EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1972, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1972.2.02

А. ТУНИС

# ОЧЕРЕДНОСТЬ СОСТАВЛЕНИЯ ПЛАНОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. Управление сложной системой (например, предприятием) неизбежно связано с разбиением ее на подсистемы. Как правило, между подсистемами существуют информационные связи. При составлении центральным органом согласованных с подсистемами плановых заданий возникает задача определения такой очередности их составления для каждой подсистемы, при которой для расчета каждого плана имелись бы в наличии все исходные данные. Такую задачу целесообразно именовать задачей очередности

2. Для математической формулировки совокупность подсистем рассматривается как множество элементов $R=\{r_i\}$, где $i=1,\ldots,n$. Каждый элемент $r_i$ означает одну подсистему, глобальная система состоит из $n$ подсистем. Для отображения информационных связей между элементами $r_i$ строится граф[1] $\Gamma=(R, U)$, каждой вершине которого соответствует элемент из множества $R$. Если между элементами $r_i$ и $r_j$ существует связь, то выражает ее дуга $u=(i, j)$, которая характеризуется весом $\omega_u$. Этот вес показывает объем информации, передаваемой между элементами $r_i$ и $r_j$. Строится соответствующая матрица смежности $\|\alpha_{ij}\|$, в которой $\alpha_{ij}$ отождествляется с весом $\omega_u$, где $u=(i, j)$. За искомую очередность условно принимается произвольный порядок записи элементов $r_i \in R$ в матрицу. Очередность отвечает приведенному в пункте 1 требованию, по которому ингредиент $r_i$, занимающий $l$-е место в матрице $(l=1,\ldots, n)$, не имеет связей с ингредиентами $r_{j_k}$ в направлении от $l$ до $k$, где $k=1,\ldots,l-1$, так как данные, получаемые по этим связям, не поступают до начала расчета плана и тем самым остаются несогласованными. Это означает, что все элементы матрицы смежности $\alpha_{ij}$, расположенные ниже диагонали, должны равняться нулю. Следовательно, определение очередности сводится к приведению матрицы смежности к треугольной форме посредством перенумерации ингредиентов. Получение треугольной матрицы можно рассматривать как частный случай обобщенной задачи, в которой требуется минимизировать сумму элементов $\alpha_{ij}$, расположенных ниже главной диагонали, т. е.

$$L=\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}\alpha_{i_k j_l}\rightarrow \min. \tag{1}$$

Здесь $k$ и $l$ обозначают нумерацию строк и столбцов соответственно. Решение $L=0$ достигается, когда на графе $\Gamma$ нет контуров [2]. При отсутствии контуров на графе $\Gamma$ элементам $\alpha_{ij}$ можно задавать значения: 1, если имеется связь между вершинами $r_i$ и $r_j$; 0, если связи нет. Тогда задача очередности будет сведена к задаче о приведении матрицы к треугольному виду (триангуляции) [2]. На практике в большинстве случаев на графе $\Gamma$ имеются контуры. Тогда количество несогласованных данных о плановых заданиях выражается суммой элементов $\alpha_{ij}$ ниже главной диагонали матрицы, в которую ингредиенты вписаны согласно очередности планирования. Чем меньше сумма $L$, тем выше уровень согласованности планов. Таков экономический смысл задачи очередности в постановке (1). Задача триангуляции является частным

---

[1] Терминология и обозначения заимствованы из [1].

случаем задачи (1). Так как общая сумма элементов $\alpha_{ij}$ матрицы постоянна, то можно выписать эквивалентную (1) целевую функцию

$$M = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \alpha_{i_k j_l} \rightarrow \max. \tag{2}$$

3. По своему содержанию задача очередности принадлежит к классу так наз. задач упорядочения [3], в которых требуется определить некоторую оптимальную перестановку $\pi = r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_n}$ элементов некоторого множества $R$. Все разнообразие задач упорядочения заключается в способах задания функционала $L(\pi)$ при возможных перестановках $\pi$. Пусть в функционале

$$L(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i(k_\pi(i))$$

$k_\pi(i)$ отражает тот факт, что $i$-й элемент множества $R$ в перестановке $\pi$ занимает $k$-е место, а функция $\varrho_i(k_\pi(i))$ зависит только от того, какое место занимает $i$-й элемент в перестановке $\pi$, и не зависит от мест, занимаемых другими элементами. В этом случае имеем дело с задачей о назначениях [4]. Если функция $\varrho_i(k_\pi(i))$ зависит еще и от того, какой элемент в $\pi$ занимает $(k-1)$-е место, то имеется в виду задача о коммивояжере [5]. В задаче об очередности функция[2] $\varrho_i(k_\pi(i))$ существенно зависит от мест, занимаемых в перестановке $\pi$ другими элементами множества $R$. Для решения задачи очередности можно использовать те же методы, что и для указанных задач упорядочения.

4. Методы точного решения задач упорядочения основываются на схемах последовательного анализа вариантов [6, 7] и метода ветвей и границ [8]. Ниже предлагаются алгоритмы для решения задачи очередности, основанные на этих схемах.

Схема последовательного анализа вариантов заключается в поочередном присоединении к отрезку $\sigma_{k-1} = r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_{k-1}}$ $k$-го элемента из множества $R \setminus \sigma_{k-1}$ и отсеивании отрезков на основании правил доминирования. Под правилами доминирования понимается способ, позволяющий для некоторой пары отрезков $\sigma_{k_1}$ и $\sigma_{k_2}$ установить преимущество одного отрезка перед другим в том, что последний не может содержаться в оптимальном решении. Правила доминирования определяются для сравнимых отрезков. Сравнимы любые отрезки $\sigma_{k_1}$ и $\sigma_{k_2}$, представляющие собой различные перестановки одного и того же подмножества $R(\sigma_k) \subset R$.

Пусть $\overline{P}_{k-1}$ — некоторые множества перспективных отрезков длиной $(k-1)$. Из $\overline{P}_{k-1}$ строится множество $P_k$ отрезков длиной $k$ путем присоединения к каждому отрезку $\sigma_{k-1} \in \overline{P}_{k-1}$ элементов из множества $R \setminus R(\sigma_{k-1})$. Из $P_k$ вычеркиваются те отрезки, для которых найдутся доминирующие (согласно правилам доминирования). Так образуется множество $\overline{P}_k$. Из $\overline{P}_n$ остается выписать оптимальный вариант.

Правило доминирования для отрезков $\sigma_{k1}$ и $\sigma_{k_2}$ записывается таким образом:

$$\vartheta(\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}) = F(\pi_1) - F(\pi_2),$$

где $\pi_1 = \sigma_{k_1}, \overline{\sigma}$; $\pi_2 = \sigma_{k_2}, \overline{\sigma}$; $\overline{\sigma}$ — некоторая перестановка элементов множества $R \setminus R(\sigma_k)$;

$$F(\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \beta_{i_k j_l},$$

где $\beta_{i_k j_l} = \alpha_{i_k j_l} - \alpha_{i_l j_k}$ для всех $k < l$ и $\beta_{i_k j_l} = -\beta_{i_l j_k}$.

---

[2] В задаче очередности в постановке (1) $\varrho_i(k_\pi(i)) = \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{i_k j_l}$.

Из любых двух сравнимых отрезков $\sigma_{k_1}$ и $\sigma_{k_2}$ в процессе отсеивания может быть оставлен только один:

$$\sigma_{k_1}, \text{ если } \vartheta(\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}) > 0; \quad \sigma_{k_2}, \text{ если } \vartheta(\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}) < 0.$$

5. По схеме ветвей и границ анализ и отсеивание отрезков проводятся в результате прогнозирования значений целевой функции на построенном отрезке. Обозначим эту оценку на отрезке $\sigma_k$ через $\delta(\sigma_k)$. Для прогнозирования должен существовать некоторый вариант $\pi_0$ решения и для него найдено значение функции $F(\pi_0)$. Так как

$$F(\pi) \geqslant \delta(\sigma_k),$$

то очевидно, что в задаче на минимум при

$$\delta(\sigma_k) \geqslant F(\pi_0)$$

отрезок $\sigma_k$ следует запретить для ветвления (в задаче на максимум нужно рассматривать обратные неравенства). Здесь

$$\delta(\sigma_k) = F(\sigma_k) = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^{k} \beta_{i_l i_m}.$$

6. Применение методов точного решения задачи очередности требует громадного объема расчетных операций, которые немыслимо осуществить без ЭВМ. Затраты машинного времени при использовании ЭВМ также чрезвычайно велики, особенно при больших размерах матриц. Об этом свидетельствует опыт Института кибернетики АН ЭССР, где создана программа на языке «ВЭЛГОЛ-3» для ЭВМ «Минск-22», основанная на схеме ветвей и границ, и Эстонского отделения ЦЭМИ АН СССР, где использована программа на языке «АЛГОЛ-60» для ЭВМ «Урал-II», основанная на схеме последовательного анализа вариантов.

На практике обычно не возникает необходимости в строго оптимальном решении. Поэтому для решения задач упорядочения используются эвристические методы, позволяющие быстро получать решения, близкие к оптимуму. Предлагается один из таких эвристических методов, базирующийся на идеях последовательного анализа вариантов.

7. Идея метода состоит в том, что к отрезку $\sigma_{k-1}$ присоединяется элемент из множества $R \setminus R(\sigma_{k-1})$ по правилам предпочтения. Строится множество $S_k$ сравнимых отрезков с изменением расположения одного лишь $k$-го элемента в отрезке $\sigma_k$. По правилам доминирования $\vartheta(\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2})$ остается только один отрезок $\sigma_k$ для следующего шага конструирования перестановки $\pi$.

Правило предпочтения $E(\sigma_k, i)$ рассчитывается по формуле

$$E(\sigma_k, i) = \max_{i \in R \setminus R(\sigma_{k-1})} \sum_{j \in R(\sigma_{k-1})} |\beta_{ij}|,$$

где $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{ji}$.

Предпочитается присоединить к отрезку $\sigma_{k-1}$ тот элемент $i$ из множества $R \setminus R(\sigma_{k-1})$, который наибольшим образом может увеличить значение целевой функции. Величина $\beta_{ij}$ показывает, каково относительное увеличение или уменьшение значения целевой функции $L(\pi)$ при расположении элементов $i$ и $j$ в перестановке $\pi$ в порядке $\ldots, i, \ldots, j, \ldots$.

На основе приведенного эвристического метода в Эстонском отделении ЦЭМИ АН СССР составлена программа для ЭВМ «Урал-II» на языке «АЛГОЛ-60». Матрицу размером $32 \times 32$ программа решала в течение $\sim 90$ *мин*, при этом полученное решение отклонялось от оптимума, найденного по методу ветвей и границ, на $\sim 3\%$.

При использовании метода ветвей и границ указанный эвристический метод можно применить для расчета исходного варианта ($\pi_0$). С помощью такого приема получается оценка $F(\pi_0)$, близкая к оптимуму, которая в дальнейшем исключает ветвление многих отрезков $\sigma$, так как

$$\delta(\sigma) \geqslant F(\pi_0),$$

что существенно сокращает время для решения задачи.

8. Задача очередности имеет широкую область применения. В ее рамках можно решить многие проблемы, особенно при организации функционирования систем. В форме задачи очередности можно оптимизировать расстановку станков при организации поточных линий [9, 7], размещение массивов информации при организации вычислительных центров [10], рассчитывать на ЭВМ оперативные задания подразделениям предприятия и т. п.

## ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж, Теория графов и ее применения. М., 1962.
2. А. А. Модин, И. С. Зингер, М. Ф. Коротяев, Исследование и анализ потоков информации на промышленных предприятиях. М., 1970.
3. В. В. Шкурба, О задачах упорядочения. Кибернетика, 1967, вып. 2, стр. 63—65.
4. Ю. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, Задачи и методы линейного программирования. М., 1961.
5. Д. Литл, К. Мурти, Д. Суине, К. Кэрел, Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и математические методы, 1965, 1, вып. 1, стр. 94—107.
6. В. Я. Бурдюк, В. В. Шкурба, Теория расписаний. Задачи и методы решений I. Кибернетика, 1971, вып. 1, стр. 89—102.
7. В. В. Шкурба, К решению задачи круговой расстановки станков. Кибернетика, 1967, вып. 3, стр. 44—46.
8. L. G. Mitten, Branch-and-Bound Methods: General Formulation and Properties. Operations Research 1970, 18, 1, 24—34.
9. И. В. Романовский, Задача о наивыгоднейшей круговой расстановке станков. Экономика и математические методы, 1966, 2, вып. 4, стр. 578—581.
10. В. А. Ниесов, Задача рационального расположения массивов информации на магнитной ленте. Кибернетика, 1968, вып. 4, стр. 96—98.

*Институт экономики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
13/VII 1971

A. TUNIS

## PLANEERIMISE JÄRJEKORD

*Resümee*

Artiklis esitatakse järjekorra ülesande matemaatiline formuleering ja käsitletakse meetodeid tema lahendamiseks. Täpsed lahendamise algoritmid põhinevad a) variantide järjestikulisel analüüsil ja b) harude ja rajade skeemil. Kuna täpsete meetodite rakendamine suuremahuliste ülesannete puhul pole käesoleval ajal raalide piiratud võimsuse tõttu teostatav, esitatakse heuristiline algoritm, mis võimaldab saada optimumilähedasi tulemusi vastuvõetava lahendamisaja piirides.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia*
*Majanduse Instituut*

Toimetusse saabunud
13. VII 1971

A. TUNIS

## THE PLANNING SEQUENCE

*Summary*

The mathematical formulation and some methods of solution of the sequencing problem are discussed in this paper. Algorithms for the search of the optimal solution, based on the branch-bound and the sets comparing-eliminating procedures, are described. A machine running time-sharing heuristic algorithm for the search of suboptimal solution is presented.

*Academy of Sciences of the Estonian SSR, Institute of Economics*

Received July 13, 1971