EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1971, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1971, № 3

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1971.3.02

И. КАГАНОВИЧ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦЕН И СМЕЖНЫЕ МОДЕЛИ

В статье описан комплекс равновесных динамических моделей. Построена модель, двойственная к динамической межотраслевой (модель динамики цен), и модель динамики прямых трудовых затрат. Последняя вместе с моделью для определения потребительской конечной продукции образует пару двойственных динамических моделей, по форме и свойствам симметричную исходным моделям леонтьевского типа. На этом основании наряду с двойственными рассмотрены пары смежных динамических моделей. Обсуждаются возможности применения и принципы работы комплекса моделей.

1. Равновесная двойственная модель для прогноза цен

Введем следующие обозначения: t — год рассматриваемого периода продолжительностью T лет $(t = 1, 2, \ldots, T)$, i — производимый, j — потребляемый продукт или, соответственно, отрасль-производитель и отрасль-потребитель $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$; $X_t = (x_i^{(t)})$ — вектор-столбец валового выпуска продукции в t-м году; $Z_t = (z_i^{(t)})$ — вектор-столбец конечной продукции непроизводственного назначения (потребительской конечной продукции); $P_t = (p_j^{(t)})$ — вектор-строка экзогенных затрат на единицу валового выпуска продукции (заработная плата с начислениями в фонд социального страхования и рентная оценка природных ресурсов как факторов экономии труда); $H_t = (h_j^{(t)})$ — вектор-строка цен либо полных трудовых затрат на единицу конечной продукции; $A_t = (a_{ij}^{(t)})$ — квадратная матрица коэффициентов прямых текущих затрат валового выпуска i-продукции на единицу j-й; $F_t = (f_{ij}^{(t)})$ — квадратная матрица коэффициентов затрат валового выпуска i-й продукции в t-м году на единицу прироста j-й продукции в $t+1$-м году (матрица приростной фондоемкости).

Построим в этих обозначениях модель для расчета динамики цен, исходя из начального их уровня — вектора $H_0 = \hat{H}$ — и вектора экзогенных затрат P_t, задаваемых на входе модели. Уравнение такой модели имеет вид

$$H_t = P_t + H_t A_t + H_{t-1} F_{t-1} - H_t F_t, \tag{1}$$

откуда

$$H_t = (P_t + H_{t-1} F_{t-1}) (E - A_t + F_t)^{-1}. \tag{2}$$

Уравнения (2) для каждого года $t = 1, 2, \ldots, T$ образуют систему рекуррентных соотношений, на основании которых получаем динамические ряды цен или их индивидуальных индексов (в зависимости от того, в какой форме заданы матрицы A_t и F_t — в натуральной или стоимостной; в последнем случае начальный вектор H_0 всегда единичный).

Модель предполагает ежегодную переоценку основных фондов по стоимости их воспроизводства в данном году. Дело обстоит так, как если бы к сумме затрат t-го года прибавлялась полная восстановительная стоимость фондов, созданных в $t-1$-м году (в ценах того же года) для использования в t-м году ($H_{t-1} F_{t-1}$), и из нее вычиталась стоимость фондов, произведенных в t-м и подлежащих использованию в $t+1$-м году ($H_t F_t$).

Таким образом, в данной модели капитальные затраты продукции $t-1$-го года на единицу прироста продукции в t-м году равны разности между полной восстановительной стоимостью основных фондов в $t-1$-м и t-м годах на единицу всей продукции t-го года (это позволяет алгебраически складывать капитальные затраты с текущими, которые даны на единицу всего объема годовой продукции, а не ее прироста). Уравнения динамической модели цен приведены в табл. 1 (см. модель 2).

Таблица 1

	Модель	
	прямая	двойственная
Выходная величина	Модель 1 $X_t>0$	Модель 2 $H_t>0$
Уравнения	$(E-A_t+F_t)X_t-F_tX_{t+1}=Z_t$ $(E-A_T+F_T)X_T=Z_T+F_TX_{T+1}(*)$	$H_1(E-A_1+F_1)=P_1+H_0F_0\ (*)$ $H_t(E-A_t+F_t)-H_{t-1}F_{t-1}=P_t$
Линейная форма	$\sum_{t=1}^{T} P_t\cdot X_t+H_0F_0X_1$	$\sum_{t=1}^{T} Z_t\cdot H_t+H_TF_TX_{T+1}$
Выходная величина	Модель 3 $P_t>0$	Модель 4 $Z_t>0$
Уравнения	$P_1(E+B_1-\Phi_1)=H_1-P_0\Phi_0(*)$ $P_t(E+B_t-\Phi_t)+P_{t-1}\Phi_{t-1}=H_t$	$(E+B_t-\Phi_t)Z_t+\Phi_tZ_{t+1}=X_t$ $(E+B_T-\Phi_T)Z_T=X_T-\Phi_TZ_{T+1}(*)$
Линейная форма	$\sum_{t=1}^{T} X_t\cdot P_t-P_T\Phi_TZ_{T+1}$	$\sum_{t=1}^{T} H_t\cdot Z_t-P_0\Phi_0Z_1$

В году $t=1$ фонды предыдущего года были созданы до начала периода $\{1,\ldots,T\}$ и поэтому имеют смысл экзогенных затрат для периода в целом, не воспроизводимых в течение этого периода в пределах данного хозяйственного комплекса (должны быть заданы на входе модели). В уравнении (*) модели 2, которое относится к первому году периода, они из левой части перемещены в правую.

Линейная форма этой модели представляет собой стоимость фонда потребления, причем в последнем году периода сюда добавляется полная восстановительная стоимость тех основных фондов, которые будут оприходованы после окончания данного периода ($H_T F_T X_{T+1}$).

Модель цен является двойственной к продуктовой динамической модели типа модели Леонтьева (табл. 1, модель 1) с заданным вектором $X_{T+1}=\hat{X}$ — прогнозом валового выпуска продукции на $T+1$-й год. Линейная форма продуктовой модели имеет смысл суммы экзогенных затрат за период. Продукция X_1 первого года периода входит в линейную форму с затратами $P_1+H_0F_0$, отчего в ней в дополнение к сумме прямых экзогенных затрат P_tX_t появляется слагаемое $H_0F_0X_1$ — полная восстановительная стоимость основных фондов в году $t = 0$.[1]

Значения линейных форм моделей 1 и 2 равны между собой.[2] Умножив уравнения модели 1 на H_t слева и модели 2 на X_t справа, найдем, что

$$\sum_{t=1}^{T} H_t Z_t + \sum_{t=1}^{T} H_t F_t X_{t+1} = \sum_{t=1}^{T} P_t X_t + \sum_{t=1}^{T} H_{t-1} F_{t-1} X_t, \tag{3}$$

откуда

$$\sum_{t=1}^{T} H_t Z_t + H_T F_T X_{T+1} = \sum_{t=1}^{T} P_t X_t + H_0 F_0 X_1. \tag{4}$$

2. Симметрия межотраслевых моделей

Рассмотрим модель, в которой осуществляется обратное к модели 1 преобразование: на входе задан вектор ресурсов валовой продукции X_t, а на выходе определяется вектор Z_t потребительской конечной продукции за каждый год планового периода.

В этой модели $B_t = (b_{ji}^{(t)})$ — матрица коэффициентов полных текущих затрат валового выпуска j-й продукции на единицу потребительской конечной продукции i-го вида $(B_t Z_t = A_t X_t)$; $\Phi_t = (\varphi_{ji}^{(t)})$ — матрица коэффициентов полных капитальных затрат j-й валовой продукции на единицу прироста i-й потребительской конечной, так что $\Phi_t (Z_{t+1} - Z_t) = F_t (X_{t+1} - X_t)$. Межотраслевая модель с этими исходными параметрами, включая заданный вектор $Z_{T+1} = \hat{Z}$, приведена в табл. 1 (модель 4).

Чтобы при расчете конечной продукции в T-м году учесть полную восстановительную фондоемкость продукции $T + 1$-го года, из заданного на входе модели объема валового выпуска продукции на T-й год сделан соответствующий вычет (см. уравнение (*) модели 4 для T-го года). Модель 4 по отношению к модели 1 будем называть обратной.

Модель 3, обратная к модели 2 (табл. 1), связывает искомый выходной вектор P_t прямых экзогенных затрат с входным вектором цен. Должен быть задан также вектор $P_0 = \hat{P}$. В первом году периода ($t = 1$) на входе модели 3 — цена единицы продукции этого года за вычетом задаваемой величины прошлогодней ($t = 0$) восстановительной стоимости фондов на единицу продукции (см. уравнение (*) модели 3).

Сказанное о входных величинах моделей 3 и 4 определяет соответствующие линейные формы, причем

$$\sum_t H_t Z_t - P_0 \Phi_0 Z_1 = \sum_t P_t X_t - P_T \Phi_T Z_{T+1}. \tag{5}$$

Допустим, что T-летний период весьма протяжен — насчитывает несколько десятилетий, что примерно в середине его выделен промежуток времени, для которого составляется план. Речь, стало быть, идет о процессе непрерывного динамического планирования со следующими друг за другом перспективными, например пятилетними, планами. В таком случае можно принять, что X_{T+1}, H_0, Z_{T+1}, $P_0 = 0$ (см. табл. 2).

Как показали пробные расчеты, десятилетней предыстории (исходное $t = -10$) достаточно, чтобы для отрезка времени $\{1, 2, \dots, T\}$ решения при начальном $H_{-10} = 0$ и при $H_0 = \hat{H}$ практически совпали. Аналогичные результаты получены при расчете векторов X_t начиная с $X_{T+1} = \hat{X}$ и с $X_{T+10} = 0$. Эти результаты вполне закономерны, они иллюстрируют известное положение марксовой теории воспроизводства, согласно которой первоначально авансированная капитальная стоимость через более или менее продолжительный период полностью окупается за счет прибавочной стоимости.

---

[1] В модели 1 фонды, созданные в t-м году, по своему объему соответствуют потребностям следующего года (рассчитаны на количество продукции X_{t+1}).

[2] Формально эти модели можно рассматривать как двойственную пару экстремальных задач с единственным допустимым решением.

При указанных предпосылках (нулевых векторах начальных условий) уравнения моделей для первого и последнего года не отличаются от других, а линейной формой модели будет $\sum_t P_t X_t$ или $\sum_t H_t Z_t$ (см. табл. 2).

Таблица 2

	Модель		
	прямая	двойственная	
	Модель 1	Модель 2	Модель исходная
Выходная величина	$X_t > 0$	$H_t > 0$	
Уравнение	$X_t = Z_t + A_t X_t + F_t(X_{t-1} - X_t)$ $(X_{T+1} = 0)$	$H_t = P_t + H_t A_t + H_{t-1} F_{t-1} - H_t F_t$ $(H_0 = 0)$	
Линейная форма	$\sum_{t=1}^{T} P_t \cdot X_t$	$\sum_{t=1}^{T} Z_t \cdot H_t$	
	Модель 3	Модель 4	Модель смежная
Выходная величина	$P_t > 0$	$Z_t > 0$	
Уравнение	$P_t = H_t - P_t B_t - P_{t-1} \Phi_{t-1} + P_t \Phi_t$ $(P_0 = 0)$	$Z_t = X_t - B_t Z_t - \Phi_t (Z_{t+1} - Z_t)$ $(Z_{T+1} = 0)$	
Линейная форма	$\sum_{t=1}^{T} X_t \cdot P_t$	$\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot Z_t$	

Пары моделей 1 и 2, 3 и 4 симметричны друг другу. Прямые модели 1 и 3 и двойственные 2 и 4 образуют пары, в каждой из которых одну модель будем называть исходной, а другую — смежной. Пары прямых и двойственных моделей также симметричны.

Искомыми выходными параметрами прямых моделей служат характеристики валовой продукции, а двойственных — конечной. Входные параметры и коэффициенты линейной формы прямой модели в двойственной поменялись ролями. В смежных парах моделей линейные формы одинаковы, но коэффициенты линейной формы одной модели в другой становятся неизвестными выходными величинами. В исходных моделях все затраты, экзо- и эндогенные, заданы на единицу валовой продукции, в смежных же — на единицу конечной. В матрице $E + F_t - A_t$ исходных моделей положительные элементы означают производство, отрицательные — потребление данного ингредиента, тогда как в матрице $E + B_t - \Phi_t$, наоборот, плюс — признак затрат, минус — выпуска.

Не только для рассматриваемых, но и для любой пары двойственных моделей существует вторая двойственная пара, которая по своим входам, выходам, знакам и направлениям обратных связей и смыслу параметров симметрична исходной паре, служит как бы зеркальным ее отображением.

В частности, решив двойственные задачи линейного программирования, можно считать, что решена и другая, симметричная им пара двойственных задач, таких, где оптимальный план исходной задачи является вектором коэффициентов целевой функции для оптимального плана смежной задачи и вектором ограничений для обратной.[3]

Все четыре динамические модели в табл. 1 — действующие: составлены экспериментальные программы для ЭВМ «Минск-22» и по ним выполнены пробные расчеты.

Мы видели, что решение продуктовых задач на моделях 1 и 4 идет в направлении от последнего года периода к первому (значения X_{T+1} и Z_{T+1} известны), а стоимостные задачи решаются в обратном направлении — исходя из фиксированных величин H_0 и P_0. Возможен также расчет, отправляющийся от заданных начальных количеств продукции в году $t=0$ и константных стоимостных параметров $T+1$-го года. Этому служат варианты моделей с приростами продукции в t-м году по отношению к $t-1$-му, как в динамической модели Леонтьева (в рассмотренных до сих пор моделях фигурировали приросты продукции в $t+1$-м году по сравнению с t-м). Четверка моделей, построенных по этому принципу, представлена в табл. 3 в виде, сопоставимом с табл. 1.

Таблица 3

	Модель	
	прямая	двойственная
	Модель 1	Модель 2
Выходная величина	$X_t>0$	$H_t>0$
Уравнения	$(E-A_1-F_1)X_1=Z_1-F_1X_0$ $(E-A_t-F_t)X_t+F_tX_{t-1}=Z_t$	$H_t(E-A_t-F_t)+$ $+H_{t+1}F_{t+1}=P_t$ $H_T(E-A_T-F_T)=$ $=P_T-H_{T+1}F_{T+1}$
Линейная форма	$\sum\limits_t P_t\cdot X_t-H_{T+1}F_{T+1}X_T$	$\sum\limits_t Z_t\cdot H_t-H_1F_1X_0$
	Модель 3	Модель 4
Выходная величина	$P_t>0$	$Z_t>0$
Уравнения	$P_t(E+B_t+\Phi_t)-$ $-P_{t+1}\Phi_{t+1}=H_t$ $P_T(E+B_T+\Phi_T)=$ $=H_T+P_{T+1}\Phi_{T+1}$	$(E+B_1+\Phi_1)Z_1=X_1+\Phi_1Z_0$ $(E+B_t+\Phi_t)Z_t-\Phi_tZ_{t-1}=X_t$
Линейная форма	$\sum\limits_t X_t\cdot P_t+P_1\Phi_1Z_0$	$\sum\limits_t H_t\cdot Z_t+P_{T+1}\Phi_{T+1}Z_T$

3. Встречные расчеты

Допустим, что модели, помещенные в табл. 1 и 2, получены в результате оптимизации многовариантных динамических задач линейного программирования ([2], стр. 291—293, [3]). Прямоугольную технологическую матрицу, соответствующую по смыслу матрице $E+F_t-A_t$ из табл. 1, обозначим через Q_t, а матрице $E+B_t-\Phi_t$ — через R_t. Остальные обозначения сохраним прежними, но вектор-столбец $X_t=(x_j^{(t)})$

[3] Симметричными двойственными задачами линейного программирования иногда называют такие, условиями которых являются неравенства, а переменные не могут быть отрицательными ([1], стр. 111—118). В данной работе понятие симметрии используется в более широком смысле.

и вектор-строка $P_t = (p_j^{(t)})$ становятся n-мерными ($j = 1, 2, \ldots, n$), матрица Q_t — $m \times n$-мерной и матрица R_t — $n \times m$-мерной. Вектор-столбец $Z_t = (z_i^{(t)})$ и вектор-строка $H_t = (h_i^{(t)})$ остаются m-мерными.

В табл. 4 собраны модели четырех задач: задача 1 — на минимум валового выпуска продукции и расхода ресурсов для покрытия заданного спроса на конечную продукцию потребительского назначения, задача 2 — на максимум полезного эффекта потребительской конечной продукции при заданных экзогенных затратах, задача 3 — на минимум экзогенных затрат при данных ценах, задача 4 — на максимум фондов потребления при данных ресурсах.

В точке экстремума соотношение параметров этих задач выражается балансовыми уравнениями (табл. 2).[4] Реальный процесс планирования не укладывается ни в одну из этих моделей в отдельности.[5] Он осуществляется в двух направлениях в порядке встречных итераций, так что векторы продукции, цен, прямых затрат и потребностей оказываются попеременно то искомыми, то заданными (меняются местами входы и выходы моделей). Исходной для первого направления, представленного задачами 1 и 2, служит информация об уровне и динамике потребностей (вектор Z_t) и прямых

Таблица 4

	Модель		Модель
	прямая	двойственная	
Выходная величина	Задача 1 $X_t \geqslant 0$	Задача 2 $H_t \geqslant 0$	исходная
Неравенство	$Q_t X_t - F_t X_{t+1} \geqslant Z_t$ $(X_{T+1} = 0)$	$H_t Q_t - H_{t-1} F_{t-1} \leqslant P_t$ $(H_0 = 0)$	исходная
Линейная форма	$\sum_{t=1}^{T} P_t \cdot X_t \to \min$	$\sum_{t=1}^{T} Z_t \cdot H_t \to \max$	исходная
Выходная величина	Задача 3 $P_t \geqslant 0$	Задача 4 $Z_t \geqslant 0$	смежная
Неравенство	$P_t R_t + P_{t-1} \Phi_{t-1} \geqslant H_t$ $(P_0 = 0)$	$R_t Z_t + \Phi_t Z_{t+1} \leqslant X_t$ $(Z_{T+1} = 0)$	смежная
Линейная форма	$\sum_{t=1}^{T} X_t \cdot P_t \to \min$	$\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot Z_t \to \max$	смежная

экзогенных затрат труда (вектор P_t). На этой основе определяются валовые выпуски и оценки полезного эффекта потребительской продукции, которые равны полным трудовым затратам, общественно необходимым по условиям производства и потребления.

Второе направление расчетов, характеризуемое задачами 3 и 4, строится на информации о валовых ресурсах и мощностях (вектор X_t) и ценах (вектор H_t) — также в динамике. В результате устанавливаются размеры конечного потребления и производ-

[4] Решив динамическую задачу линейного программирования, удалим из базисной матрицы, соответствующей оптимальному плану, технологические способы, которые в этот план не вошли. После этого в модели не останется неравенств и она приобретет вид и свойства балансовой модели из табл. 2.

[5] О взаимосвязях задач на максимум благосостояния и на минимум затрат см. [4], стр. 21—24 и [5].

ственные оценки — прямые общественно необходимые затраты труда (и в том и другом случае принимается в расчет как затрата, так и экономия труда).

В целом рассматриваемые модели имитируют, хотя и весьма схематично, двусторонний процесс формирования и превращений общественно необходимых затрат и экономии труда под воздействием факторов производства и факторов потребления.[6]

Назначение методов планирования в конечном счете состоит в том, чтобы обеспечить сходимость этих расчетов к оптимальному решению. Однако полное совмещение встречных потоков информации по всей номенклатуре продукции, спроса, затрат и цен осуществляется в процессе практической деятельности по выполнению планов с использованием товарно-денежного механизма.

В современном практическом планировании пока отсутствует механизм, синхронизирующий различные направления расчетов. Не обеспеченные в должной мере адекватными моделями, методами и вычислительной техникой, они развиваются параллельно и сосуществуют. Модель 1 (табл. 1) соответствует методу межотраслевого баланса (от конечной продукции — к валовой), модель 4 — традиционной практике плановой работы (от валовой продукции и ресурсов — к конечной). Модель 3 представляет собой схему для расчета лимитов фонда заработной платы предприятия при данном уровне товарных цен и производственных затрат. Применяемые формулы калькулирования затрат на производство и ценообразование напоминают уравнение модели 2.

С позиции решения задач планирования крупных производственных систем по принципу декомпозиции [7] работу статических аналогов смежных пар моделей можно представить в виде последовательных и скоординированных итераций на верхнем и нижнем уровнях планирования. Планирующий орган решает агрегированные двойственные задачи на моделях типа 1 и 2, отправляясь от некоторой гипотезы о потребности в конечной продукции и уровне прямых производственных затрат. Полученные в результате оптимальные цены (вектор H), которые соответствуют оптимальному плану производства ресурсов (вектор X), сообщаются производственным единицам, а они, исходя из этих цен и данных о располагаемых ими мощностях, решают задачи на моделях типа 3 и 4, определяя оптимальные в их условиях размеры выпуска своей конечной (товарной) продукции, потребности в ресурсах и уровень прямых производственных затрат. Эти данные передаются в планирующий центр для проверки первоначальной гипотезы о векторах P и Z. При несбалансированности центр корректирует последние и решает свои задачи вновь. Итеративный процесс продолжается до совмещения результатов планирования на двух уровнях с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Гасс, Линейное программирование. М., 1961.
2. Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959.
3. Л. В. Канторович, В. Л. Макаров, Оптимальные модели перспективного планирования. В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. 3, М., 1965, стр. 7—87.
4. А. Л. Лурье, Абстрактная модель оптимального хозяйственного процесса и о. о. оценки. «Экономика и математические методы», 1966, II, вып. 1, стр. 12—30.

[6] В. В. Новожилов выражает основное условие, определяющее общественно необходимые затраты труда, в виде ([6], стр. 314, 368):

Труд, необходимый по условиям производства } равен { труду, необходимому по условиям потребления.

«Это равенство — краеугольный камень теории стоимости.... Оно охватывает обе стороны ценообразования — производство и потребности, связывает закон стоимости с законом экономии труда, с определением затрат трудом. Тем самым определяется основа для измерения затрат и результатов. Все потребительские оценки как средств производства, так и предметов потребления выражаются в той же единице, в какой измеряются затраты общественного труда» ([6], стр. 369).

5. А. Г. Аганбегян, К. А. Багриновский, О задачах народнохозяйственного оптимума. «Вопросы экономики», 1967, № 10, стр. 116—122.
6. В. В. Новожилов, Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М., 1967.
7. Ю. Эннусте, О разложении задачи оптимального планирования производства. Изв. АН ЭССР. Обществ. науки, 19, 1970, № 1, стр. 3—21.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/I 1971

I. KAGANOVITŠ

HINDADE DÜNAAMILINE MUDEL JA KAASMUDELID

Resümee

Artiklis kirjeldatakse dünaamiliste tasakaalumudelite süsteemi. On koostatud hindade dünaamiline, harudevahelise dünaamilise mudeli duaalne mudel ja duaalsete mudelite paar, mis vormilt ja omadustelt on algmudelite suhtes sümmeetriline. Selle alusel vaadeldakse duaalsete mudelite kõrval kaasmudelite paare ning käsitletakse nende mudelite süsteemi kasutamist ja tööprintsiipe.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Toimetusse saabunud
22. I 1971

I. KAGANOVICH

A DYNAMIC MODEL OF PRICES AND ASSOCIATIVE MODELS

Summary

The author describes a system of balance models. A dynamic model of prices has been devised, which is dual in respect to inter-branch dynamic models, and a pair of dual models that are symmetrical, as to their form and qualities, in respect to the initial models. On that basis, next to dual models, the pair of associative models are discussed. The application of the described system of models is considered, as well as the working principles.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
Jan. 22, 1971