней редакции этой статьи. К сожалению, эти замечания удалось учесть только частично.

2. Связь между результатами определенного и вероятного планов и постановка задачи определенно-вероятного планирования

Прежде всего упрощенно поясним содержания определенного и вероятного планов, сравним ожидания их эффектов (значения целевых функций). Далее рассмотрим связь определенно-вероятного оптимального плана с определенным планом и прогнозом и вытекающие отсюда выводы.

2.1. Начнем с простого примера, который в достаточной степени содержит рассматриваемые нами понятия.

Пример 1. Пусть эффект от планируемой интенсивности действий $x \in X=[0; 10]$ будет выражен: $\varphi=\zeta x$, где ζ — случайная величина, с одинаковой вероятностью ($p_1=p_2=0{,}5$) принимающая значение 3 или -1. Отыщем такой определенный план действий, который даст наилучшее значение $E\varphi$ ожидания эффекта. Отметим, что φ не зависит от момента фиксации плана.

Оптимальный определенный план найдем из задачи: $\max\limits_x E\zeta x\} x \in [0; 10]$.* Решение $x=10$, а ожидание эффекта $E\varphi=10$.

Вероятный оптимальный план x найдем из реализуемых с одинаковой вероятностью задач:

$$\max_x 3x\} x \in [0; 10] \text{ и } \max_x (-1)\} x \in [0; 10].$$

Таким образом, вероятный оптимальный план с одинаковой вероятностью принимает значения 10 и 0. Ожидаемое значение этого результата равно $E\{\max\limits_x \zeta x \mid x \in [0; 10]\} = 15$.

Этот пример показывает, что в случае, когда эффект не зависит от момента принятия решения, ожидание эффекта определенного плана меньше, чем у вероятного плана. Это обусловлено тем, что при данных предпосылках правильнее принять решение тогда, когда имеется больше информации, иными словами тогда, когда реализация случайной величины ζ уже известна.

С целью более строгого представления этого интуитивно ясного утверждения введем следующие обозначения. Предположим, что данные плановой задачи описываются случайным вектором ζ, заданным в пространстве Z с распределением F. Пусть эффект плана x случайная функция (со случайными параметрами ζ): $\varphi(x, \zeta)$. В настоящем допустим, что значение $\varphi(x, \zeta)$ не зависит от момента фиксации плана и ζ не зависит от плана x.

Теперь определенный план (детерминированный план можно установить по так наз. принципу принятия решения «здесь и сейчас» (here and now)): $x=\{x \mid E\varphi(x, \zeta)=\max\}$. Вероятный план получим, если использовать так наз. принцип дожидания

$$x(\zeta)=\{x(\zeta) \mid \varphi(x, \zeta)=\max\}.$$

В этих терминах содержится теорема [4—6], которую теперь можно сформулировать таким образом: ожидание эффекта от оптимального определенного плана не превышает (равно или меньше) ожидания эффекта от вероятного оптимального плана: $\max\limits_x E\varphi(x, \zeta) \leqslant E \max\limits_x \varphi(x, \zeta)$, причем предполагается, что максимум и ожидания существуют.

---

* Построение $\max\limits_x E\varphi x\} x \in X$ означает: найти такое x, при котором $E\varphi x$ максимально при условии, что x входит во множество X.

Разница $E \max_x \varphi(x, \zeta) - \max_x E\varphi(x, \zeta)$ является ожидаемым значением информации, сопровождающейся знанием реализации [6]. Добавляем, что реализацию можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, о данных плановой задачи представляется полная информация (негэнтропия параметров плановой задачи равна нулю). В таком случае можно говорить об ожидаемом значении полной информации. Во-вторых, этим уточняются распределения параметров плановой задачи. В последнем случае плановая задача все же содержит негэнтропию и здесь можно говорить об ожидаемом значении дополнительной информации.

2.2. В предыдущем пункте выяснилось, что в некоторых условиях экономически выгодно медлить с фиксацией плановых показателей до тех пор, пока нет больше информации. Однако при общих экономических условиях это так только с одной стороны. С другой стороны малочисленность определенных плановых показателей связана с экономическим убытком. Это вытекает из динамической связанности экономических процессов: возможная интенсивность более поздних действий зависит от реализации предыдущих. Таким образом, с целью создания возможностей для дальнейших действий необходимо предыдущие действия реализовать с должным опережением во времени. Под «должным» мы понимаем то, что сокращение временного опережения требует дополнительных затрат, например, более быстрой реализации какого-либо проекта или параллельной разработки альтернативных проектов и пр. Реализация действий, однако, возможна только на основе определенного плана.

Понятно, что возникает вопрос, какие плановые показатели целесообразно фиксировать для данного планового периода и какие прогнозировать. Иными словами, какую часть из показателей принятия решения следует давать определенными и какую вероятными. Это самостоятельная сложная задача оптимизации, в которой необходимо взвешивать выгодность и невыгодность, связанные с фиксацией каждого показателя плана. Наиболее простым приблизительным путем решения этой задачи, которым мы и воспользуемся, является разграничение показателей во времени, причем весь плановый период разбивается на два подпериода. Показатели, относящиеся к более раннему подпериоду, определены, а показатели более позднего подпериода вероятны. Ясно то, что при более адекватном подходе какой угодно интервал планового периода может включать как определенные и вероятные показатели. К первым принадлежат те действия, которые требуют длительной подготовки, а ко вторым те, которые подготовки не требуют.

Поясним теперь на простом примере ожидаемые результаты, получаемые при разных принципах планирования.

П р и м е р 2. Различим в плановом периоде экономической единицы два подпериода: ранний (I) и поздний (II). На ней лежит обязанность покрыть в поздний период случайный спрос π на продукцию, с одинаковой вероятностью равный либо 5, либо 10 единицам продукции. Соответствующую производственную мощность можно создать или в первый, или во второй период соответственно с затратами на единицу мощности в 1 или 2 млн. руб. Продукция изготовляется только во второй период с затратами в 2 млн. руб. на единицу.

Определенный план на весь период, покрывающий спрос, выглядел бы таким: мощность в 10 единиц создать в первый период, а 10 единиц создать во второй период. Суммарные затраты составляют 30 млн. руб.

Определенно-вероятный план был бы таким: мощность в 10 единиц создать в первый период, а во второй период произвести с одинаковой вероятностью либо 5, либо 10 единиц. Таким образом, ожидаемые затраты составляют 25 млн. руб.

При вероятном плане создание мощности также предусматривается во втором подпериоде, с одинаковой вероятностью могут производиться 5 или 10 единиц продукции. Ожидаемые затраты составляют 30 млн. руб.

2.3. Для общей формулировки макроэкономической динамической задачи определенно-вероятного планирования воспользуемся еще такими понятиями и обозначениями.

Весь период, охватываемый функцией $\varphi(x, \zeta)$, назовем периодом учета* и обозначим через R. Период учета делится на интервалы (например на годы): $R=\{1, \ldots, w\}$, где w — число интервалов. Весь плановый период разобьем на два подпериода (стадии), ранний период определенного плана $R_{\mathrm{I}}=\{1, \ldots, t\}$, где $t<w$, и поздний период вероятного плана $R_{\mathrm{II}}=\{t+1, \ldots, w\}$. Соответственно этому разобьем множество параметров плановой задачи:

$$\zeta=\{\zeta_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{II}}\} \text{ и план } x=\{x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{II}}\}.$$

Допустим, что поздний вероятный план не оказывает влияния на эффект раннего определенного плана. Теперь эффект всего планового периода R можно записать таким образом:

$$\varphi(x, \zeta)=\varphi_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})+\varphi_{\mathrm{II}}(x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}}),$$

на основе чего задача определенно-вероятного планирования принимает форму

$$\max_{x_{\mathrm{I}}} \underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E}\left[\varphi_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})+\max_{x_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E} \varphi_{\mathrm{II}}(x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})\right]. \tag{1}$$

где $\underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E}$ и $\underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E}$ — операторы ожидания по ζ_{I} и ζ_{II}. Последнее представляет собой двухстадийную задачу стохастической оптимизации, где $x_{\mathrm{I}}=\mathrm{fix}$, решение x_{II} второй стадии относительно ζ_{I} условно $x_{\mathrm{II}}=x_{\mathrm{II}}(\zeta_{\mathrm{I}})$, а относительно ζ_{II} — задача определенного планирования.**

Понятно, что задачу второй стадии, в свою очередь, можно расчленить. Например, разбив вторую стадию пополам, получим трехстадийную задачу определенно-вероятного планирования:

$$\max_{x_{\mathrm{I}}} \underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E}\left\{\varphi_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})+\max_{x_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E}\left[\varphi_{\mathrm{II}}(x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})+\max_{x_{\mathrm{III}}} \underset{\zeta_{\mathrm{III}}}{E} \varphi_{\mathrm{III}}(x_{\mathrm{III}}, \zeta_{\mathrm{III}}, x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})\right]\right\}, \tag{2}$$

где $x_{\mathrm{I}}=\mathrm{fix}$, $x_{\mathrm{II}}=x_{\mathrm{II}}(\zeta_{\mathrm{I}})$ и $x_{\mathrm{III}}=x_{\mathrm{III}}(\zeta_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{II}})$. Таким образом, первая стадия — стадия определенного плана, а последующие две — стадии вероятного плана.

Теперь можно утверждать следующее (в предположении, что максимумы и ожидания φ функций существуют).

Теорема. Определенно-вероятный план для периода R преобладает над определенным планом:

$$\max_{x_{\mathrm{I}}} \underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E}\left[\varphi_{\mathrm{I}}+\max_{x_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E} \varphi_{\mathrm{II}}\right] \geqslant \max_{x} E\varphi(x, \zeta).$$

Доказательство. При любом $\hat{x}$ справедливо неравенство:

$$\underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E}\left[\varphi_{\mathrm{I}}(\hat{x}_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})+\max_{x_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E} \varphi_{\mathrm{II}}(x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, \hat{x}_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})\right] \geqslant \underset{\zeta}{E}\left[\varphi_{\mathrm{I}}(\hat{x}_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})+\right.$$
$$\left.+\varphi_{\mathrm{II}}(\hat{x}_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, \hat{x}_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})\right]=E\varphi(\hat{x}, \zeta).$$

Это верно также тогда, если $\hat{x}$ — оптимальный определенный план. Следовательно, в таком случае в правой части неравенства можно записать $\max_{x} E\varphi(x, \zeta)$, что является ожидаемым результатом оптимального определенного плана. Однако ожидаемый результат оптимального определенно-вероятного плана

---

* Выявление длительности периода учета не входит в рамки настоящей статьи. Отметим, что на практике этот период может охватывать десятки лет, что связано с большим временем вызревания инвестиций.

** Выражаясь более точно, x_{II} является задачей определенного планирования относительно $\zeta_{\mathrm{II}}(\zeta_{\mathrm{I}})$; это говорит о том, что с реализацией ζ_{I} поступает новая информация о ζ_{II}.

$$\max_{x_{\mathrm{I}}} \underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E} [\varphi_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}}) + \max_{x_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E} \varphi_{\mathrm{II}}(x_{\mathrm{II}}, \zeta_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{I}}, \zeta_{\mathrm{I}})].$$

в свою очередь, больше или равен левой части неравенства, что и требовалось доказать.

Из теоремы нетрудно сделать еще два существенных вывода.

Вывод 1. План с более короткой стадией определенного плана преобладает над соответствующим планом с более длинной стадией определенного плана в том же периоде R:

$$\max_{x_{\mathrm{I}}} \underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E} [\varphi_{\mathrm{I}} + \max_{x_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E} \varphi_{\mathrm{II}}] \geqslant \max_{\hat{x}_{\mathrm{I}}} \underset{\zeta_{\mathrm{I}}}{E} [\varphi_{\hat{\mathrm{I}}} + \max_{\hat{x}_{\mathrm{II}}} \underset{\zeta_{\mathrm{II}}}{E} \varphi_{\hat{\mathrm{II}}}], \text{ где}$$

$$R_{\mathrm{I}} = \{1, \ldots, t\} \text{ и } R_{\hat{\mathrm{I}}} = \{1, \ldots, v\} \text{ и } v > t$$

и

$$R_{\mathrm{I}} \cup R_{\mathrm{II}} = R_{\hat{\mathrm{I}}} \cup R_{\hat{\mathrm{II}}} = R.$$

Вывод 2. План с большей стадией преобладает над соответствующим планом с меньшей стадией при одинаковом горизонте определенного плана.

2.4. Из теоремы и выводов видно, что задачу планирования целесообразно ставить как определенно-вероятную с возможно бо́льшим числом стадий и короткой стадией определенного плана. Но это так только с одной стороны. С другой стороны, а прежде всего с точки зрения подсчета и применения плана, существует ряд обстоятельств, корректирующих их. Рассмотрим эти обстоятельства, причем за наиболее короткий промежуток времени примем интервал планового варианта.

Во-первых, увеличение числа стадий значительно увеличивает объем вычислительных работ, что практически является ограничением.

Во-вторых, на длину стадии определенного плана накладываются ограничения. 1) Стадия определенного плана должна равняться по меньшей мере интервалу, поскольку конечный план (применяемое решение) должен быть определенным по той причине, что неопределенное решение нельзя провести в жизнь (без какого-либо дополнительного избирательного механизма). 2) Стадия определенного плана должна по меньшей мере равняться шагу (циклу) составления плана, так как в противном случае определенный план предыдущего шага кончается до начала последующего шага и хозяйственная деятельность лишается плана. 3) Стадия определенного плана, по-видимому, должна быть тем больше, чем больше в плане агрегированных показателей, поскольку осуществление крупных экономических задач требует некоторого времени (временные лаги инвестиций).

Указанные три обстоятельства предопределяют минимальную длину стадии определенного плана.

2.5. Выявим, как при макроэкономическом определенно-вероятном планировании план следует представить исполнителям. Учтем, что план агрегирован и поэтому дает только исходные данные для детальных планов. Отсюда вытекает, что представление только определенного плана с минимальной длиной дает детализующим мало информации и это сопровождается некоторыми экономическими убытками. Для сокращения последних (для увеличения информации вниз) представляются три пути:

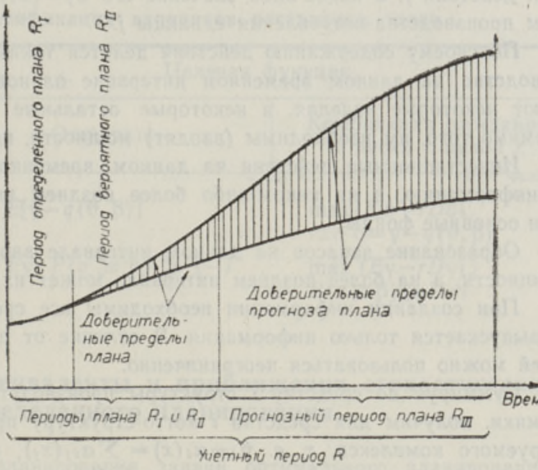
1) удлинить определенный план (сверх минимума);

2) сохранить за центром право ревизовать удлиненный определенный план соответственно поступлению новой информации;

3) дать вниз определенно-вероятный план, где определенный план имеет минимальную длину.

Нам кажется, что последний способ является наилучшим в случае удлинения определенного плана: правильная информация вниз не посылается, поскольку по истечении некоторого времени ее можно уточнить. Уточнение возможно, если имеется право ревизовать определенный план, но тогда ниже нет информации об объеме ревизии. Такую информацию дает вероятный план. Таким образом, представление определенно-вероятного плана, по-видимому, дает максимальную информацию.

Как приближение вероятную часть плана можно представить с помощью доверительных интервалов (см. рисунок), причем исполнители должны быть готовы принять на себя обязательства в пределах назначенного доверительного интервала. Если определенный план на более позднем шаге выходит из пределов доверительности, то центру надлежит дополнительно стимулировать (компенсировать) преодоление трудностей, связанных с выполнением плана. Однако при агрегированных плановых задачах на практике явно создается ситуация, когда заключение договора о стимулировании между центром и исполнителями нецелесообразно, особенно на длительный срок. Оставшийся период (до конца учетного периода R_{III}, см. рис.) назовем прогнозным (относительно плана), а задаваемый на этот период условный план — прогнозом плана. Как уже указывалось, эта информация имеет только ориентировочное значение и не связана ни с каким соглашением о стимулировании.



Описанные три подпериода учетного периода удобно интерпретировать на основе трехстадийной модели (2). Здесь $x_{\mathrm{I}}=$ =fix представляет собой определенный план на период R_{I}, $x_{\mathrm{II}}=x_{\mathrm{II}}(\zeta_{\mathrm{I}})$ — вероятный план на период R_{II}. Оба они связаны с договором о стимулировании. Таким образом, период $R_{\mathrm{I}} \cup R_{\mathrm{II}}$ назовем плановым периодом, а $x_{\mathrm{III}}=x_{\mathrm{III}}(\zeta_{\mathrm{I}}\,\zeta_{\mathrm{II}})$ является прогнозом плана на период R_{III}.

В заключение отметим, что при разложении задачи (2) по времени можно отдельно составить подзадачу плана и подзадачу прогноза (прогнозную задачу в узком значении, поскольку речь идет только о прогнозе управления). Анализ этой системы задач позволяет выяснить взаимовлияния между планом и прогнозом [7]. В самом деле, при настоящей модели прогноз управляемого параметра оказывает влияние на план, и наоборот.*

3. Описание содержания одной из задач макроэкономического стохастического планирования

Сначала опишем систему балансовых связей между экономическими действиями, затем сделаем несколько примечаний к формулировке целевой функции и представим классификацию поставок задачи.

3.1. В сравнении с детерминистской трактовкой стохастическая модель позволяет описывать экономические действия более глубоко. Здесь в векторе планируемых действий экономики $x=(x_j)$, $j \in N=(1,\ldots,n)$, помимо текущего производства и инвестирования, приобретают смысл образования запасов (запасы продукции, мощности и первичных ресурсов) и создания информации (прикладные исследования и планирование). Для более точного описания действий прежде всего поясним понятие средств.

Обозначим средство, используемое в каком-либо действии, через общий индекс $i \in M=(1,\ \ldots,\ m)$. Эти m средств разделим на изделия (получаемые из текущего производства, запасов или ввоза, т. е. сюда относятся также услуги, энергия и пр.), мощ-

* При настоящей модели можно различить между тремя объектами прогноза: параметры плановой задачи, оптимальный план и соответствующий ему результат (эффект и балансы производства-потребления).

ности или основные фонды (созданные в предшествовавшие моменты), первичные ресурсы (рабочая сила и природные богатства) и информацию (прежде всего мы имеем в виду технологическую информацию).

При применении действия $j \in N$ с интенсивностью x_j производится (выдается) или потребляется (вводится) средство $i \in M$. Предположим, что при интенсивности x_j интенсивность производства или потребления средства i описывается случайной функцией $\vartheta_{ij}=\alpha_{ij}(x_j)$. В случае производства $\vartheta_{ij}>0$, а в случае потребления $\vartheta_{ij}\leqslant 0$. Случайный вектор $\vartheta_j=\alpha_j(x_j)=(\alpha_{ij}(x_j))$, $i \in M$, назовем функцией производства-потребления действия j, а какое-либо значение его $\vartheta_j=(\vartheta_{ij})$, $i \in M$, — структурой или вектором производства-потребления единицы j.

По своему содержанию действия делятся таким образом. Действия текущего производства на данном временном интервале планового периода, по-видимому, выпускают некоторые изделия, а некоторые остальные по всей вероятности потребляют. Помимо того, им необходимы (вводят) мощности, первичные средства и информация.

Инвестиционные действия на данном временном интервале потребляют изделия и информацию, а на каком-либо более позднем интервале они выпускают мощности или основные фонды.

Образование запасов на данном интервале вводит определенного вида изделия и мощности, а на более позднем интервале может их выпускать.

При создании информации необходимы все средства (в том числе информация), а выпускается только информация. В отличие от других средств созданной информацией можно пользоваться неограниченно.

Суммируя по средству i структуры производства-потребления всех действий экономики, получим для средства i нетто-структуру производства-потребления всего планируемого комплекса, т. е. $\vartheta_i=\alpha_i(x)=\sum\limits_{j\in N}\alpha_{ij}(x_j)$, $i \in M$. Поэтому случайную векторную функцию $\vartheta=\alpha(x)=(\alpha_i(x))$, $i \in M$, назовем производственно-потребительной функцией экономики. Нетто-продукцию экономики ($\vartheta_i>0$) можно использовать вне рассматриваемого комплекса, а нетто-потребление ($\vartheta_i\leqslant 0$) в части продукции нужно удовлетворять ввозом, при первичных средствах — соответствующими ресурсами и т. д. В настоящем предположим, что нижний предел объема производства-потребления всего комплекса и верхний предел использования первичных ресурсов поддаются прогнозированию, а это выражается случайным вектором.

Учет указанного предела β можно моделировать следующими известными приемами *: 1) оценить убыток от превышения допускаемого предела ($\beta_i-\vartheta_i>0$) и учесть его в целевой функции, или 2) потребовать, чтобы вероятность нарушения ограничения ($\vartheta_i<\beta_i$) была достаточно мала. Первый прием называется также компенсацией, а второй — вероятностными ограничениями.

Хотя с экономико-теоретической точки зрения целевая функция с компенсацией как будто предпочтительнее, в практических расчетах нередко целесообразнее исходить из задачи с вероятностными ограничениями. Нам представляется, что опираясь на опыт, в первом приближении легче определить допускаемую вероятность нарушения балансовых ограничений (размер допуска), чем оценить величину затрат, связанных с нарушением.

3.2. В настоящем предположим, что эффективность плана x (результат действия) оценивается на основе структуры экономики (вектора производства-потребления). Иными словами, структура экономики $\vartheta=\alpha(x)$ служит аргументом стохастической скалярной функции $\gamma=\gamma(\vartheta)=\gamma(\alpha(x))$, выражающей эффективность комплекса.

В зависимости от того, ставится ли задача с вероятностными ограничениями или компенсацией, получают два различных класса целевых функций.

В первом случае аргументом целевой функции служит только соответствующая плану нетто-структура производства-потребления экономики. В задаче с компенсацией целевая функция включает в явном виде также вектор ограничений β.

---

* Основой здесь служит только задание определенного плана.

Функция γ, описывающая эффект, является стохастической. Поскольку случайные величины не поддаются непосредственному упорядочению, то для составления целевой функции задачи приходится пользоваться еще дополнительными теориями [8, 9]. Здесь мы ограничимся только ожиданием эффекта $E\gamma$, а также линейной комбинацией ожидания эффекта и его дисперсии (т. н. неоклассическая теория): $E\gamma - rD\gamma$, где D — оператор дисперсии, а r так наз. цена на риск.

Все принципиальные классы задач оптимального планирования, которые можно формулировать с помощью изложенных выше понятий, сведены в таблицу.

Принципиальная классификация вариантов постановки задач

Ограничения	Целевая функция	
	Ожидание	Комбинация ожидания и риска с ценой r
Замененные с компенсацией q	$\max E[\gamma - q(\vartheta, \beta)]$	$\max (E\delta - rD\delta)$, где $\delta = \gamma - q(\vartheta, \beta)$
Вероятностные с допуском l	$\max E\gamma\} P(v \geqslant \beta) \geqslant 1-l$	$\max (E\gamma - rD\gamma)\} P(v \geqslant \beta) \geqslant 1-l$

4. Детерминированные эквиваленты и приближения стохастических задач определенного планирования

По теории стохастического планирования задачи оптимального планирования с определенным планом решаются с помощью детерминированных эквивалентов.

Возможности образования детерминированных эквивалентов, однако, до сих пор известны только для узких частных случаев описанной выше полностью стохастической задачи (все параметры стохастические). Для трактовки полностью стохастической задачи в настоящем использованы детерминированные приближения.

При этом ставится цель создать задачи, которые 1) были бы полностью стохастические, 2) позволяли бы практически разработать и представить определенно-вероятный план, и 3) поддавались бы анализу методами декомпозиции для того, чтобы выяснить принципы функционирования планирующих систем.

Начнем с рассмотрения эквивалентных задач детерминированного определенного плана частично-стохастической задачи, затем сформулируем два приближения для более общего случая.

4.1. При задачах с непрерывными случайными параметрами известны точные методы только для тех частных случаев, когда задачи линейны, а координаты вектора ограничений и множители целевой функции случайны [10—16].

4.1.1. Для решения линейной задачи оптимизации с непрерывным случайным вектором ограничений $\beta = (\beta_i), i \in M$, (chance-constrained problem) известны два метода, различные по своему экономическому содержанию. Первый исходит из стохастической задачи, где вероятность нарушения ограничений снижена. Второй метод исходит из задачи, где нарушение ограничений влечет за собой штраф.

Первая линейная форма для нахождения оптимального определенного плана $x = (x_j)$, $j \in N$ такова:

$$\left.\max_{x \geqslant 0} cx \right\} P(a_i x \geqslant \beta_i) \geqslant t_i, \ i \in M, \tag{3}$$

где заданные векторы $c = (c_j)$, $j \in N$ и $a_i = (a_{ij})$, $i \in M$, $j \in N$ определенны. Для случайной величины β_i, $i \in M$ дан непрерывный закон распределения $F_i(\beta_i)$, причем $P(\ldots)$ символ вероятности, t_i, $i \in M$ — заданный определенный скаляр, $t_i = 1 - l_i$, l_i — размер допуска.

В задаче (3) предполагается, что известна вероятность l_i, с которой балансовый результат $a_i x$ может быть меньше значения ограничения β_i.

Для решения задачи (3) с помощью данного закона распределения $F_i(\beta_i)$, $i \in M$ находят такой квантиль $\hat{b}_i$, который превышается β_i не с большей вероятностью, чем l_i (l_i — квантиль): $\hat{b}_i = F_i^{-1}(l_i)$. Теперь можно записать детерминированную задачу эквивалентной задаче (3)

$$\left.\max_{x \geqslant 0} cx \right\} a_i x \geqslant \hat{b}_i, \ i \in M. \tag{3a}$$

Предположив, что $t_i > 0{,}5$, ограничение $\hat{b}_i$ можно назвать осторожным в том смысле, что $\hat{b}_i > E_{\beta_i}$. При нормальной β_i имеем $\hat{b}_i = E_{\beta_i} + t_{li}\, \sigma_{\beta i}$, где значения t_{li} находят из таблиц стандартного распределения.

Из-за значительных упрощений исходной задачи (3) здесь выявление планирования запасов и создания информации довольно сложно, это делается только при общих задачах.

Второй метод, применяемый для трактовки линейной задачи с непрерывным случайным вектором ограничений β, ставит исходную задачу с помощью так наз. компенсации или вспомогательного источника (recourse). Эта исходная задача называется также двухступенчатой (two-stage). Постановка исходной задачи полностью (complete problem) изложена в [14]:

$$\left.\max_{x \geqslant 0} \left[cx + E(q^+ \delta^+ + q^- \delta^-)\right] \right\} Ax + \delta^+ - \delta^- = \beta, \ \delta^+, \delta^- \geqslant 0, \tag{4}$$

где q^+ и q^- — векторы заданных размеров компенсации.

В постановке задачи (4) предполагается, что по существу известен экономический убыток, связанный с нарушением ограничения, наложенного на $i \in M$, на одну единицу.

Для решения задача (4) преобразовывается в детерминированную задачу выпуклого планирования. При равномерном распределении вектора β детерминированный эквивалент представляет собой задачу квадратичного планирования [14].

4.1.2. Более общей задачей, для которой известно преобразование в решимый детерминированный эквивалент, является задача стохастического линейного планирования со случайной целевой функцией и ограничениями. Для этого подходит постановка [13, 16], основанная на максимизации значения квантиля f, заданного при случайной целевой функции:

$$\left.\max_{x \geqslant 0} f \right\} P(\gamma x \geqslant f) = h, \ P(a_i x \geqslant \beta_i) \geqslant s_i, \ i \in M, \tag{5}$$

где $\gamma = (\gamma_j)$, $j \in N$ — случайный вектор с заданным непрерывным распределением $F(\gamma)$, h — скаляр.

Детерминистский эквивалент другого ограничения наложенного на задачу (5), уже описан в пункте 4.1.1. С целью преобразования первого ограничения обозначим:

$$E\gamma = c = (c_j), \ j \in N, \ D\gamma = V = (v_{ij}), \text{ где}$$
$$v_{ij} = E[(\gamma_i - c_i)(\gamma_j - c_j)], \ i, j \in N.$$

Теперь $D\gamma x = x'Vx$, квадратный корень из него обозначим через $\sigma_{\gamma x}$. Далее можно сказать, что

$$P(\gamma x \geqslant f) = P\left(\frac{\gamma x - cx}{\sigma_{\gamma x}} \geqslant \frac{f - cx}{\sigma_{\gamma x}}\right) = F\left(\frac{f - cx}{\sigma_{\gamma x}}\right) = h.$$

Таким образом, $\dfrac{f - cx}{\sigma_{\gamma x}} = F^{-1}(h) = e$ и $f = cx - e\sigma_{\gamma x}$.

Решение последней задачи и целевой функцией затруднено, поскольку она содержит квадратный корень. Но эта целевая функция эквивалентна функции $f = cx - \frac{e}{R} x'Vx$, где указание к определению R дано в [16]. Это неоклассическая целевая функция, учитывающая среднее значение результата cx и его рассеивание $x'Vx$. При этом цена на риск e/R зависит от заданной вероятности h.

4.2. Для решения стохастических задач оптимизации, более общих, чем описанные выше, пока нет точных методов. Однако экономический интерес представляют именно более общие задачи. Таким образом, их изучение с помощью детерминированных приближений можно считать оправданным. Ниже будут описаны два приближения.

4.2.1. Случайный вектор ζ параметров задачи планирования экономики непрерывен, или множество Z непрерывно. Ради упрощения его можно аппроксимировать множеством $\widehat{Z}$, которое дискретно и конечно. По существу мы предполагаем, что возможное число состояний природы конечно и обозначаем эти состояния через $k \in K = \{1, \ldots, s\}$. Таким образом, множество $\widehat{Z}$ заключает в себе s точек и столько же имеется возможных реализаций $z_k \in \widehat{Z}$ вектора параметров ζ, где p_k вероятность z_k задана $(\Sigma p_k = 1)$.

В линейном случае с помощью этого упрощения получаем следующую детерминированную аппроксимацию [17]:

$$\left.\max_{x \geqslant 0} \sum_k p_k c_k x \right\} A_k x \geqslant b_k, \; k \in K, \tag{6}$$

где $z_k = (c_k, A_k, b_k)$.

С экономической точки зрения эта задача отличается крайней осторожностью (отсутствие допуска): план x должен при всех ожидаемых состояниях природы $k \in K$ удовлетворять ограничениям вне зависимости от вероятности p_k состояния k. Решение этого приближения предусматривает создание излишних запасов и информации.

Добавляем, что задача (6) будет практически очень крупномерной. Она состоит из S задач, что делает его составление и решение трудоемким.

4.2.2. Одним из путей приблизительного описания непрерывных случайных величин является их представление только с помощью средних значений и дисперсий, или стандартных отклонений, без определения формы законов их распределения. Таким упрощением можно построить для полностью стохастической задачи планирования экономики ряд детерминированных приближений [18]. Последние легко поддаются анализу и решению. Хорошо приближение, по-видимому, можно записать так:

$$\left.\max_x \left[E\gamma(x) - rD\gamma(x)\right] \right\} E\left[\sum_j \alpha_{ij}(x_j) - \beta_i\right] \geqslant$$

$$\geqslant t_{vi} \sqrt{D\left[\sum_j \alpha_{ij}(x_j) - \beta_i\right]}, \; i \in M, \tag{7}$$

где целевая функция неоклассическая, а ограничения аппроксимируют вероятные ограничения при условии $P(\sum_j \alpha_{ij}(x_j) \geqslant \beta_i) \geqslant v_i$. Предполагается, что распределения нормальны, тогда t_{vi} представляет собой t-Стьюдента.

Из-за квадратного корня, содержащегося в ограничениях, решение задачи (7) затруднено. Поэтому целесообразно подыскивать менее адекватные, но более простые приближения. Одним из них является задача, где рассеивание балансовых результатов экономики $\Sigma \alpha_{ij}(x_j) - \beta_i$, $i \in M$, непосредственно ограничено этой дисперсией. Для описания содержания линейной задачи обозначим:

$$E\gamma_j = c_j, \; E\alpha_{ij} = a_{ij}, \; E\beta_i = b_i, \; D\gamma_j = \sigma^2_{\gamma j},$$

$$D\alpha_{ij} = \sigma^2_{ij}, \; D\beta_i = \sigma^2_i, \; i \in M, \; j \in N.$$

Теперь сформулируем задачу, предположив, что параметры стохастически независимы:

$$\max_{x_j \geqslant 0} \left(\sum_j c_j x_j - r \sum_j \sigma_{\gamma j}^2 x_j^2\right) \Big\} \sum a_{ij} x_j \geqslant b_i, \tag{7a}$$

$$\sum \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \sigma_i^2 \leqslant d_i, \ i \in M,$$

d_i — задано и определяет допускаемое рассеивание балансового результата.

В случае, когда вследствие ограничения рассеивания балансовых результатов существенно ограничено также рассеивание целевой функции, можно считать, что $r=0$. Теперь получим новую, более простую задачу, которую назовем (7b) с целевой функцией и квадратным ограничением. Если требуется заменить квадратные ограничения на линейные, то дисперсии следует заменить стандартными отклонениями [19]. Для этого допустим, что $\sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \sigma_i^2} \approx \frac{1}{k_i} \left(\sum_j \sigma_{ij} x_j + \sigma_i\right)$, где k_i — поправочный коэффициент. Теперь можно записать линейное приближение

$$\max_{x_j \geqslant 0} \sum c_j x_j \Big\} \sum_j a_{ij} x_j - \frac{t_{vi}}{k_i} \left(\sum_j \sigma_{ij} x_j + \sigma_i\right) \geqslant b_i, \ i \in M. \tag{7c}$$

В задачах (7)—(7c) действия по созданию запасов и информации хорошо поддаются описанию. Дело в том, что по соответствующему ресурсу запасы имеют дисперсию или стандартное отклонение со знаком минус *, но для создания этих отрицательных членов необходимы другие ресурсы. Создание информации также требует всех средств, но позволяет включить план действий, связанных с меньшей дисперсией.

5. О двух методах оценки результата задачи с вероятным планом

5.1. Простой и распространенный, но трудоемкий путь к прогнозированию оптимально-вероятного плана и его эффекта состоит в имитации ожидаемых ситуаций. В линейном случае имитация означает решение задачи

$$\max_{x_k \geqslant 0} c_k x_k \Big\} A_k x_k b_k, \tag{8}$$

в s раз при условии $k \in K = \{1, \ldots, s\}$. При достаточно большом s с помощью множества решений x_k^0, $k \in K$, можно оценить распределение оптимального плана, иными словами, составить вероятный план. Для его приблизительного представления рекомендуется использовать доверительные интервалы вероятного плана.

Выше уже указывалось, что этот метод относится к цифровым, он очень трудоемок и не подходит для аналитического исследования.

5.2. Подобных недостатков лишен метод, основанный на оценке вероятного плана с помощью его среднего значения и дисперсии. Но применение указанного метода требует введения ряда дополнительных условий и поэтому более приблизительно.

Здесь планируются для планового показателя x_j, $j \in N$, среднее значение $\bar{x}_j$ и дисперсия σ_{xj}^2. Последняя определяется по принципу, что отклонение x_j от $\bar{x}_j$ должно компенсировать отклонения, обусловленные параметрами задачи.

В качестве пояснения рассмотрим случай, когда ограничения включают модель Леонтьева:

---

* При подсчете «отрицательной дисперсии» или отрицательного стандартного отклонения» в случае запасов необходимо принимать во внимание закон распределения балансового результата.

$$x_j = \sum_j \alpha_{ij} x_j + \beta_i,\ i, j \in M,$$

где α_{ij} и β_i — независимые случайные величины. Среднее значение плана находим из задачи

$$\max_{\bar{x}_j} \sum_j c_j \bar{x}_j \Big\} \bar{x}_j = \sum a_{ij} \bar{x}_j + b_i,\ i, j \in M,$$

а дисперсию плана σ^2_{xj}, $j \in N$ определим приблизительно из линейной системы уравнений

$$Dx_j = \sigma^2_{xj} \cong \sum_j (\sigma^2_{ij} \bar{x}^2_j + \sigma^2_{xj} a^2_{ij} + \sigma^2_{ij} \sigma^2_{xj}) + \sigma^2_{\beta i}{}^*,\ i, j \in M.$$

Отсюда видно, что применение этого метода требует введения ряда ограничений в зависимости от формы задачи, но допускает аналитическую трактовку.

5.3. Сравнительно проста интервальная оценка эффекта вероятного оптимального плана. Для этого нижние и верхние пределы пространства Z значений параметров задачи обозначим соответственно через $\lfloor z$ и $z \rfloor$, таким образом, $\zeta \in Z = [\lfloor z,\ z \rfloor]$. Теперь предположим, что $\varphi(x, \zeta)$ по ζ не убывает, а $\max_x \varphi(x, \zeta)$ существует при любом $\zeta \in Z$. При таких условиях очевидно, что значения результата заключены в интервале $[\max_x \varphi(x, \lfloor z),\ \max_x \varphi(x, z \rfloor)]$. Для линейного случая последний пример доказан в труде [20]. Здесь $\lfloor z = (\lfloor c,\ \lfloor A,\ \lfloor b)$ и $z \rfloor = (c \rfloor,\ A \rfloor,\ b \rfloor)$. Теперь получаем пару задач:

$$\max_x \lfloor cx \Big\} \lfloor Ax \geqslant \lfloor b \quad \text{и} \quad \max_x c \rfloor x \Big\} A \rfloor x \geqslant b \rfloor,$$

между результатами которых заключен какой угодно результат $\zeta \in Z$. Однако вместе с тем видно, что какой угодно оптимально-вероятный план не заключен между решениями этой пары.

5.4. Из [6] вытекает, что «оптимистическая» точечная оценка эффекта вероятностного плана может быть найдена при решении задачи на оптимум с использованием средних значений параметров. Для пояснения рассмотрим вогнутую функцию $f(u)$, которая в любой точке u^0 имеет градиент $\nabla f(u^0)$. Из-за вогнутости существует неравенство: $f(u) \leqslant f(u^0) + \nabla f(u^0)(u - u^0)$.

Допустим, что результат $\varphi(x, \zeta)$ задачи на оптимум вогнут по ζ и существует $\max_x \varphi(x, \zeta)$ при любом $\zeta \in Z$. Тогда получим неравенство

$$E \max_x \varphi(x, \zeta) \leqslant \max_x \varphi(x, z) + \nabla\varphi(x, z)(E\zeta - z) = G(z),$$

где z в какое-либо значение ζ. В работе [6] доказано, что $G(z)$ минимально в точке $z = E\zeta$, в самом деле, в этой точке $G(E\zeta) = \max_x \varphi(x, E\zeta)$, однако

$$\max_x \varphi(x, E\zeta) \leqslant \max_x \varphi(x, z) + \nabla\varphi(x, z)(E\zeta - z).$$

Из изложенного вытекает, что $E \max_x \varphi(x, \zeta) \leqslant \max_x \varphi(x, E\zeta)$. Это означает, что оценка эффекта, найденная по среднему значению, превышает ожидаемый эффект вероятностного плана и в этом смысле оптимистична. Несмотря на такой недостаток, большое преимущество состоит в удобстве нахождения оценки, поскольку решать нужно только одну задачу.

---

* Приблизительно $\sigma^2_{xj} \cong \sum_j \sigma^2_{ij} \bar{x}^2_j + \sigma^2_{\beta i}$, так как по существу $\bar{x}^2_j,\ \sigma^2_{\beta i} \geqslant \sigma^2_{ij},\ a^2_{ij},\ \sigma^2_{xj}$.

6. Задачи с определенно-вероятным планом

Для краткости разобьем весь плановый период только на две части: I — ранний подпериод определенного плана, II — поздний подпериод вероятного плана. Выделение так наз. прогнозного периода или интервалов в периодах не сопровождается никакими принципиальными проблемами, но обзорность снижается. Обозначим определенный план через x_{I}, а вероятный план через x_{II}, параметры этих периодов запишем в виде ζ_{I} и ζ_{II}.

Для пояснения еще раз отметим, что план x_{II} вероятный только относительно ζ_{I}: $x_{\mathrm{II}}=x_{\mathrm{II}}(\zeta_{\mathrm{I}})$, так как ко времени фиксации плана второго подпериода известна только реализация ζ_{I}, но ζ_{II} по-прежнему случайна. Таким образом, x_{II} относительно ζ_{II} является определенным планом.

Теперь рассмотрим два приближения полностью стохастической задачи: во-первых, случай, когда число состояний природы предполагается конечным, и во-вторых, аппроксимацию случайных величин с помощью средних значений и дисперсий. Согласно двум последним пунктам можно комбинировать и другие классы задач.

6.1. В предположении, что множество состояний $\widehat{Z}$ конечно, поставим линейную задачу. Допустим, что у значений параметров, связанных с определенной частью планового периода, различают u наборов состояний, вероятности которых заданы. Общий индекс состояния обозначим через $s=1,\ldots,u$, причем p_{I}^{s} известно $(\sum\limits_{s} p_{\mathrm{I}}^{s}=1)$. У параметров, связанных с вероятной частью плана, различают v состояний: $t=1,\ldots,v$, причем p_{II}^{t} также известно $(\sum\limits_{v} p_{\mathrm{II}}^{t}=1)$.

Теперь можно сформулировать следующую задачу на оптимум с определенно-вероятным планом:

$$\left.\max_{x_{\mathrm{I}},\, x_{\mathrm{II}}} \left(\sum_{s} p_{\mathrm{I}}^{s} c_{\mathrm{I}}^{s} x_{\mathrm{I}} + \sum_{s} p_{\mathrm{I}}^{s} \sum_{t} p_{\mathrm{II}}^{t} c_{\mathrm{II}}^{t} x_{\mathrm{II}}^{s}\right)\right\} \tag{9}$$

$$A_{\mathrm{I}}^{s} x_{\mathrm{I}} \geqslant b_{\mathrm{I}}^{s},\quad s=1,\ldots,u. \tag{10}$$

$$A_{\mathrm{I\,II}}^{s} x_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}^{t} x_{\mathrm{II}}^{s} \geqslant b_{\mathrm{II}}^{t},\quad s=1,\ldots,u;\ t=1,\ldots,v, \tag{11}$$

где x_{I} — определенная часть плана, x_{II} — вероятная часть плана описывается множеством решений x_{II}^{s}, $s=1,\ldots,u$. Векторы c_{I}^{s}, b_{I}^{s} и матрица A_{I}^{s} описывают только параметры, связанные с первым подпериодом планового периода. Векторы c_{II}^{t}, b_{II}^{t} и матрица A_{II}^{t} описывают параметры, связанные со вторым подпериодом. Матрица $A_{\mathrm{I\,II}}^{s}$ описывает влияние плана первого подпериода на второй.

В решении $(x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{II}})$ задачи (9)—(11) содержится для первого подпериода такой оптимально-определенный план x_{I}, который учитывает также ожидание результатов оптимально-вероятных планов x_{II}^{s} второго подпериода. Как видно, в качестве решения задачи для второго подпериода получаем u планов x_{I}^{s}, $s=1,\ldots,u$. При достаточно большом u на их основе можно оценивать как распределение x_{II}, так и доверительные интервалы.

Итак, задача (9)—(11) служит хорошей иллюстрацией идей определенно-вероятного планирования. Однако для практического применения в экономике размерность этой задачи слишком велика, а план оказывается чрезмерно осторожным (см. 4.2.1).

6.2. Для описания одной определенно-вероятной задачи с помощью средних значений и дисперсий воспользуемся результатами, представленными в 4.2.2 и 5.2. Учтем, что дисперсия $\sigma_{x_{\mathrm{II}}}^{2}$ плана x_{II} должна балансировать отклонения, вероятные в связи со случайностью тех параметров первого подпериода, которые влияют на план второго подпериода. По существу здесь речь идет об отклонениях основных фондов и запасов, переходящих из первого подпериода, которые план второго подпериода должен быть в состоянии компенсировать.

На основании изложенного можно записать следующую простую задачу: найти неотрицательные $\overset{\mathrm{I}}{x}_j$, $\overset{\mathrm{II}}{\bar{x}}_j$ и $\overset{2}{\sigma}_{j\mathrm{II}}$ так, чтобы

$$\sum_j (\overset{\mathrm{I}}{c}_j \overset{\mathrm{I}}{x}_j + \overset{\mathrm{II}}{c}_j \overset{\mathrm{II}}{x}_j) = \max \tag{12}$$

при условиях

$$\sum_j \overset{\mathrm{I}}{a}_{ij} \overset{\mathrm{I}}{x}_j \geqslant \overset{\mathrm{I}}{b}_i, \tag{13}$$

$$\sum_j (\overset{\mathrm{I\,II}}{a}_{ij} \overset{\mathrm{I}}{x}_j + \overset{\mathrm{II}}{\bar{a}}_{ij} \overset{\mathrm{II}}{\bar{x}}_j + \check{a}_{ij} \overset{2}{\sigma}_{j\mathrm{II}}) \geqslant \overset{\mathrm{II}}{b}_i, \tag{14}$$

$$\sum_j \overset{2}{\sigma}_{ij\mathrm{I}} \overset{2}{x}_{j\mathrm{I}} + \overset{2}{\sigma}_{\beta i\mathrm{I}} \leqslant d_{i\mathrm{I}}, \tag{15}$$

$$\sum_j [\overset{2}{\sigma}_{ij\mathrm{I\,II}} \overset{2}{x}_{j\mathrm{I}} + \overset{2}{\sigma}_{ij\mathrm{II}} \overset{2}{\bar{x}}_{j\mathrm{II}} + \overset{2}{\sigma}_{j\mathrm{II}} \overset{2}{a}_{ij\mathrm{II}}] + \overset{2}{\sigma}_{\beta i\mathrm{II}} \leqslant d_{i\mathrm{II}},\ i \in M,\ j \in N, \tag{16}$$

где $\bar{a}_{ij}$ и $\check{a}_{ij}$ — коэффициенты производства и потребления для $\bar{x}_j$ и σ_j^2 соответственно.

Ограничения (13) и (14) наложены на средние значения балансов производства-потребления. Ограничение (15) снижает отклонения балансовых результатов в первый подпериод. Ограничение (14) играет ту же роль во второй подпериод, причем учитываются также переходящие из первого подпериода отклонения.

Решение задачи затрудняют квадратичные ограничения (15)—(16), но она легко поддается анализу методами декомпозиции.

7. Принципы функционирования системы определенно-вероятного планирования на нескольких уровнях

Анализ разложения определенно-вероятных задач оптимального планирования экономики [21] представляет интерес в двух отношениях. Во-первых, стохастические задачи оптимизации крупномерны и нередко имеют блочную структуру, что говорит о целесообразности их центрального решения с помощью методов декомпозиции [18, 19]. Во-вторых, экономическая интерпретация методов декомпозиции этих задач позволяет внести больше ясности в вопросы функционирования планирующей системы в условиях стохастики, а тем самым в проблемы оптимального функционирования централно координируемой стохастической экономики вообще. Ниже имеется в виду именно этот аспект.*

Ограничимся рассмотрением задачи (12)—(16), решаемой с помощью средних значений и дисперсии, поскольку анализ задачи с предположением, что множество состояний конечно не приводит к хорошим экономико-научным выводам.

7.1. Рассмотрим решение задачи (12)—(16) методом декомпозиции в случае, когда координация подзадач (задач единиц) ведется с помощью цен [26]. Для разложения задачи каждое действие $j \in N$ как в первый, так и во второй период примем за условно автономную единицу. Каждая единица устанавливает для себя условно-оптимальный план так, чтобы максимизировать разницу между поступлениями и расходами произведенных ими потребленных средств в ценах, заданных центром. Центр назначает цены на все средства, на которые в исходной задаче наложены ограничения.

* Труды [22—25], опубликованные по вопросу равновесия экономики, рассматривают прежде всего децентральный случай и наличие равновесия. В настоящей статье сделана попытка изучить эту проблему в первую очередь под углом зрения централно координируемой экономики и ее функционирования (достижения равновесия).

Оказывается, что в исходной задаче имеется два вида ограничений. Первый описывает средние значения производства и потребления, второй — их рассеивание (дисперсию). Цены на ограничения первого вида можно рассматривать как обычные цены при купле и продаже. Цены на ограничения второго вида представляют собой цены за риск. Единица, которая в плане создает положительную дисперсию, должна расплачиваться за это ценой за риск, назначенной центром. За эту цену единица получает, так сказать, свободу действовать в некотором интервале. Полученный доход центр использует для образования запасов, необходимых в связи с предоставлением единицам свободы действий.

Действия, возмещающие рассеивание (создание запасов и информации) и тем самым выпускающие отрицательную дисперсию, получают от этого доход на основе цен за риск, устанавливаемых центром. Их затраты связаны с приобретением необходимых средств.

Далее, на основе условно-оптимальных планов единицы посылают информацию в центр. Последний использует новую информацию для корректировки цен, приближения их к равновесным ценам исходной задачи. На основе исправленных цен начинается новая итерация.

Для корректировки цен центру нужны не только условные планы единиц, но и соответствующие результаты производства-потребления. Допустим, что случайная величина α_{ij} — параметр производства-потребления средства i единицей j. Тогда при плане x_j по средству i результат будет $\alpha_{ij}x_j$. Оказывается, что результат случаен как при определенном, так и при вероятном плане. Таким образом, единицы, составляющие определенно-вероятные планы, сообщают центру только вероятные результаты и в этом аспекте между ними нет различия.

Вместе с тем видно, что планирование отклонений по потребленным средствам всегда требует от единиц затрат (положительная дисперсия), но при произведенных средствах возникают различные случаи в зависимости от того, принадлежит единица к периоду определенного или вероятного плана. В первом случае стимулируется уменьшение рассеивания продукции (положительная дисперсия), а во втором — его увеличение (отрицательная дисперсия). По существу проблема заключается в следующем. При определенных планах центр заинтересован в том, чтобы производственный результат единицы не отклонялся от намеченного равновесного значения. Но при вероятном плане центр заинтересован в том, чтобы единица предусматривала достаточно широкие возможности варьирования объема продукции. В первом случае большие отклонения означают увеличение запасов, а во втором случае — снижение их. Разумеется, что для варьирования объема продукции необходимо создать запасы мощностей. Таким образом, по сути дела, в период вероятного плана стимулируется создание запасов мощностей.

Обмен информацией между центром и единицами происходит до тех пор, пока ограничения исходной задачи не будут выполнены довольно точно. Тогда композиция оптимальных планов единиц с достаточной точностью является оптимальным решением исходной задачи. Сходимость итеративного процесса обеспечивается выпуклостью задачи.*

7.2. Определение или оценка дисперсий экономистами вобщем не проводится. Поэтому при планирующей системе, охватывающей множество хозяйственных единиц, целесообразно заменить среднее значение и дисперсию на доверительный отрезок и соответственно модифицировать правила координации.

---

* Добавляем, что решение исходной задачи путем разложения возможно еще по другому принципу координации, т. е. лимитированием, что заключается в следующем. Центр распределяет по единицам ограничения, наложенные на исходную задачу. В пределах этих ограничений единицы решают условные задачи на оптимизацию и сообщают центру двойственные решения, соответствующие ограничениям. Последние показывают эффективность смещения ограничений и тем самым позволяют центру корректировать ограничения. В настоящем единицам следовало бы наложить ограничения как на средние значения производства-потребления, так и на дисперсии.

Дело в том, что случайный результат $\vartheta_{ij}=\alpha_{ij}x_j$ производства-потребления приблизительно может быть описан соответствующим доверительным отрезком $\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij}=[\llcorner\vartheta_{ij}, \vartheta^{\urcorner}_{ij}]$, где $\vartheta^{\urcorner}_{ij} \geqslant \llcorner\vartheta_{ij}$ конечные точки доверительного отрезка. Оценка значений последних сравнительно удобна. Если теперь единицы сообщают центру отрезки $\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij}$, $i\in M$, $j\in N$, то на их основе центр может дать оценку средним значениям и дисперсиям, проверить выполнение ограничений исходной задачи. Координация единиц центром ведется так: единицам сообщают о ценах на средства, действующих на показанных ими доверительных отрезках, и цены на длину доверительного отрезка или цены за риск.

7.3. В представленных предписаниях координации единицы $j\in N$ передают в центр вероятные структуры производства-потребления $\vartheta_j=(\vartheta_{ij})$, $i\in M$. Так как последние случайны, то возникают особые проблемы — избежать в этих сообщениях надувательства ($\vartheta_j\neq\alpha_j x_j$) и стимулировать, так сказать, неискаженные сообщения $\vartheta_j=\alpha_j x_j$. Для обеспечения достоверности передаваемых данных необходимо считать их планами единиц и тем самым учитывать их в стимулировании результатов работы единиц. Обозначим реализацию структуры производства-потребления единицы j через $y_j=(y_{ij})$, $i\in M$. Теперь функция стимулирования единицы j должна включать в себя два аргумента: y_j и ϑ_j.

Одну из функций стимулирования можно наглядно описать на примере интервальной координации. Пусть имеется функция стимулирования единицы j по средству i:

$$s_{ij}(y_{ij},\vartheta_{ij})=\lambda_i y_{ij}-(\vartheta^{\urcorner}_{ij}-\llcorner\vartheta_{ij})\eta_i-$$
$$-\begin{cases} \varrho_i, & y_{ij}\notin\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij} \\ 0, & y_{ij}\in\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij} \end{cases}.$$

Пусть по всем средствам функция стимулирования будет: $s_j=\sum\limits_i s_{ij}$.

Параметры этой функции истолкуем так: λ_i — цена i на средство, y_{ij} — производство ($y_{ij}>0$) или потребление ($y_{ij}\leqslant 0$) средства i единицей j, η_i — цена за риск и ϱ_i — штраф за надувательство.

Допустим, что, по мнению руководителя единицы, j $\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij}$ является доверительным интервалом. Нетрудно увидеть, что при подходящих η_i и ϱ_i руководителю единицы лучше планировать промежуток $\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij}$, чем какой-либо другой промежуток $\overset{\sqcup}{\vartheta}_{ij}$, так как

$$Es_{ij}(\vartheta_{ij},\overset{\sqcap}{\vartheta}_{ij})\geqslant Es_{ij}(\vartheta_{ij},\overset{\sqcup}{\vartheta}_{ij}).$$

Действительно, если выбрать более широкий интервал, то цена за риск больше, при узком интервале можно ожидать штрафа за надувательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Беляев, Вопросы оптимизации больших систем в вероятностных ситуациях. Экономика и математические методы, 1967, 3, 6, 811—818.
2. Н. Федоренко и др., Проблемы оптимального функционирования социалистической экономики. М., 1972.
3. G. Tintner, J. Sengupta, Stochastic Economics. Academic Press, New York, 1972.
4. O. Mangasarian, J. Rosen, Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming Problems. Operations Research, 1964, 12, 1, 143—154.
5. Э. Райк, Неравенства в задачах стохастического программирования. Изв. АН Эстонской ССР. Физ. Мат., 1970, 19, 3, 292—298.
6. M. Avriel, A. Williams. The Value of Information and Stochastic Programming. Operations Research, 1970, 18, 5, 947—954.
7. А. Боярский, О методе долгосрочного прогноза в условиях планового хозяйства. Экономика и математические методы, 1972, 8, 6, 867—877.

8. G. Magnùsson, Production under Risk. Acta Universitatis Upsaliensis, Studia Oeconomica Upsaliensia. Uppsala, 1969, 2.
9. Э. Эннусте, О постановке и составлении задач на оптимальное производство с риском. Изв. АН Эстонской ССР. Общественные науки, 1971, 1, 77—86.
10. P. Kall, Der gegenwärtige Stand der stochastischen Programmierung. Unternehmensforschung, 1968, 2, 81—95.
11. M. Dempster, On Stochastic Programming. 1. Static Linear Programming under Risk. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **21**, 1968, 304—343.
12. J. Sengupta, G. Tintner, A Review of Stochastic Linear Programming. Review of the International Statistical Institute, 1971, 39, 2, 197—223.
13. S. Kataoka, A Stochastic Programming Model. Econometrica, 1963, **31**, No 1—2.
14. R. Wets, Programming under Uncertainty: The Complete Problem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1966, 4, 316—339.
15. R. Wets, Programming under Uncertainty: The Equivalent Convex Program. SIAM Journal on Applied Mathematics, **14**, 1, 1966, 89—105.
16. В. Колбин, В. Танская, Некоторые задачи стохастического линейного программирования и алгоритмы их решения. Сб. Математические программы и вычислительные методы оптимального планирования. М., 1971, 391—401.
17. Е. Гольштейн, Д. Юдин, Новые направления в линейном программировании. М., 1966.
18. Ü. Ennuste, Uncertainty, Information and Decomposition in the Planning of a Production System. Economics of Planning, 1969, **9**, 3, 258—266.
19. G. Danzig, Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, 1963.
20. B. Machost, Numerische Behandlung des Simplexverfahrens mit intervallanalytischen Methoden. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, No 30. Bonn, 1970.
21. Ю. Эннусте, Элементы и проблемы декомпозиционного анализа задач оптимального планирования. Экономика и математические методы, 1972, 8, 4, 535—545.
22. G. Debreu, Theory of Value. Wiley, New York, 1959.
23. R. Radner, Competitive Equilibrium under Uncertainty. Econometrica, 1968, **36**, 1, 31—58.
24. B. Stigum, Competitive Equilibria under Uncertainty. The Quarterly Journal of Economics. 1969, LXXXIII, 4, 533—561.
25. Е. Дынкин, Некоторые вероятностные модели развивающейся экономики. Доклады Академии наук СССР, 1971, **200**, 3, 523—525.
26. L. Lasdon, Optimization Theory for Large Systems. The MacMillan Company. New York, 1972.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/IV 1973

Ü. ENNUSTE

MAJANDUSE KINDLA-TÕENÄOLISE PLANEERIMISE PÕHIMÕTTEST, MUDELITEST JA FUNKTSIONEERIMISEST

Resümee

Artiklis püstitatakse majanduse stohhastilise tsentraalse planeerimise selline põhimõte, mille kohaselt planeerimisperioodi alguseks määratakse kindel (determineeritud), kuid edaspidiseks esitatakse ainult tõenäoline plaan (antud jaotusega). Püütakse tõestada, et selle põhimõtte rakendamine on efektiivne.

Edasi kirjeldatakse makroökonoomilise stohhastilise planeerimisülesande sisu ning püütakse sellele formuleerida deterministlikke lähendeid, mis realiseeriksid kindla-tõenäolise planeerimise põhimõtte. Lihtsustavatest lähenditest osutub siin eriti sobivaks ülesande kirjapanek keskväärtuste ning dispersioonide abil.

Lõpuks selgitatakse kindla-tõenäolise mitmetasemelise planeerivsüsteemi funktsioneerimist ning soovitatakse praktiliseks rakenduseks intervallkoordineerimist.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
29. IV 1973

Ü. ENNUSTE

ON THE PRINCIPLE, MODELS AND FUNCTIONING OF ECONOMIC CERTAIN-PROBABLE PLANNING

Summary

The paper sets such a principle of the central stochastic planning of economy by which a certain (determined) plan is fixed only for the beginning of the planning period, and a probable plan is presented for the future. An attempt is made to prove the efficiency of applying this principle.

Further, the content of a stochastic macroeconomic planning problem is described, and it is attempted to formulate determined approximations for it, so as to realize the principle of certain-probable planning. By simplifying approximations, the writing of the problem with the help of mean values and dispersions proved to be especially suitable here.

The functioning of a certain-probable multilevel planning system is described, and interval coordination is advised for applying it in practice.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
April 29, 1973