EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1972, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1972.2.01

Ю. ЭННУСТЕ

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ, АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРОЙ И ОПТИМИЗАЦИЕЙ НА ДВУХ УРОВНЯХ

1. Введение

При экономической интерпретации математических моделей целевых систем нередко возникает вопрос о взаимоотношениях моделей и методов, принадлежащих к разным теориям [1–3]. В настоящей статье делается попытка вкратце пояснить отношения между игровыми задачами и задачами оптимизации одного и нескольких уровней в экономическом аспекте.

Для этого в качестве исходной задачи описываются выпуклая задача оптимизации с ограничениями и соответствующая ей функция Лагранжа. С помощью последней строится пара двойственных задач, которая представляет собой антагонистическую игру; показывается ее эквивалентность исходной и двойственной задачам. Далее рассматриваются итеративные методы решения полученной игры и при сепарабельной функции Лагранжа интерпретации их как методов разложения (система оптимизации на двух уровнях) и экономические толкования последних.

Цель трактовки состоит в обзорности и интерпретациях. Для достижения ее приносится в жертву прежде всего детальность математической трактовки, что возмещается ссылками на соответствующие труды.

2. Исходная задача и ее функция Лагранжа

2.1. Пусть исходной задачей служит задача оптимизации с ограничениями

$$\max_x f(x) \mid g_i(x) \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad x \in X, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор $x=(x_j)$, $j=1,\ldots,n$; $f(x)$ и $g_i(x)$ являются определенными в множестве X непрерывными выпуклыми (кверху) функциями, а X — ограниченное выпуклое подмножество n-мерного пространства.

Предположим, что а) множество планов задачи (1) не пустое, $P=\{x : g_i(x) \geqslant 0, i=1,\ldots,m, x \in X\} \neq \varnothing$
и б) решению $x^0 \in X^0=\{x : f(x)=\max, x \in P\}$ задачи (1) соответствует значение целевой функции. $v^0=f(x^0)<\infty$.

2.2. На основе задачи (1) построим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x), \quad x \in X, \tag{2}$$

где λ — такой m-вектор $\lambda=(\lambda_i)$, $i=1,\ldots,m$, что $\lambda_i \geqslant 0$.

3. Антагонистическая игра двух игроков на основании функции Лагранжа (2)

3.1. Пусть задача первого игрока будет

$$\varphi(x) = \min_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \to \max_{x \in X}. \tag{3}$$

Обозначим решение (3) через $\hat{x} \in \hat{X} = \{x : \varphi(x) = \max, \, x \in X\}$ и значение соответствующей игры через $\hat{v} = \varphi(\hat{x})$.

3.2. Пусть задача второго игрока будет

$$\psi(\lambda) = \max_{x \in X} L(x, \lambda) \to \min_{\lambda \geq 0}. \tag{3a}$$

Обозначим решение для второго игрока через $\hat{\lambda} \in \Lambda = \{\lambda : \psi(\lambda) = \min, \lambda \geqslant 0\}$, а значение соответствующей игры через $-\check{v} = -\psi(\hat{\lambda})$.

3.3 Задачи (3)—(3а) называются парой задач, двойственных к (1).

4. Эквивалентность игры (3)—(3а) задаче (1) и ее двойственной задаче

4.1. Игра (3)—(3а) эквивалентна задаче (1) и ее двойственной задаче [2]. (Это значит, что $x^0 = \hat{x}$ и $v^0 = \hat{v}$ и $\hat{\lambda}$ является решением задачи, двойственной к задаче (1), причем $\hat{v} = \check{v} = v^0$).

4.2. Таким образом на основе исходной задачи (1) и двойственной к ней задачи можно создать эквивалентную игру (3)—(3а).

4.3. Решение $(\hat{v}, \hat{\lambda})$ игры (3)—(3а) одновременно служит седловой точкой функции $L(x, \lambda)$ при условиях $x \in X$ и $\lambda \geqslant 0$ [2].

5. О решении игры (3)—(3а)

5.1. Хотя игра (3)—(3а) содержит задачу (1) и двойственную к ней задачу, использование ее в качестве отправной точки может оказаться удобнее, особенно при нахождении приближенного решения.

5.2. Функция $L(x, \lambda)$ представляет собой седловую поверхность, но нахождение седловой точки $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ непосредственно из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L(x, \lambda)}{\delta x_j} = 0, \; j = 1, \ldots, n \\[2ex] \dfrac{\delta L(x, \lambda)}{\delta \lambda_i} = 0, \; i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

все же невозможно, потому что решение связано с ограничениями $x \in X$ и $\lambda \geqslant 0$. Однако нахождение приближенного решения возможно с помощью простых методов итерации. Поскольку $L(x, \lambda)$ является выпуклой функцией от x и линейной от λ, то метод итерации можно построить по разным принципам.

5.3. Первый принцип заключается в применении метода градиентов. В таком случае на шаге $l = 1, \ldots$ при заданном λ^l первый игрок движется из точки x^{l-1} достаточно малым шагом в сторону вектора $\operatorname{grad}_x L(x, \lambda^l) \Big|_{x^{l-1}}$. Таким путем он попадает в точку x^l. Второй же игрок при заданном x^l движется из точки λ^l достаточно малым шагом в сторону вектора $-\operatorname{grad}_\lambda L(x^l, \lambda)$ и попадает в точку λ^{l+1} и т. д., пока значения градиентов не станут довольно близкими к нулю.

5.4. Второй принцип движения таков. Второй игрок движется, как описано в 5.3, но первый игрок с каждым шагом l приближается к точке $x^l = \{x : L(x, \lambda^l) \to \max\}$ и т. д.

5.5 Выше не были уяснены условия существования и нахождения λ^l, но можно доказать, что для нахождения их методом итерации достаточно непрерывности функций $f(x)$ и $g_i(x)$, $i=1, \ldots, m$, а также строгой выпуклости по меньшей мере $f(x)$ или $g_i(x)$, $i=1, \ldots, m$ [4].

6. Метод итераций (метод разложения) решения игры (3)—(3а), соответствующей сепарабельному выражению (2), как модель планирующей системы на двух уровнях

6.1. Функция $L(x, \lambda)$ относительно λ_i, $i=1, \ldots, m$ сепарабельна. Таким образом, игру (3)—(3а) можно рассматривать также, как игру $1+m$ игроков. В случае, когда $L(x, \lambda) = \sum_j L_j(x_j, \lambda) = \sum_j [f_j(x_j) + \sum_i \lambda_i g_{ij}(x_j)], x_j \in X_j$, $j=1, \ldots, n$, т. е. оно сепарабельно относительно x_j, $j=1, \ldots, n$, тогда эта игра может рассматриваться как игра $n+m$ или $n+1$ игроков. В последнем случае второй игрок не декомпонирован.

6.2. Последний случай может рассматриваться как модель двухуровневой системы решения задачи (1). На первом уровне находится $j=1, \ldots, n$ элементов, которые на каждом шаге l решают свои задачи оптимизации (использование принципа, изложенного в пункте 5.4), а именно в виде $\max_{x_j \in X_j} L_j(x_j, \lambda^l)$, $j=1, \ldots, n$.

О полученном результате x_j^l сообщают второму уровню.

На втором уровне находится элемент, задача которого на шаге l состоит в том, чтобы умеренно двигаться в направлении $-\operatorname{grad}_\lambda L(x^l, \lambda)$ и таким образом найти λ^{l+1} и т. д., пока значения $|g_i(x^l)|$, $i=1, \ldots, m$ не будут достаточно маленькими.

7. Некоторые интерпретации

7.1. С экономической точки зрения задача (1) хорошо поддается интерпретации как задача центрального оптимального плана любой хозяйственной единицы. При этом вектор x описывает интенсивность деятельности хозяйственной единицы; функция $f(x)$ — уровень достижения целей хозяйственной единицей в зависимости от выбора деятельности; функции $g_i(x)$, $i=1, \ldots, m$ — суммарные результаты деятельности по рассматриваемому показателю i в зависимости от деятельности. Относительно показателя i на единицу наложены ограничения $g_i(x) \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$, которые по существу требуют ограниченного использования каких-либо ресурсов или же обеспечения заданного уровня по определенным объемам или экономическому качеству продукции. Эти ограничения в общем имеют вид

$$g_i(x) = \sum_j g_{ij}(x_j) + b_i, \ i=1, \ldots, m,$$

где $g_{ij}(x_j)$ выражает производства и потребления ресурсов $i=1, \ldots, m$ подъединицей $j=1, \ldots, n$ в зависимости от объема деятельности x_j подъединицы j, а b_i описывает объем данных этой единице ресурсов и обязанностей по ресурсу $i=1, \ldots, m$.

С точки зрения решения задачу (1) можно интерпретировать таким образом. Имеется система I, целью которой является $f(x) \to \max$. Но есть и другая система II, которая по отношению к системе I имеет право диктовки: система I должна удовлетворять ограничениям $g_i(x) \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$.

7.2. Лагранжеву функцию (2) согласно этой трактовке можно толковать таким образом. Система II отказалась от диктовки ограничений, но при этом модифицировала цель системы I с таким расчетом, что на нее можно воздействовать с помощью λ в зависимости от степени нарушения ограничений. Следовательно, можно говорить о системах $\hat{\mathrm{I}}$ и $\widehat{\mathrm{II}}$, где «ограничения» устанавливаются путем купли-продажи.

7.3. Теперь перед системой $\widehat{\mathrm{II}}$ стоит проблема, как выбрать параметр воздействия λ с таким расчетом, чтобы система $\hat{\mathrm{I}}$ все же придерживалась системы ограничений, другими словами, как добиться воздействием таких же результатов, как и диктовкой. На этот вопрос отвечает антагонистическая игра (3)—(3а), в которой цель систем $\widehat{\mathrm{II}}$ заключается в том, чтобы система $\hat{\mathrm{I}}$ выполняла ограничения. Если ограничения удовлетворяются, то воздействие не нужно. Однако при нарушениях система $\widehat{\mathrm{II}}$ штрафует систему $\hat{\mathrm{I}}$ в свою пользу. Размеры штрафа нужно выбрать таким образом, чтобы системе $\hat{\mathrm{I}}$ было невыгодно даже при наилучших планах превышать ограничения ни с одной, ни с другой стороны: чрезмерно большой штраф за уход от ограничений вправо может стимулировать уход влево.

7.4. Экономически интересна интерпретация алгоритмического решения игры (3)—(3а) тогда, когда функция Лагранжа (2) может сепарироваться по x_j, причем $j=1,\ldots,n$. В таком случае система $\hat{\mathrm{I}}$ состоит из n несвязанных индивидов (игроков) со следующими задачами на шаге l; $\max L_j(x_j, \lambda^l)$, $j=1,\ldots,n$.

Поскольку λ^l было составлено на основе λ^{l-1} и x^{l-1}, то для индивида j оно содержит информацию о поведении остальных индивидов на шаге $l-1$. Следовательно, игрока $\widehat{\mathrm{II}}$ можно рассматривать как координирующего, у которого средством координации служит λ. Теперь оптимальное решение каждого индивида приближено к оптимальному решению всей системы. Вместе с тем в системе $\hat{\mathrm{I}}$ отпадает необходимость диктовать индивиду оптимальные планы. Такую систему назовем центрально-координированной при помощи цен.

7.5. Очевидно, что антагонистическая игра — не единственная конструкция, с помощью которой в сепарабельном случае можно вывести средство и принципы центральной координации. Например, на базе задачи (1) можно построить конструкцию [5]:

$$\max_{b_{ej}} \max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} \{f_j(x_j) \mid g_{ej}(x) \geqslant b_{ej},\ \sum_j b_{ej}=b_e,\ x_j \in X_j\},$$

где $e=1,\ldots,p$ представляет собой индекс средства. Здесь инструментом координации служит b_{ej} и такой принцип может толковаться как распределение (лимитирование) центром ограничений системы $\hat{\mathrm{I}}$ между индивидами $j=1,\ldots,n$. В этом смысле можно говорить о системах $\check{\mathrm{I}}$ и $\check{\mathrm{II}}$. Исправление координирующей информации здесь осуществляется на основе сравнения решений двойственных задач единиц [5].

7.6. В планировании социалистической экономики системы $\hat{\mathrm{I}}$, $\widehat{\mathrm{II}}$ и $\check{\mathrm{I}}$, $\check{\mathrm{II}}$ фактически применяются вместе, по-видимому, для того, чтобы ускорить сходимость решения, хотя при этом объем деятельности центра значительно увеличивается. Дело в том, что к корректировке m-мерного вектора λ добавляется корректировка элемента $p \times j$-мерной матрицы. При этом множества $\{1,\ldots,m\}$ и $\{1,\ldots,p\}$ могут иметь общую часть.

Задача хозяйственной единицы j социалистической экономики, по-видимому, хорошо описывается с помощью конструкции:

$$\max_{x_j} L_j(x_j, \lambda)\ \}\ g_{ej}(x_j) \geqslant b_{ej},\ e=1,\ldots,p,$$

причем $L_j(x_j, \lambda)$ выражается в более или менее явной форме только у хозрасчетных единиц.

Принимая, что некоторые из деятельностей $j=1,\ldots,n$ производят ресурсы $i=1,\ldots,m$, имеющие цены λ_i, можно $L_j(x_j, \lambda)$ интерпретировать как разницу между доходами и расходами единицы, или прибыль в λ-цене. Некоторые продукты общественной деятельности цен не имеют (например, наука). В таком случае стимулирование осуществляет центр путем сметного финансирования. При этом цены и финансирование должны быть в равновесии:

$$\sum_{j=1}^{n} L_j(x_j, \lambda) \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что если определенная часть единиц работает с убытком в λ-цене, то остальная часть работает с соответствующей прибылью. Как уже указывалось, убыток в λ-цене может быть обусловлен отсутствием цен на определенные ресурсы и он возмещается из сметы за счет прибыли остальных единиц.

7.7. Может создаться впечатление, что задача центра в планировании ограничивается координацией планов подчиненных ему единиц. Но это справедливо только до плановых горизонтов единиц. Поскольку выше плановый горизонт дальше, для охвата этого промежутка центр должен обладать моделью центрального планирования.

8. Выводы

8.1. Математическое описание экономического содержания задачи оптимального планирования хозяйственной единицы в общем приводит к экстремальной задаче с дополнительными условиями. Дойти до математических эквивалентных построений, антагонистической игры и задачи оптимизации на нескольких уровнях было бы при прямом описании довольно трудно.

8.2. С точки зрения настоящей экономической интерпретации последние конструкции построены с таким расчетом, чтобы облегчить решение задачи, прежде всего итеративное решение, причем в жертву приносится простота постановки задачи.

8.3. Хотя эти конструкции не вытекают из экономического содержания оптимального плана, все же экономически их удобно толковать, пользуясь терминами центральной координации, цен и лимитов и т. д.

8.4. Можно утверждать, что экономические интерпретации методов решения антагонистической игры и задачи иерархической оптимизации способствуют выявлению инструментов и принципов координации в полицентрических планирующих системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Marschak, Centralization and Decentralization in Economic Organizations. Econometrica, 1959, **27**, 3, 399—430.
2. Е. Гольштейн, Выпуклое программирование. Элементы теории. М., 1970.
3. T. Chidambaram, Game Theoretic Analysis of a Problem of Government of People. Management Science, 1970, **16**, 9, 542—559.
4. V. Moeseke, Guy de Ghellinck, Decentralization in Separable Programming. Econometrica, 1969, **37**, 1, 73—78.
5. A. Geoffrion, Primal Resource — Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems. Operations Research, 1970, **18**, 3, 375—403.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/VI 1971

Ü. ENNUSTE

KUMERA OPTIMISEERIMISÜLESANDE JA ANTAGONISTLIKU MÄNGU NING KAHETASEMELISE OPTIMISEERIMISE SUHETE MAJANDUSTEADUSLIKKE INTERPRETATSIOONE

Resümee

Eesmärgiliste süsteemide matemaatiliste mudelite majandusteaduslikul interpreteerimisel tekib sageli küsimus, millistes omavahelistes suhetes on pealkirjas mainitud erinevaid teooriaid esindavad mudelid ja meetodid [1–3]. Näidatakse, et majandusteaduse seisukohalt kirjeldab optimumülesanne majanduse tsentraalset planeerimist, tema ekvivalent antagonistlik mäng ja hierarhiline optimiseerimine aga kirjeldavad majanduse tsentraalset koordineerimist.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
18. VI 1971

Ü. ENNUSTE

SOME ECONOMIC INTERPRETATIONS OF THE RELATIONS BETWEEN A CONVEX OPTIMIZATION PROBLEM AND AN ANTAGONISTIC GAME AND A TWO-LEVEL OPTIMIZATION PROBLEM

Summary

By economic interpretations of mathematical models of goal-seeking systems, there often arise questions concerning the relations between the models and methods belonging to different theories mentioned in the headline. An attempt has been made to explain that the economic interpretation of an optimization problem describes central planning, and the interpretation of an equivalent antagonistic game and hierarchical optimization system describe central coordination of economy.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
June 18, 1971