EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1973, № 3

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1973.3.05

MARI SAAT

AJAST SÕLTUVA REGRESSIOONMUDELI SOBIVUSEST JA USALDATAVUSEST MAJANDUSLIKE NÄITAJATE PROGNOOSIMISEL

Artiklis püütakse selgitada majanduslike näitajate ajast sõltuvate ekstrapolatsioonprognooside kohta, kuju ja usaldatavust. Rõhutatakse vajadust varustada nad usalduspiiridega ja selgitatakse viimaste tuletamist. Käsitlust alustatakse sobiva kujuga mudeli valikust ja selle vastavale statistikaperioodile sobivuse hindamisest. Edasi käsitletakse prognoosimudeli usaldatavuse hindamise võimalikke viise.

1. Regressioonmudeli valik

Igasugune nähtus on kestev ja muutlik, mistõttu teda võib kujutada ajast sõltuvana. Muidugi ei tähenda see, et ta muutub aja toimel, s. t. et eksisteerib sõltumatu «aeg», mis oma muutumisega kõiki teisi nähtusi mõjustab. Aja all mõistame abstraktsiooni, mis iseloomustab kõigi asjade ja nähtuste vastastikust mõjustamist ja sellest tulenevat muutumist kui protsessi. Konkreetse nähtuse uurimisel kerkib selles protsessis esile rida nähtusi, mis on temaga tihedamalt, vahetumalt seotud kui ülejäänud ning milledel on temale otsene mõju. Nimetame neid mõjuteguriteks. Tööviljakus näiteks sõltub eelkõige tehnika, tootmise organiseerimise ja mõne muugi teguri muutumisest ning me võime ta esitada nende tegurite funktsioonina. Mingit nähtust mõjustavaid tegureid aga on enamasti arvutult, kusjuures me tihti ei taha ühtki neist eriliselt rõhutada ega teisi sellega tagaplaanile jätta. Tihtipeale ei saagi me seda teha, kuna me neist ja nende seosest uuritava nähtusega liiga vähe teame. Sel puhul võtamegi appi mõiste «aeg», mis üldistab kõigi nähtuste koosmõju, seostame uuritava nähtuse muutumise ajaga. Nii võime majandusliku näitaja (y) arenemisseaduse kirjeldamiseks kasutada regressioonmudelit $\hat{y}=f(x)$, kus sõltumatuks muutujaks (x) on aeg.

Regressioonmudeli parameetrite leidmiseks tasandame aegread vähimruutude meetodil, mis on täiuslikumaid aegridade tasandamise viise. Selle meetodi puhul otsitakse võrrandit etteantud funktsioonide klassis, määrates eelnevalt funktsiooni (astme-, logaritm-, eksponent- jne. funktsiooni) kuju ja kasutades vaatlusandmeid vaid parameetrite määramiseks. Nähtuse arenemist väljendava funktsiooni kuju võib valida kahel viisil:

1) sisulis-teoreetilisest kriteeriumist lähtudes, kui meil majandusteooriast või praktikas korduvalt kinnitust leidnud kogemustest on teada, millised funktsiooni kujud kirjeldavad antud nähtust kõige paremini;

2) formaalseist, statistilistest kriteeriumidest lähtudes, kui meil ei ole mingeid muid andmeid ega oletusi nähtuse arenemise kohta peale statistilise aegrea. Sel puhul võime katsetada mitmete erinevate funktsioonidega ja hinnata nende sobivust nähtuse kirjeldamiseks vaid puhtstatistiliste näitajate põhjal. Siinjuures tuleks rõhutada, et hinnata tuleb võimalikult paljude kriteeriumide järgi, s. t. ka esimesel juhul tuleb valitud funktsiooni sobivust hiljem formaalsete kriteeriumide abil kontrollida.

Meid huvitab teine juhtum: püüame prognoosida, millist arengut võiks eeldada olemasolevate statistiliste andmete põhjal. Säärase, nn. puhta prognoosi mõtteks on anda mõningaid lähtepunkte, n.-ö. esialgne mudel hilisema täpsema sisulise prognoosi tegemiseks. Järelikult on meil kasutada vaid hindamise formaalsed kriteeriumid.

Funktsiooni sobivuse hindamise formaalsed meetodid põhinevad funktsiooni väärtuste ($\tilde{y}_k$) ja statistilise rea väärtuste (y_k) vaheliste hälvete mõõtmisel. Vähimruutude meetodi põhitingimuseks on, et $\tilde{y}_k$ ja y_k vaheliste hälvete ruutude summa peab olema minimaalne. Sellest tulenevalt on hindamisel peamiseks kriteeriumiks jääkstandardhälve (S) või jääkdispersioon (S^2):

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}[y_k-f(x_k)]^2}{m-(n+1)}} \qquad (1)$$

kus $m-(n+1)$ — vabadusastmete arv;

n — sõltumatute muutujate arv regressioonvõrrandis. Meil on sõltumatuks muutujaks (x) aeg; lineaarvõrrandi $y=ax+c$ puhul ilmselt $n=1$; ruutvõrrandis $y=ax+bx^2+c$ käsitab vähimruutude meetod x^2 kui teist sõltumatut muutujat. Järelikult $n=2$ jne.;

m — regressioonvõrrandi hindamiseks tehtud vaatluste arv; aegrea puhul (kui vaatlusühikuks on aasta) aastate arv statistikaperioodil.

Et vähimruutude meetodil leitakse funktsiooni parameetrid põhimõttel $Q=\sum\limits_{k=1}^{m}(y_k-\tilde{y}_k)^2=\min$, siis peaks nähtavasti ka erinevatest funktsiooni kujudest olema parim see, mille Q on vähim. Q vähim väärtus saab ilmselt olla null. Selle saavutamiseks peaksid kõik tasandatud ja statistilise rea väärtused ühte langema, s. t. funktsiooni kujutav kõver peaks läbima kõik vaatluspunktid. Läbi kahe punkti ($m=2$) saab tõmmata sirge, millele vastab lineaarfunktsioon ($n=1$). Kolm punkti ($m=3$) määravad teise astme joone ($n=2$). Üldiselt määravad m vaatluspunkti $m-1$ astme funktsiooni. Rakendades selle parameetrite leidmiseks vähimruutude meetodit, saamegi $Q=\sum\limits_{k=1}^{m}[y_k-f(x_k, x_k^2, x_k^{m-1})]^2=0.$ Sellise funktsiooni puhul oleks küll täidetud meetodi põhitingimus, kaoks aga tema rakendamise mõte, sest kasutatakse ju seda meetodit statistilise rea tasandamiseks, nähtuse üldise arenemistendentsi (trendi) määramiseks. Säärane funktsioon aga peegeldaks kõrvalekaldeid trendist ning jätaks arenemissuuna üldistamata. Seega ei võimaldaks ($m-1$) astmel funktsiooni rakendamine tasandada statistilist rida, vaid leida statistilise rea enda parameetreid. Kuna trend jääb määramata, ei saa leida ka jääkstandardhälvet kui trendi ja statistilise rea keskmist erinevust. S peab olema määramatus. Selleks peab valemis (1) murru nimetaja muutuma nulliks — ja tõepoolest, kui $n=m-1$, siis $m-(n+1)=0$.

Valemist (1) näeme, et S vähendamiseks on meil ühest küljest kasulik valida võimalikult lihtsa kujuga madala astme funktsioon: n oleks siis väiksem ja murru nimetaja ($m-(n+1)$) seetõttu suurem. Keerukama kujuga funktsioon aga jälgib täpsemalt statistilise rea võnkeid, vähendades seega murru lugejat ($\sum(y_k-\tilde{y}_k)^2$). Seega väheneb ka S, mida me püüamegi saavutada. Samal ajal aga on keerukama kujuga funktsioonil suurem vabadusastmete arv (n), mille tõttu murru nimetaja omakorda väheneb ja kutsub esile S suurenemise, mida me ei soovi. Nii kujutab formaalse kriteeriumi S abil sobiva funktsiooni leidmine endast optimeerimisülesannet, kus f_j ($j=1, 2, \ldots, q$) funktsioonide hulgast tuleb valida säärane, et S_{f_j} oleks minimaalne.

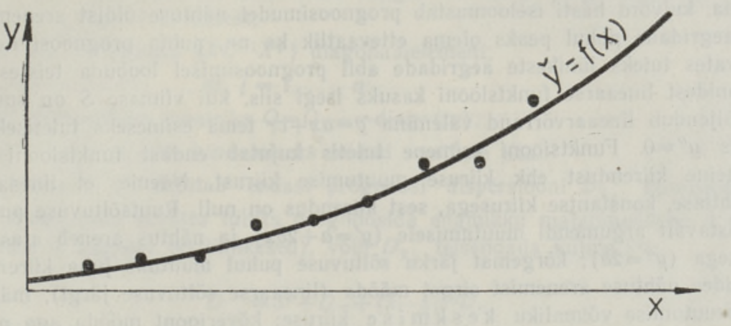
Näeme, et tasandamisel ei otsi me statistilisele reale mitte ainult võimalikult sobivat funktsiooni, mis võimalikult täpselt järgiks statistilise rea võnkeid, vaid nõuame ka funktsiooni teatud sõltumatust statistilise rea väärtuste, nimelt nende juhuslikkuse suhtes: tasandusfunktsiooni väärtusi loetakse keskmisteks, millest kõrvalekalded statistilisel perioodil olid juhuslikud. Eeldades, et senine trend jääb püsima, oleksid tulevikuski nähtuse tegelike väärtuste kõrvalekalded trendist juhuslikud ning me võime leitud tasandusfunktsiooni kasutada prognoosimiseks.

2. Regressioonmudeli usaldatavus

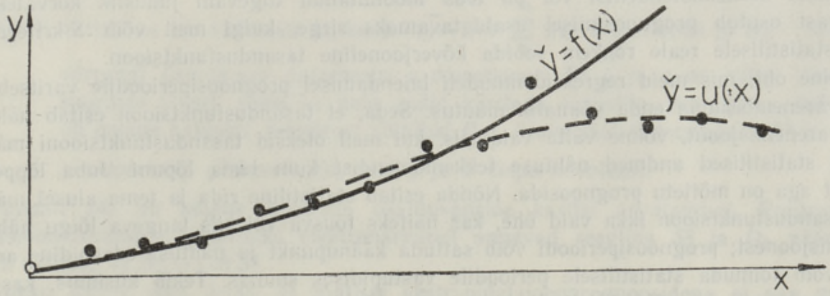
Eelnevas käsitluses piirdusime regressioonmudeli valikuga vastavalt statistilisele reale. Nüüd vaatame, kuidas kontrollida valitud mudeli sobivust prognoosimiseks, kuidas hinnata tema usaldatavust sellest aspektist.

Laiendades leitud mudeli prognoosiperioodile, tuleb meil arvestada kahesugust ohtu.

Esiteks võivad tugevamad juhuslikud kõrvalekalded avaldada mõju määratavale trendile ja anda vale ettekujutuse nähtuse edasisest arenemisest. Olgu näiteks teada nähtuse K statistilised väärtused y_1 kuni y_9 (joonisel 1 ja 2 tähistatud ristikestega). Nende tasandamisel saaksime S-kriteeriumi järgi parimaks tasandusfunktsiooniks mingi funktsiooni $\check{y}=f(x)$.



Joon. 1



Joon. 2

Oletame, et meil täienesid andmed nähtuse K kohta veel nelja vaatluse võrra (joonisel 2 väärtused y_{10} kuni y_{13}). Nüüd selgub, et prognoos kõvera $f(x)$ järgi oli vale. Väärtuse y_9 tõttu, mis osutus järsuks kõrvalekaldeks nähtuse üldisest arenemissuunast, prognoosisime üha kiireneva arenemise, tegelikult arenemine aga aeglustus ning vahe prognoositud väärtuste $f(x_i)$ ja tegelike väärtuste y_i, $i=10, \ldots, 13$, vahel üha suureneb. Seepärast oleks prognoosimiseks paremini sobinud kõver $\check{y}=u(x)$. Kui $i=1, \ldots, 9$ puhul $S_{f(x)}<S_{u(x)}$, siis $i=1, \ldots, 13$ puhul vastupidi $S_{f(x)}>S_{u(x)}$.

Mida pikem on statistiline periood, seda väiksem mõju on juhuslikel kõrvalekalletel meie poolt, s. o. subjektiivselt määratud trendile ning seda väiksem on iga vaatluse, s. o. juhusliku väärtuse kaal trendi määramisel. Seega võime küllalt pika vaatlusperioodi puhul eeldada, et regressioonmudel esindab küllalt täpselt statistilise perioodi tegelikku trendi. Seda eeldust võime pika aegrea puhul hõlpsasti kontrollida retrospektiivsete arvutuste abil [1, 2]. Selleks jaotatakse statistiline aegrida kaheks: esimese perioodi (l) jooksul määratakse nähtuse muutumise tendents ja saadud mudeli abil toimub järgneva perioodi (k) «prognoosimine». Arvestusi korratakse, nihutades perioodi l mööda aegrida edasi, nii et

$l_1=1, 2, \ldots, i$ ja $k_1=i+1, i+2, \ldots, n$; $l_2=2, 3, \ldots, i+1$ ja $k_2=i+2, i+3, \ldots, n+1$ jne.; $n \leq N-1$, kus N — kogu statistilise perioodi pikkus. Perioodi k tegeliku väärtuse y_{l+k} ja arvutatud väärtuse $\check{y}_{l+k}$ võrdlusel saame suhtelise ennustusvea e^p:

$$e^p = \frac{y_{l+k} - \check{y}_{l+k}}{\check{y}_{l+k}} \tag{2}$$

Korduvate retrospektiivsete arvutuste tulemustega saame hinnata e^p jaotusseadust. e^p jaotusseaduse väljaselgitamiseks ei piisa ühest, kahest, ka mitte kolmest retrospektiivsest arvutusest, kusjuures perioodi l pikkuseks peaks olema vähemalt 9—10 aastat. Meil aga on majanduslike näitajate statistiliste aegridade pikkuseks tihti vaid kümmekond aastat. Seetõttu ei ole meil sageli võimalik rakendada retrospektiivsete arvutuste meetodit ega kontrollida, kuivõrd hästi iseloomustab prognoosimudel nähtuse üldist arenemistendentsi. Selliste aegridade puhul peaks olema ettevaatlik ka nn. puhta prognoosi rakendamisel. Meie arvates tuleks lühikeste aegridade abil prognoosimisel loobuda teistest tasandusfunktsioonidest lineaarse funktsiooni kasuks isegi siis, kui viimase S on suurem. Nagu teada, väljendub lineaarvõrrand valemina $y=ax+c$; tema esimeseks tuletiseks on $y'=a$ ja teiseks $y''=0$. Funktsiooni esimene tuletis kujutab endast funktsiooni muutumise kiirust, teine kiirendust ehk kiiruse muutumise kiirust. Näeme, et lineaarfunktsioon areneb ühtlase, konstantse kiirusega, sest kiirendus on null. Ruutsõltuvuse puhul muutub kiirus vastavalt argumendi muutumisele ($y'=a+2bx$) ja nähtus areneb ajas konstantse kiirendusega ($y''=2b$); kõrgemat järku sõltuvuse puhul muutuks juba kiirendus. Seega prognoosides nähtuse arenemist sirget mööda (lineaarse sõltuvuse järgi), määrame selle nähtuse muutumise võimaliku k e s k m i s e kiiruse; kõverjoont mööda aga prognoosime ebaühtlase kiirusega liikumist, s. t. siin tuleb ette näha ka kiirendus. Lühikeste aegridade puhul pole meil võimalik kontrollida, kas tasandusfunktsiooniga määratud kiirendus esindab üldist arenemistendentsi või on teda moonutanud tugevam juhuslik kõrvalekalle. Seepärast osutub prognoosimisel usaldatavamaks sirge, kuigi meil võib S-kriteeriumi järgi statistilisele reale rohkem sobida kõverjooneline tasandusfunktsioon.

Teine oht, mis meid regressioonmudeli laiendamisel prognoosiperioodile varitseb, on üldise arenemissuuna enda võimalik muutus. Seda, et tasandusfunktsioon esitab nähtuse üldist arenemisjoont, võime väita vaid siis, kui meil oleksid tasandusfunktsiooni määramiseks statistilised andmed nähtuse tekkemomendist kuni tema lõpuni. Juba lõppenud nähtust aga on mõttetu prognoosida. Nõnda esitab statistiline rida ja tema alusel määratud tasandusfunktsioon ikka vaid ühe, kas näiteks tõusva või siis langeva lõigu nähtuse arenemisjoonest; prognoosiperioodi võib sattuda käänupunkt ja nähtuse edaspidine arenemine võib toimuda statistilisele perioodile vastupidises suunas. Tekib küsimus, kas nn. puhas prognoos on põhimõtteliselt üldse võimalik ja usaldatav ning mil määral peab paika tema aluseks olev eeldus, et statistilisel perioodil ilmnenud üldine arenemistendents püsib ka tulevikus. Omadus, mis siiski teeb võimalikuks prognoosimise, s. t. regressioonmudeli laiendamise tulevikule, on i n e r t s u s: teatud kui tahes väikese ajavahemiku Δt jooksul säilib paratamatult nähtuse senine arenemissuund ja suurus.

Tõenäoliselt võib pidada inertsemaks, paremini prognoositavaks sellist nähtust, mille statistiline aegrida on püsivam, ühtlasem, S väiksem (seda vähem ta allub juhuslikele kõrvalmõjudele), samuti nähtust, mille trend on sirge (nähtuse üldine arenemiskiirus on ühtlane, kiirendus puudub). Kõverjoonelise trendi kiirendus väljendab nähtust mõjustavate p e a m i s t e tegurite mõjujõu suurenemist või kahanemist, nendevahelise tasakaalu rikkumist, jõudude ümberpaigutust, s. t. ühtlase arenemiskiirusega võrreldes kriitilist seisukorda nähtuse arenemises, mille tõttu ka selle perioodi alusel tehtud prognoos on vähem usaldatav. Et inertsus eeldab muutlikkust kui oma vastandit, võime täie kindlusega väita ka seda, et prognoosiperioodi pikenedes väheneb regressioonmudeli usaldatavus. Neile arutlustele tuginedes võime tuletada meie poolt prognoositud arenemisjoone usalduspiiride ehk tõenäoliste hälbimispiiride võrrandid, kus hälbimispiirkonna laius sõltub statistilise aegrea püsivusest, tasandusfunktsiooni kujust ja prognoosiperioodi pikkusest [3]:

$$2\Delta\check{y}_i = 2t\sqrt{\{XC^{-1}X^T\}_{ii}S^2} \qquad (3)$$

kus $2\Delta\check{y}_i$ — usalduspiiride laius punktis i Studenti jaotuse järgi;

t — Studenti t tõenäosusega $P\{[f(x_i)-y_i]\leqslant\check{y}_i\}$ ja vabadusastmetega r. Siin on arvutatud prognoosi usalduspiirid mis tahes punktis $i=1, 2, \ldots, k$; $k=\infty$, mistõttu ka vabadusastmete arv $r=\infty$. Mis puutub tõenäosusesse P, siis on see uurija poolt vabalt valitav. Tõenäosus, et tegelikud väärtused prognoositud arenemisjoonega tulevikus ühtivad, on 0. Täie kindlusega võime väita, et y_i langeb ükskõik kui kaugele väärtusest $\check{y}_i$, millega usalduspiirid muutuksid lõpmatult laiaks, s. t. neid polekski. Tavaliselt loetakse rahuldavaks usalduspiirid, milledesse langeb 75—95% prognoosiperioodi tegelikest väärtustest;

$\{XC^{-1}X^T\}_{ii}$— maatriksi $\{XC^{-1}X^T\}$ diagonaalelement;

$X=X_{mn}=(x_{ij})$; $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$;

$C=X^TQX$, kus kaalude maatriks $Q=Q_{mm}=\mathrm{diag}\,(p_i)$;

p_i — regressioonvõrrandi hindamiseks tehtud vaatluse kaal.

Avaldis ruutjuure all kujutab endast prognoosi dispersiooni D_{y_i}. Lineaarsõltuvuse puhul, mille alusel meie arvates tuleks prognoosida enamikku majanduslikest näitajatest (s. t. neid, millede aegread on lühikesed), võib D_{y_i} teisendada kujule [4];

$$D_{y_i} = S^2 + D_{\bar{y}} + (\bar{x} - x_i)^2 D_a \qquad (4)$$

kus $\bar{x} = 1/m \sum_{k=1}^{m} x_k$;

$D_{\bar{y}}$ — statistilise rea väärtuste keskmise ($\bar{y} = 1/m \sum_{k=1}^{m} y_k$) dispersioon ja D_a — lineaarvõrrandi ($y=ax+c$) parameetri a dispersioon. Et $\bar{y}$ ja a on leitud juhuslike suuruste alusel, tuleb ka neid endid käsitada juhuslike suurustena, milledele on omane hajuvus. Seepärast sõltubki D_{y_i} lisaks jääkdispersioonile S^2 ja prognoosiperioodi pikkusele (x) veel $\bar{y}$ ja a dispersioonidest.

Valemit (4) on hõlpus kasutada usalduspiiride käsitsi arvutamisel. Programmid regressioonvõrrandite leidmiseks elektronarvuteil annavad reeglina S^2 ja D_a väärtused ja võib näidata, et $D_{\bar{y}} = 1/m\, S^2$.

Kokku võttes võib öelda, et ajaliste ekstrapolatsioonprognoosidega ei saa majanduslike näitajate väärtusi kuigi täpselt ette näha ega prognoosida nähtuse ühest väärtust. Ekstrapolatsioonprognoosi enda väärtus suureneb, kui anda tema tõenäoseima täitumise intervall. Täielikuma pildi nähtuse eeldatavast arenemisest annab usalduspiiridega varustatud regressioonmudel.

KIRJANDUS

1. W. H. Williams, M. L. Goodman, Constructing Empirical Confidence Limits for Economic Forecasts. Journal of the American Statistical Association, 1971, 66, 336, 752—754.
2. К. С. Кузнецова, В. Н. Голоденко, К вопросу о количественной оценке точности прогноза. Экономика и математические методы, 1971, 7, 6, 843—849.
3. Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М. 1962, 159—160.
4. Ю. Эннусте, О прогнозировании средних значений и дисперсий параметров задач оптимального планирования. Изв. АН Эстонской ССР. Общественные науки, 1972, 21, 3, 245—252.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
4. X 1972

МАРИ СААТ

О ГОДНОСТИ И ДОВЕРИТЕЛЬНОСТИ РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Резюме

В статье рассматриваются место использования, форма и доверительность тех экстраполяционных прогнозов, в которых экономический показатель ставится в зависимость от времени. В первой части статьи исследуется вопрос выбора подходящей функции и оценивания ее правдоподобия по сравнению со статистическим периодом. Далее рассматриваются некоторые способы оценивания доверительности модели прогноза. Подчеркивается необходимость оценивания значений функции y_i с помощью доверительных интервалов и объясняется вычисление последних.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/X 1972

MARI SAAT

ON THE FITNESS AND RELIABILITY OF THE TIME-REGRESSIONAL MODELS FOR THE PREDICTION OF ECONOMIC INDICES

Summary

The paper deals with the place, form and authenticity of extrapolation-prognosis of economic phenomena dependent upon time. It begins with the issue of selecting a suitable regression model and estimating its suitability for the statistical period. Further, the possible ways of estimating the authenticity of prognosis-model are discussed. The necessity of supplying the prognosis curve with confidence limits is stressed.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
Oct. 4, 1972