EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1970, № 1

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1970.1.01

Ю. ЭННУСТЕ

О РАЗЛОЖЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Для определения оптимального плана производственной системы существует два принципиально различных способа: 1) плановое задание составляется и решается в совокупности; 2) плановое задание рассматривается как сумма частичных задач и приближенный оптимальный план определяется в виде их согласованных решений. Последний метод называется разложенным планированием.

Эффективность декомпозиции по сравнению с непосредственным решением зависит от характеристик как планируемой производственной системы, так и ее планирующей системы. Производственные системы, при которых разложенное планирование более эффективно, называются крупными.

Плановое задание целесообразно разложить, исходя из следующих принципов. Во-первых, в разрезе структурных элементов системы создаются подсистемы (элементы) с индивидуальными целевыми функциями и иерархическая структура для их согласования. По экономической терминологии, это соответствует децентрализации планирования. Во-вторых, плановый период разбивается на части. В-третьих, задание разлагается в разрезе составных проблем (размещение, технология и т. д.).

Изучение методов декомпозиции крупных производственных систем позволяет выяснить, как облегчить решение крупноразмерной задачи с известной структурой, и, что еще существеннее, как должен функционировать механизм планирования и регулирования крупной производственной системы.

Разложение задачи планирования на части приведет к решению одной важной проблемы, препятствующей развитию оптимального планирования. Дело в том, что адекватное математическое описание и изучение крупных систем очень сложно, а при более мелких элементах системы можно достигнуть практически достаточной адекватности.

Ниже делается попытка изучить возможности решения задачи оптимального планирования путем декомпозиции. При этом применяется как логический, так и математический анализ. Выводятся алгоритмы решения разложения задач с использованием методов эвристического программирования. Вначале разъясняется понятие эффективности планирующей системы, а затем рассматриваются возможности ее декомпозиции. Даются указания для разложения планирующей системы.

1. Описание отвлеченной производственной системы

1.1. Общее описание. Рассмотрим производителя (производственную систему), условно оторванного от среды, но имеющего с ней связи двух видов — материальные (ресурсы) и информационные (рис. 1).

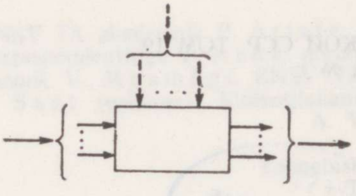

Рис. 1. Производитель как условно изолированная система (→ поток ресурсов, - - -→ поток информации).

Материальные связи представляют собой потоки ресурсов. Ресурсами называются изделия, энергия, природные богатства, мощности, рабочая сила и т. д. Ресурсы, выпускаемые системой, назовем ее конечной продукцией. Использование системой ресурсов назовем ее конечным потреблением. Структуры, описывающие соответствующие потоки, назовем структурами конечной продукции и конечного потребления. Структуру, описывающую обе указанные структуры, назовем хозяйственной. Допустим, что хозяйственная структура ограничена следующим образом: конечная продукция снизу (нельзя выпускать меньше положенного количества) и конечное потребление сверху (нельзя потреблять больше положенного количества).

Предположим, что производитель состоит из двух принципиально различных подсистем: технической и информационной (рис. 2). Первая перерабатывает ресурсы и не

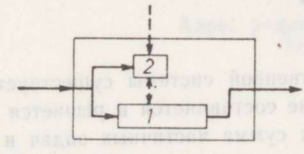

Рис. 2. Производитель как совокупность технологической (*1*) и планирующей (*2*) систем.

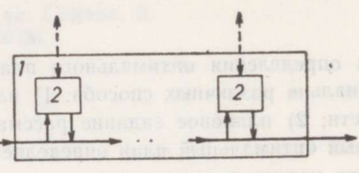

Рис. 3. Элементы (*2*) технологической системы.

располагает устройствами переработки информации, вторая перерабатывает только информацию, а в качестве ресурсов имеет только вход (потребление). Назовем ее планирующей, или управляющей, системой.

Рассмотрим технологическую систему как состоящую из подсистем, или технологических элементов (рис. 3). Каждый элемент условно изолирован от системы и обладает входами и выходами ресурсов. Элементы в свою очередь могут состоять из подсистем.

Структуру вещественных входных и выходных потоков технологического элемента назовем его хозяйственной структурой. Допустим, что последняя однозначно зависит от показателя, называемого интенсивностью применения элемента — непосредственно ограниченной величины. Предположим, что интенсивность применения элемента определяется входящей в него информацией.

Сумма хозяйственных структур элементов составляет хозяйственную структуру технологической системы. Таким образом, последняя зависит от интенсивностей применения всех элементов. Совокупность этих интенсивностей назовем структурой применения технологической системы. Следовательно, хозяйственная структура технологической системы является функцией ее структуры применения.

Целью планирующей системы должно быть получение наилучшего плана для технологической системы. Выдвинем некоторые условия, которым должен соответствовать наилучший план. Он должен обеспечить работу технологической системы с максимальной эффективностью. Предположим, что оценка эффективности технологической системы дается окружающей средой. Изучение такой проблемы относится к области теории полезности.

На основании этой теории выдвинем некоторые упрощающие условия. Предположим, что эффективность технологической системы оценивается только на основании ее хозяйственной структуры. Допустим, что хозяйственные структуры могут быть сопоставлены, исходя из отношения предпочтения, и из этого сопоставления можно вывести функцию, измеряющую эффективность хозяйственной структуры. Далее предположим, что в этой функции поток каждого ресурса оценивается изолированно (аддитивность) таким образом, что оценка потока каждого ресурса равняется умножению интенсивности данного потока на соответствующую внешнюю цену. Внешняя цена данного ресурса не зависит от интенсивностей потоков других ресурсов. Итак, предположим, что для потока каждого ресурса задана внешняя цена, которая зависит только от потока этого ресурса, а сумма, взвешенная по внешним ценам хозяйственной структуры системы, измеряет эффективность его состояния.

Сумму потоков, взвешенную во внешних ценах, выпускаемых технологической системой (положительные координаты хозяйственной структуры), назовем доходами, а сумму входящих потоков — расходами. Эффект системы представляет собой разницу между доходами и расходами.

В некоторых применениях эффект можно рассматривать более упрощенно: например, достигнуть максимальных доходов и наибольшего количества выпускаемых комплектов при данных затратах; или достигнуть заданных доходов (интенсивность выпуска) с минимальными затратами.

Понятно, что задачей планирующей системы с данной структурой и принципом работы является составление качественного плана для технологической системы, максимизирующего эффект. Предположим, что чем качественнее план, тем больше он соответствует действительности и тем больше «настоящий эффект» технологической системы, т. е. ожидание эффекта с учетом риска. Далее предположим, что при данной структуре и принципе работы планирующей системы соответствие плана действительности находится в прямой зависимости от затрат, произведенных при планировании.

Сравнив затраты на планирование и ожидание эффекта технологической системы, получим задачу планирования «высшего» порядка: какие затраты на планирующую систему являются оптимальными? Затраты ниже оптимальных привели бы к недостаточному планированию, а выше — к чрезмерному.

Еще сложнее дело обстоит в случае, когда структура и функции планирующей системы могут быть избраны и от этого выбора существенно зависят как затраты на планирование, так и качество плана.

Теоретически крайними случаями избираемых принципов работы являются применение способа композиции или разложения. В первом случае планирующая система составляет и решает задачу планирования в целом. В случае разложения задача планирования рассматривается как состоящая из частичных задач, а план для всей системы находится путем согласованного решения этих частичных задач.

Разложение только в разрезе времени и проблем в экономическом смысле соответствует централизации. В рамках центрального планирующего органа создаются отделы, занимающиеся частями плана за разные периоды или разными проблемами.

В экономическом смысле децентрализации планирования соответствует разложение, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Частичные задачи составляются в разрезе элементов технологической системы.
2. Каждая частичная задача имеет собственную целевую функцию.
3. Частичные задачи решаются руководителями элементов, самостоятельно принимающих решения, которые заинтересованы в оптимальном планировании элементов.
4. Координация работы руководителей элементов осуществляется центром только путем задания параметров целевых функций частичных задач и ограничений.

Таким образом, способом композиции элементы планирующей системы только накапливают и перерабатывают информацию, причем к преобразованиям не относится принятие решений, т. е. решение задач на оптимум. Способом разложения составляются подсистемы планирующей системы, которые могут самостоятельно принимать решения в разрезе проблем или технологических элементов.

Развитие планирующих систем показало, что когда в число элементов планирующей системы входят люди, целесообразно применять способ разложения. Рассмотрение человека как элемента, самостоятельно принимающего решения, значительно повышает его способность к руководству в сравнении с тем случаем, когда к нему относятся как к средству переработки информации.

В настоящей статье делается попытка изучить принципы функционирования разложенной планирующей системы. Вопросы оптимальной структуры планирующей системы (например, число уровней руководства в иерархической структуре) выходят за рамки данной статьи.

Существующие планирующие системы часто параллельно применяют способы композиции и разложения. Такие случаи в статье не рассматриваются.

1.2. Математическое описание технологической системы. Обозначим ресурсы через индексы $i \in \{1, \ldots, m\} = M$, а технологические элементы — через $j \in \{1, \ldots, n\} = N$. При статической трактовке указанные множества относятся к одному и тому же периоду времени; при динамическом описании, с дискретным временем $\tau \in \{1, \ldots, \omega\} = \Omega$, множества M и N имеют элементы в каждом интервале τ планового периода Ω. Например, $M = M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_\omega$, где M_τ — множество ресурсов в интервале τ.

Обозначим интенсивность применения технологического элемента j через $x_j \in X_j$, где X_j — множество возможных (допускаемых) интенсивностей применения элемента j. Хозяйственная структура $g_j = (g_{ij})$, $i \in M$ элемента j определена m-мерной векторной функцией $g_j = g_j(x_j) = (g_{ij}(x_j))$, где $g_{ij} > 0$ означает выпуск ресурса i из элемента j в количестве g_{ij}, а $g_{ij} \leqslant 0$ означает потребление ресурса i в количестве $|g_{ij}|$.

Хозяйственная структура технологической системы определена следующим образом:

$$g = \sum_{j \in N} g_j = \sum_{j \in N} g_j(x_j) = g(x),$$

где $x = (x_j) \in X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ представляет собой структуру применения технологической системы, а X — множество допускаемых структур. Согласно предположению, выдвинутому в общем описании, $g \geqslant b$, где b — ограничение, накладываемое на хозяйственную структуру технологической системы.

1.3. Математическое выражение задачи оптимального планирования технологической системы. Согласно предположению, приведенному в общем описании, эффект технологической системы определяется ее хозяйственной структурой $g = (g_i)$, $i \in M$ следующим образом:

$$e(g) = \sum_{i \in M} e_i(g_i) = \sum_{i \in M} e_i(g_i(x)),$$

где $g_i(x) = \sum_{j \in N} g_{ij}(x_j)$.

Таким образом, мы имеем дело с задачей на оптимум при структуре

$$\max_{x \in X} \sum_{i \in M} e_i(g_i(x)) \Big\} \sum_{j \in N} g_j(x_j) = g \geqslant b, \tag{1}$$

где целевая функция представляет собой сумму по ресурсам, а система ограничений — сумму по элементам.

Решение x задачи (1) содержится в решении следующей задачи:

$$\max_{u \in U} \sum_{k \in K} c_k(u_k) \Big\} \sum_{k \in K} h_k(u_k) = b, \tag{2}$$

где $u = (u_k) = (x, w) \subset U = X \times W$; $W = \{w \mid w \geqslant 0\}$; $k \in K = N \cup M$;

$$h_k(u_k) = \begin{cases} g_k(x_k), & k \in N \\ (0, \ldots, 0, -w_k, 0, \ldots, 0)', & k \in M, \end{cases}$$

и

$$c_k(u_k) = \begin{cases} 0, & k \in N \\ e_k(b_k + w_k) = c_k(w_k), & k \in M. \end{cases}$$

Действительно, из условия $\sum_{k \in K} h_k(u_k) = b$ видно, что $\sum_{k \in N} g_k(x_k) - w = g - w = b$, а $w = g - b$ и, таким образом, это дополнительная неизвестная.

Задача (2) обладает такой структурой, что суммирование как целевой функции, так и ограничений, происходит по единицам системы, причем число единиц системы дополнено единицами, хозяйственные структуры которых будут $(0, \ldots, 0, -\varpi_k, 0, \ldots, 0)'$, $k \in M$.

1. 31. Интерпретация задачи (2). Непосредственно сформулированная задача (1) была преобразована в задачу (2). В последней технологическая система была дополнена новой системой, при которой каждому ресурсу соответствует один элемент. В оптимальном плане интенсивность применения этого элемента показывает, в каком количестве соответствующий ресурс выпускается сверх обязанности (ограничения), или в какой мере соответствующий потребляемый ресурс сберегается по сравнению с допускаемым количеством потребления. Дополнительную систему назовем обменной. Теперь можно сказать, что оптимальная хозяйственная структура технологической системы равна сумме ограничения хозяйственной структуры и оптимальной структуры применения обменной системы.

Поскольку ограничение задано, то эффект технологической системы можно оценить только на основании потоков (интенсивностей применения) обменной системы, причем оценка происходит по преобразованным внешним ценам. Последние показывают цены на продукцию, выпущенную сверх положенного количества, или на ресурсы, сбереженные для допускаемого потребления в зависимости от дополнительно выпущенных или сбереженных количеств.

В преобразованной задаче интенсивности применения технологических элементов в целевую функцию не входят, они встречаются только в системе равновесия дополненной задачи, в которой их функция состоит в уравновешивании производства — потребления. При этом потреблением считаются также потоки обменной системы.

1.32. Классы задачи (2). В задаче (2) до сих пор определена только форма функций $h_k(u_k)$, $k \in M$. Это линейные непрерывные функции, которые определены при неотрицательных значениях аргументов ϖ_k. Выбор видов остальных функций $c_k(u_k)$, $k \in M$ и $h_k(u_k)$, $k \in N$ формально свободен. Свободен также характер множества X. В зависимости от их выбора получается ряд классов задач. Тем из них, которые имеют практическое значение, в следующей таблице приданы индексы. При составлении таблицы предполагалось, что все функции — детерминистические, а множество X является выпуклым, ограниченным и замкнутым.

		X непрерывна и $h_k(u_k), k \in N$			X дискретна и $h_k(u_k), k \in N$		
		линейная	выпуклая	строго выпуклая	линейная	выпуклая	строго выпуклая
	линейная	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$c_k(u_k), k \in M$	выпуклая	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
	строго выпуклая	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6

2. Децентрализованное планирование

2.1 Снятие ограничений с технологической системы. Сложность задачи оптимального планирования (2) усугубляется тем, что на нее наложено ограничение. Хозяйственная структура задачи должна удовлетворять определенным дополнительным условиям (ограничениям). Предположим, что при нарушении некоторых из них можно увеличить эффект системы. Таким образом, при максимизации эффекта системы необходимо проверить, выполнены ли указанные условия. Для упрощения задачи, т. е. снятия дополнительных условий, исходим из следующей теоремы.

Теорема 1. Дополнительные условия можно заменить на стимулирование эффекта.

В самом деле, создаем новую целевую функцию, которую назовем стимулированным эффектом. Если она образована таким образом, что нарушение дополнительных условий невыгодно (связано с наложением определенного штрафа на эффект, уменьшением эффекта), то при составлении оптимального плана нет необходимости соблюдать дополнительные условия. Таким образом получаем более простую задачу, но содержащую большее число неизвестных. Новые неизвестные — это стимулы, число которых равно числу дополнительных условий. По существу стимулы являются оценками (ценами), показывающими дополнительный эффект, который получился бы при нарушении соответствующего условия на единицу. Если бы стимул (штраф) был меньше, то было бы выгодно нарушить ограничение и максимизация стимулированного эффекта не обеспечила бы решения исходной задачи.

2.11. Математическое представление. В математическом смысле стимулированному эффекту задачи (2) соответствует ее Лагранжева функция, а стимулы являются неопределенными множителями этой функции.

Образуем для задачи (2) функцию Лагранжа:

$$L(u, \lambda) = \sum_{k \in M} c_k(u_k) + \sum_{k \in K} \sum_{i \in M} \lambda_i h_{ik}(u_k) - \sum_{i \in M} \lambda_i b_i. \tag{3}$$

Решение функции (3), u, должно удовлетворять условию: $u \in U$. Но, по теории Лагранжа—Эверетта [1], это условие не усложняет наших рассуждений на основе функции (3).

2.2. Разложение системы. Образование стимулированного эффекта позволяет разложить оптимальное планирование дополненной производственной системы, исходя из следующих принципов.

Аксиома 1. Стимулирование системы означает стимулирование всех ее элементов.

Теорема 2. Планы элементов, максимизирующие стимулированные эффекты соответствующих элементов, при данных стимулах составят оптимальный план системы.

Действительно, приведенные выше примеры легко обосновать путем следующих математических преобразований.

2.21. Математическое представление. Функция (3) может быть переписана таким образом:

$$L(u, \lambda) = \sum_{k \in K} [c_k(u_k) + \sum_{i \in M} \lambda_i h_{ik}(u_k)] - \sum_{i \in M} \lambda_i b_i. \tag{4}$$

Суммы, заключенные в квадратные скобки, представляют собой стимулированные эффекты элементов систем. При заданном λ они не содержат совместных неизвестных и в таком случае значение функции (4) по u максимально, если стимулированные эффекты $L_k(u_k, \lambda)$ элементов $k \in K$ максимальны по u_k, $k \in K$. Итак, задача (4) равноценна задаче (2), но она разложена.

2.3. Децентрализованное планирование при помощи цен. В разложенной системе элементы планируются их руководителями (плановиками). Они составляют планы с таким расчетом, чтобы максимизировать значение своей целевой функции в пределах возможного. Для образования целевых функций им нужны внешние цены. Следовательно, необходимо создать элемент, выпускающий внутренние цены системы. Назовем такой элемент руководителем высшего уровня. Если руководителей остальных элементов назвать руководителями низшего уровня, то пользуясь такой терминологией, можно говорить о двухуровневой планирующей системе или о двухуровневом децентрализованном планировании.

Как определить цены, соответствующие оптимальному плану, т. е. оптимальные цены системы? На это дает ответ следующая аксиома.

Аксиома 2. В разложенной системе определение оптимальных цен и составление оптимального плана происходит итерационно путем цикличного обмена информацией между руководителями (разных уровней).

Обмен информацией можно организовать по-разному. В экономической науке наи более известно предписание, основанное на классической доктрине о равновесных ценах предложения и спроса [3, 4]. Согласно этой доктрине, децентрализованное планирование при помощи внутренних цен осуществляется следующим образом. На основании внутренних цен, заданных как исходное решение, элементы составляют оптимальные планы, а также соответствующие им хозяйственные структуры (спрос и предложение) и сообщают об этом руководителю высшего уровня (или рынку). Руководитель высшего уровня выявляет общее состояние предложения-спроса в системе и соответствие его поставленным условиям. Если условие выполнено, цена не изменяется.

При чрезмерном предложении ресурса его цена снижается, а при недостаточном повышается. Скорректированные таким образом цены доводятся до руководителей элементов, и начинается новый цикл. Этот процесс продолжится до тех пор, пока не будут найдены равновесные или оптимальные цены, которые в разложенной системе приводят спрос и предложение в соответствие с поставленными условиями. В этих ценах стимулированные эффекты всех элементов максимальны, причем выполнены условия, поставленные перед системой. Следовательно, найден оптимальный план.

Мы видим, что в описанном выше процессе элементы расширенной системы в каждом цикле стремятся к максимизации стимулированного эффекта системы. Руководитель высшего уровня, наоборот, стремится к тому, чтобы при данных планах найти цены, которые минимизируют стимулированный эффект с целью устранения эффекта, полученного путем нарушения поставленных условий.

Заметим, что стимулированные эффекты технологических элементов представляют собой разницу между их доходами и расходами во внутренних ценах. Таким образом, увеличение эффекта элемента означает увеличение разницы между доходами и расходами во внутренних ценах. В зависимости от содержания элемента разницей между доходами и расходами может быть национальный доход, чистый доход, прибыль и т. д.

Стимулированный эффект обменного элемента также является разницей между доходами и расходами. Доходы представляют собой стоимость ресурса по внешней цене, а расходы — стоимость его по внутренней цене. Дополнительную систему целесообразно истолковать как орган сбыта и снабжения производственной системы. Каждый его элемент является агентом какого-либо ресурса.

Мы видим, что решение задачи на оптимум в совокупности, требующее сосредоточения всей информации в одной системе, в которой она подвергается монотонной и жесткой переработке, можно заменить более гибким способом разложения. При этом способе вместо направления большого количества сведений в один центр достаточно многократного обмена меньшим количеством информации. Жесткое решение задачи заменяется более гибкими задачами о принятии решения.

К сожалению, нужно добавить, что математической экономике хорошо известна ограниченность руководства при помощи цен [2, 3, 5]. Существуют классы систем, при которых такой процесс не сходится (начинается колебание), или итерация сводится к неоптимальному плану, или она бесконечна.

Понятно, что хорошо сходятся такие системы, элементы которых сильно реагируют на изменения цен и при любой системе цен каждый элемент имеет только один оптимальный план. Наоборот, опасны ситуации, в которых элементы слабо реагируют на изменения цен, или при существующих ценах имеют несколько альтернативных оптимальных планов. В последнем случае у элементов отсутствует дополнительная информация для выбора такого плана, в который входил бы оптимальный план системы. Этот вопрос будет рассмотрен в разделе 2.4.

2.31. Об алгоритмах планирования при помощи цен. Наиболее общая математическая трактовка возможна на основании условия Куна-Такера. Для функции (3) условие седловой точки будет следующим. Чтобы точка $\hat{u}$ была решением задачи (3), необходимо, чтобы она удовлетворяла условию

$$L(u, \hat{\lambda}) \leqslant L(\hat{u}, \hat{\lambda}) \leqslant L(\hat{u}, \lambda), \tag{5}$$

где $\lambda \geqslant 0$.

Существует класс задач определенного вида, для которых справедлива теорема [6, стр. 316]: достаточно, чтобы точка $\hat{u}$ удовлетворяла условиям седловой точки [6, стр. 313], и она будет решением задачи (2).

Таким образом, в некоторых случаях путем нахождения седловой точки можно найти решение задачи (2). Условие седловой точки можно записать в виде

$$L(\hat{u}, \hat{\lambda}) = \max_u \min_\lambda L(u, \lambda), \tag{5a}$$

что указывает на возможность его решения при помощи теории игр [7]. Первый игрок (в данном случае то множество игроков, которое составляют руководители элементов) на шаге l при заданном λ для выбора своей стратегии принципиально использует условие

а) $\max\limits_{u_k} L_k(u_k, \lambda^l), \quad k \in K,$

а другой игрок для нахождения λ использует условие

б) $\min\limits_{\lambda} L(u^l, \lambda).$

В качестве предписания для выбора шагов по результатам а) и б) можно выбрать какой-либо метод решения игры, например, метод Брауна-Робинзона.

Правила а) и б) можно модифицировать. Шаг в направлении оптимума ($\hat{u}^l$ или $\hat{\lambda}^l$) можно заменить шагом в направлении градиента данного шага (в случае λ, в направлении антиградиента):

с) $\operatorname{grad}\limits_{u} L(u, \lambda^l),$

д) $-\operatorname{grad}\limits_{\lambda} L(u^l, \lambda).$

В таком случае мы имеем дело с методом градиентов и конкретный расчет шагов можно вести, например, по способу Арроу—Гарвича.

И, наконец, можно создать итерационный метод путем комбинации методов игр и градиентов. В случае, когда руководители низшего уровня на каждом шагу решают задачи на оптимум и руководитель высшего уровня для регулирования цен применяет метод градиентов, создается алгоритм, соответствующий понятию децентрализованного руководства при помощи цен. Последний алгоритм был выведен также Х. Эвереттом [8] без постановки условия Куна—Такера и для рассматриваемой системы приспособлен в работе [9].

В данном случае применимость последнего алгоритма заключается в том, что по (3)

$$\operatorname{grad}_{\lambda} L(u^l, \lambda) = \sum_{k \in K} h_k(u_k) - b.$$

Такое его нахождение не представляет трудностей и имеет смысловое значение, а именно, положительная координата градиента означает преувеличенное предложение, а отрицательная координата — преувеличенный спрос при ценах λ^{l-1}.

Напоминаем, что задача первого игрока на шагу l, согласно выражению (4), разлагается на изолированную задачу

$$\max_{u_k} \left[c_k(u_k) + \sum \lambda_i^l h_{ik}(u_k)\right], \quad k \in K. \tag{4a}$$

Заметим, что некоторые координаты ограничения $b = (b_i)$ индивидуально могут принадлежать только элементу $k \in N$. Пусть они имеют индекс $t \in M_k \subset M$. В таком случае задачи элементов $k \in N$ и $t \in M$ можно записать совместно:

$$\max_{u_k} \max_{u_t} \Big[c_k(u_k) + \sum_{i\in M\setminus M_t} \lambda_i^l h_{ik}(u_k) + \sum_{t\in M_t} c_k(u_t) + \sum_{t\in M_t} \lambda_t^l \left(h_{tk}(u_k) - u_t - b_t\right)\Big]. \tag{4б}$$

Если $c_k(u_t) = 0$, $t \in M_k$, то (4б) равноценна задаче

$$\max_{u_k} \Big[c_k(u_k) + \sum_{i\in M\setminus M_k} \lambda_i^l h_{ik}(u_k) \,]\Big\}\, h_{tk}(u_k) \geqslant b_t,\ t \in M_t. \tag{4в}$$

Таким образом, при индивидуальных ограничениях ($M_t \neq \Theta$), не имеющих внешних цен, $c_k(u_t) = 0$, элементы решают ограниченные задачи на оптимум (4в).

Доказано [3], что представленные в таблице задачи 3.1, 3.2 и 3.3 когерентны и сходятся при планировании с помощью цен, т. е. $c_k(u_k)$, $k \in M$ являются строго вогнутыми, и $h_i(u) = \sum_k h_{ik}(u_k)$, $i \in M$ будут выпуклыми, вогнутыми или линейными.

Для прочих задач когерентность и сходимость этого алгоритма пока носит случайный характер.

2.4. Координация при помощи цен и лимитов. Вероятность того, что решение задачи сходится, зависит от числа каналов, используемых для координации. При рассмотренном выше алгоритме был использован только один канал — цена.

Аксиома 3. Увеличение числа каналов координации повышает вероятность сходимости задачи.

Дополним изложенный выше алгоритм еще одним каналом: координацией при помощи лимитов ресурсов или распределением ресурсов. По существу смысл этого шага заключается в следующем. Если при помощи цен нельзя обеспечить выполнения условий, поставленных перед системой, то руководитель высшего уровня подвергнет последние разложению. Он распределит также различные обязанности и ресурсы между элементами. В таких условиях элементы максимизируют свой стимулированный эффект.

Вот один из рабочих циклов указанной планирующей системы с двумя каналами. Высший уровень доводит до элементов внутренние цены и лимиты системы (ресурсы элементов, производственные обязанности и пр.). На основании полученной информации элементы составляют планы, оптимизирующие стимулированный эффект и сообщают наверх о соответствующих хозяйственных структурах и внутренних ценах. Последние представляют собой цены, которые элемент согласился бы платить за дополнительную единицу какого-либо ресурса, или же штраф, который они были бы согласны уплатить за невыполнение обязанности по какому-либо виду изделий.

Руководитель высшего уровня использует полученную информацию для корректировки внутренних цен системы (как прежде) и для перераспределения лимитов. Он добавит ресурсы к тем элементам, которые показали более высокие цены и снимет ресурсы с показавших низкие цены. Теперь начинается новый шаг.

Шаги делаются до тех пор, пока не выполнены условия системы и внутренние цены всех элементов не будут равняться внутренней цене системы. Понятно, что в случае более высокой внутренней цены к элементу добавляются ресурсы, и таким образом их эффективность падает до общего уровня.

Представленный алгоритм значительно более универсален. В рассмотренной отвлеченной системе уже невозможно привлечь дополнительные каналы воздействия (например, моральные). Таким образом, если эти два канала не обеспечат оптимума плана, то останется только прибегнуть к централизму.

Любопытно заметить, что реальные системы хозяйственного регулирования в основном пользуются ценами, а планирующие — методом лимитов. Это и понятно, поскольку в планировании цена относительно случайная, а лимит более определенная величина. И наоборот, при хозяйственном регулировании цена представляет собой более оперативную и стимулирующую величину.

Добавим, что при данном методе руководитель высшего уровня состоит из двух элементов: непосредственного руководителя (регулировщик цен) и двойственного руководителя (распределитель ресурсов).

2.41. Алгоритм планирования при помощи цен и лимитов. Идеи координации при помощи цен и лимитов содержатся в [3,10]. В случае рассматриваемой системы алгоритм принципиально выводится следующим образом.

Образуем из ограничения в задаче (2) ограничения b_k для элементов: $B=(b_k)=(b_{ik})$, $i \in M$, $k \in K$ таким образом, что

$$\sum_{k \in K} b_k = b.$$

Совокупность ограничений B применим к задаче (2) и получим задачу

$$c(B)=\max_{u} \sum_{k \in K} c_k(u_k) \left| \begin{array}{l} h_k^*(u_k^*)=b_k,\ k \in K, \\ \sum_{k \in K} b_k = b, \sum_{k \in K} h_k(u_k)=b. \end{array} \right. \tag{2a}$$

где $h_{ik}^*(u_k^*)$ — модель технологического элемента, которая дополнена обменной системой аналогично преобразованию задачи (1) в задачу (2) в пункте 1.3.

Пусть решением задачи (2) будет $\hat{u}=(\hat{u}_k)$ и $\hat{h}_k=h_k(\hat{u}_k)$. Если совокупность B такова, что $b_k=\hat{h}_k$, $k \in K$, то решение задачи (2а) будет и решением для задачи (2). Признаком выполнения условия $b_k=\hat{h}_k$ служит то обстоятельство, что функция $c(B)=\max_B$. Следовательно, задача

$$\max_B c(B) \tag{6}$$

эквивалентна задаче (2).

Для решения задачи (6) воспользуемся теорией Лагранжа:

$$L(u, B, \lambda, \gamma, \eta)=\sum_k c_k(u_k)+\sum_k \sum_i \lambda_i h_i(u_k)-\sum_i \lambda_i b_i+ \tag{7}$$

$$+\sum_k \sum_i \gamma_{ik}(h_{ik}^*(u_k^*)-b_{ik})+\sum_i \eta_i \left(\sum_k b_{ik}-b\right),$$

где $\gamma=(\gamma_{ik})$, $\eta=(\eta_i)$, $i \in M$, $k \in K$, $\gamma_{ik} \geqslant 0$, $\eta_i \geqslant 0$.

Применив для нахождения седловой точки функции (7) такой метод итерации, что при каждом шаге l на высшем уровне движение происходит в направлении градиента или антиградиента, а на низшем уровне в направлении оптимума шага l, получим следующий алгоритм.

Элемент системы $k \in K$ при шаге l решает следующую задачу:

$$\max_{u_k} \min_{\gamma_{ik}} \left[c_k(u_k)+\sum_i \lambda_i^l h_{ik}(u_k)-\sum_i \gamma_{ik}(h_{ik}^*(u_k^*)-b_{ik}^l)\right], \tag{8}$$

где λ_i^l и b_{ik}^l заданы сверху.

О результатах решения сообщают наверх $h_k^l=h_k(u_k^l)$ и γ_{ik}^l.

На высшем уровне в этот раз имеется два «игрока». Первый корректирует цены, а второй — лимиты. Для корректировки цен пользуются результатом

$$\operatorname{grad}_\lambda L^l=\sum_k h_k(u_k)-b.$$

При перераспределении лимитов возникает задача

$$\max_B \min_\eta L^l,$$

которая равноценна задаче

$$\max_B L^l \Big\} \sum_k b_k = b.$$

При соблюдении условия $\sum_k b_k = b$ необходимо двигаться в направлении к

$$\underset{B}{\operatorname{grad}} L'.$$

Алгоритм сформулирован.

Дополнительно формулируем

$$\underset{B}{\operatorname{grad}} L' = (\eta_i^l - \gamma_{ik}),$$

где η_i^l можно заменить λ_i^l. На самом деле, нарушение условия $\sum_k h_k = b$ равноценно нарушению условия $\sum_k b_k = b$, потому что $h_k = b_k$. Следовательно, при оптимальном плане $\lambda_i = \eta_i$.

Доказано [2], что такой алгоритм позволяет решать и линейные задачи. Заметим, что линейные задачи определенной структуры, очевидно, могут решаться и только путем координации лимитами.

2.5. Частные случаи структуры. Соответственно структурным особенностям планируемой системы целесообразно подвергнуть модификации и изложенные выше общие правила координации. Рассмотрим следующие пять частных случаев.

1. При достаточно большом числе элементов целесообразно применить иерархическую n-уровневую ($n>2$) систему планирования. В таком случае деятельность каждого руководителя низшего уровня координируется одним руководителем высшего уровня (рис. 4а). Руководитель высшего уровня обращается с подчиненными ему руководителями низшего уровня, как с элементами. Число уровней руководства принципов и правил координации не изменяет.

Рис. 4. *а* — n-уровневая планирующая система; *б* — двухуровневая система с параллельным управлением.

2. Ресурсы, используемые технологической системой, можно разделить на глобальные, локальные и индивидуальные. С первыми связано большинство технологических элементов, со вторыми — определенные группы элементов и с последними только один технологический элемент. Индивидуальные ресурсы каждый элемент может учитывать сам. Для координации локальных и глобальных ресурсов необходимо создать соответствующих параллельных руководителей на высшем уровне (рис. 4б). Параллельные руководители высшего уровня находятся на одинаковом уровне и не составляют иерархической структуры. Их задача заключается только в координации подчиненных им ресурсов с таким расчетом, чтобы условия задачи планирования были выполнены. Таким образом принципы и методы их координации обычны.

3. Одним из частных случаев технологической системы является последовательное соединение (рис. 5а), при котором ресурсы, произведенные каким-либо элементом, потребляются только следующим элементом. Первый элемент системы потребляет исходные ресурсы и последний элемент выпускает конечную продукцию. В таком случае все ресурсы локальны, поскольку они связывают только два элемента. Функции локальных

руководителей высшего уровня в этой системе могут выполнять также руководители элементов. Каждый элемент должен договориться со своими ближайшими соседями о ценах ресурсов, которые уравновешивают их спрос и предложение (прямые связи).

4. При параллельной структуре технологических элементов (рис. 5б) технологические связи между элементами отсутствуют. Их объединяют общие исходные ресурсы и общая продукция. В такой системе может быть два руководителя высшего уровня, один из них координирует потребление, другой — производство. Обе функции могут выполняться также одним и тем же руководителем. Правила координации обычны.

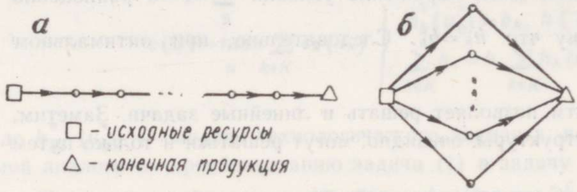

Рис. 5. Технологические системы: *а* — последовательная, *б* — параллельная.

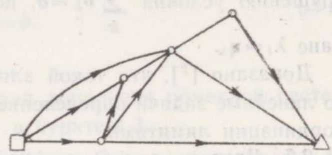

Рис. 6. Трехугольная технологическая схема.

5. Технологические элементы могут образовать трехугольную структуру (рис. 6), в которой последующие элементы потребляют только продукцию предшествующих элементов. Такая структура может рассматриваться как общая, однако составление специфической системы управления вызывает необходимость дополнительного изучения этой проблемы.

Математические замечания. С математической точки зрения все структуры являются частными случаями общего и таким образом алгоритмы их децентрализованного планирования вытекают из алгоритма решения общей задачи.

Многоуровневые системы управления рассматриваются в [11, 12, 13, 14], а последовательные и параллельные в [10]. Трехугольная система как непрерывная динамическая задача рассмотрена в [15].

2.6. Практические замечания. Оптимальное решение находят только тогда, когда руководители элементов соблюдают предписания алгоритма, правила. Если руководителями элементов являются электронно-вычислительные машины и вся планирующая система представляет собой систему из них, то отступление от правил может произойти только вследствие ошибок. Если в управлении элементами участвуют люди, положение осложняется. Деятельность рационального человека побуждается двумя стимулами: моральным и материальным. Оба стимула нужно соответствующим образом настроить. Так, деятельность, максимизирующую стимулированный эффект (прибыль), следует считать правильной, а противоположную — осудить. Во-вторых, материальное поощрение руководителей элементов должно осуществляться в зависимости от прибыли. Таким образом, фонд поощрения должен находиться в прямой зависимости от величины прибыли. Максимальная прибыль дает максимальное моральное и материальное поощрение.

Однако с учетом того, что увеличение объема производства на данном шагу означает снижение цены продукции на следующем шагу, руководитель элемента может допустить нарушение правил. Более того, используя подвластные ему материальные ресурсы (силу), он может захватить эффективные ресурсы, выделенные для других элементов, и т. д. Этого можно избежать разными способами. Во-первых, руководителей элементов можно дополнительно стимулировать в зависимости от максимизации эффекта всей системы. При большом числе элементов это может оказаться безнадежным. Во-вторых, можно штрафовать тех руководителей элементов, которые нарушают правила. Для этого руководитель высшего уровня должен иметь возможность наложения штрафов.

Перед руководителем высшего уровня также стоит задача максимизации или минимизации определенных показателей. Поскольку он обладает полномочиями штрафовать, есть опасность, что он может использовать их в своих интересах, нарушая правила. Следовательно, руководитель следующего, более высокого уровня должен иметь возможность штрафовать подчиненного ему руководителя и т. д. Так как при такой системе руководителя самого высокого уровня уже никто не может штрафовать, то он должен быть честен и достаточно разумен для того, чтобы понимать правила и не нарушать их.

Конечно, можно представить себе систему, в которой руководители подсистем могли бы оштрафовать вышестоящего руководителя, но в таком случае они должны быть честными. Вероятно, трудно найти для каждого элемента честного руководителя. Этот вариант годен только тогда, когда необходимости в штрафах нет.

Мы зашли бы слишком далеко, если бы подвергли рассмотрению другие возможности коалиций элементов в целях максимального удовлетворения своих интересов. Этот вопрос относится к теории о коалициях.

3. Разложение плана во времени

Период, на который планируется производственная система (т. е. время до горизонта планирования), можно разбить на более короткие дискретные промежутки: подпериоды или интервалы. План на весь период может быть составлен, исходя из двух принципов. Во-первых, план на весь период составляется целостным (в разрезе всех интервалов). Во-вторых, весь план разбивается на подпланы (напр., генеральный план, перспективный план, текущий план и др.). Подпланы разрабатываются самостоятельно путем взаимных согласований и уточнений. Это и есть разложение плана во времени.

Здесь хорошо поддаются интерпретации два способа. Назовем первый оптимизацией по составляющим, а второй — методом координированных подпланов.

Первый заключается в следующем. На все подпериоды составляются исходные варианты плана. Первый подпериод уточняют с целью максимизации эффекта всего планового периода, причем учитываются исходные варианты планов остальных подпериодов. Такая же процедура применяется ко второму подпериоду, причем исходят из уточненного плана первого подпериода, и т. д.

Описанный способ применим в случае, когда системы условий подпериодов между собой не связаны. Взаимные связи имеются только в целевой функции и последняя должна удовлетворять определенным условиям (вогнутость).

Более соответствуют действительности случаи, когда в системе ограничений существуют связи между подпериодами. Так, предыдущий и последующий периоды должны быть сбалансированы по переходящим и добавляющимся мощностям, а также по обьемам продукции. В таком случае целесообразно применить двухуровневую систему. Рассмотрим, например, такой способ, при котором планы подпериодов должны максимизировать индивидуальные целевые функции, а составление планов подпериодов согласовывается при помощи лимитов. Руководитель высшего уровня распределяет и назначает лимиты на подпериоды. В пределах полученных лимитов составляются оптимальные планы и выявляется, какой эффект дало бы выделение дополнительных лимитов. Об этих оценках сообщают наверх, где проводится перераспределение лимитов и т. д. до тех пор, пока не возникнет ситуация, в которой оценки данного ресурса всеми подсистемами будут одинаковыми.

Лимитами, распределяемыми между подпериодами, практически могут быть переходящие мощности, незаконченные капиталовложения, природные ресурсы и т. д.

3.1. Об алгоритмах декомпозиции во времени. Для пояснения оптимизации по составляющим рассмотрим план $x=(x_\tau)$, $\tau=\{1, \dots, w\}=\Omega$, планового периода Ω, где ω — число дискретных интервалов, а x_τ — план на интервал τ. Под x_τ мы в общем понимаем вектор. Предположим, что $x_\tau \in X_\tau$, где X_τ — множество допускаемых планов на интервале τ. Таким образом $x \in X=X_1 \dots X_w$.

Предположим, что эффект Ф всего планового периода является вогнутой фукнцией

$$\Phi(x_1, \ldots, x_w),$$

определенной при множестве X.

При таких условиях следующая итерационная процедура сходится [16]. Пусть при шаге $l \geqslant 0$ план $x^l \in X$. Теперь находим $x_1^{l+1} \in X_1$ как план, максимизирующий $\Phi(x_1, x_2^l, \ldots, x_w^l)$. Затем отыщем $x_2^{l+1} \in X_2$ как план, максимизирующий $\Phi(x_1^{l+1}, x_2, \ldots, x_w^l)$ и т. д. до сходимости $\max\limits_x \Phi$.

В описанной задаче между планами интервалов нет взаимных ограничений, поскольку $x_\tau \in X_\tau$. Учет взаимных ограничений приведет к двухуровневому алгоритму.

Рассмотрим также применение способа лимитов для согласования планов интервалов. Пусть задачей всего планового периода будет задача (2) со следующими истолкованиями. Допустим, что индекс $k \in \{1, \ldots, n\} = N$ является индексом интервала, таким образом n — число интервалов в плановом периоде, а N — их множество. Пусть индекс $i \in \{1, \ldots, m\} = M$ описывает ресурсы на всех интервалах планового периода. Руководитель высшего уровня распределяет ресурсы между интервалами $B = (b_k) = (b_{ik})$, $k \in K$ с таким расчетом, что $\sum\limits_k b_k = b$. Теперь можно поставить задачу, эквивалентную (2):

$$\max_B \,[\max_u \sum_k c_k(u_k) \,\}\, h_k(u_k) = b_k]\} \sum_k b_k = b.$$

Лагранжева функция этой задачи будет

$$L(u, B, \gamma, \eta) = \sum_k c_k(u_k) + \sum_k \sum_i \gamma_{ik}(h_{ik}(u_k) - b_{ik}) + \sum_i \eta_i (\sum_k b_{ik} - b_i).$$

Руководитель интервала $k \in N$ на шагу l решает задачу

$$\max_{u_k} \min_{\gamma_k} [c_k(u_k) + \sum_i \gamma_{ik}(h_{ik}(u_k) - b_{ik}^l)].$$

Задачей руководителя высшего уровня на шагу l является перераспределение ресурсов в направлении

$$\operatorname{grad}_B L^l = (\eta_i - \gamma_{ik}^l)$$

или при соблюдении условий $\sum\limits_k b_k = b$ в направлении $(-\gamma_{ik}^l)$.

Заметим, что систему, разложенную по времени, всегда можно рассмотреть как систему, состоящую из элементов (подпериодов), соединенных последовательно. В таком виде она представляет собой дискретную задачу управления и для ее решения можно использовать, например, дискретную версию принципа максимума Понтрягина [17]. Применяемая при этом методе функция Гамильтона является частным случаем функции Лагранжа и при ее помощи задачу можно разбить на части.

4. Декомпозиция свойств и проблем процесса

4.1. Дополнительные задачи по свойствам процесса. Производство — это процесс с большим количеством элементов, связанных между собой динамически. Связи между элементами и целевая функция развития системы в общем нелинейны, разрывны, целочисленны и стохастичны. Изоморфную задачу, описывающую все эти свойства объекта, в наше время не удалось бы решить. Однако, можно составить разные комбинации предложений, упрощающих задачу. В зависимости от выбора их получится результат, который содержит принципиальные ошибки, обусловленные упрощающими предположениями.

Таким образом в зависимости от выбора предположений получим ряд задач «на разных языках» на управление одним и тем же объектом. Все эти задачи содержат принципиальные ошибки, но «в разных направлениях». Отсюда вытекает новая задача высшего уровня: на основании результатов задач (дополнительных задач), описывающих свойства процесса в разных направлениях, произвести синтез результата, который более адекватен действительному решению, чем решение любой дополнительной задачи.

Критерием качества синтеза должен быть минимум ожидаемой потери эффекта системы, обусловленный неадекватностью решенных задач, объекта и цели.

Интуитивно можно утверждать, что удачный синтез результата может быть получен двумя путями. Во-первых, при взвешивании (нахождение взвешенного среднего) или перемешивании дополнительных результатов. Во-вторых, образование компромиссного решения может произойти в результате какой-либо сходящейся процедуры координации.

4.2. Дополнительные задачи по проблемам. Цельная задача планирования производства должна дать ответ на ряд вопросов: где, как, когда, сколько и т. д. производить, как распределить продукцию и исходные ресурсы. Ответы могут быть даны в совокупности или в разложенном виде. В первом случае составляется задача, в которой описаны все проблемы, а затем ее решают. Во втором случае целостная задача разлагается на дополнительные подзадачи. Решение последних может осуществляться путем согласований между элементами или с высшим уровнем.

Подзадача описывает только часть проблем (например, размещение, технологию производства и др.) Согласование между элементами происходит следующим образом. Сперва строятся допускаемые исходные решения подзадач. Затем решения подвергаются уточнению. При уточненном решении одной задачи исходят из полученных решений других задач.

4.21. Об алгоритме координации подпроблем. Пусть множество проблем, охватываемых задачей, будет $z \in \{1, \ldots, v\} = Z$, а решение проблемы характеризует вектор $x_z \in X_z$, где X_z — множество допускаемых решений. Решение всей задачи $x = (x_z) \in X$.

Задача представлена в виде

$$\max_x \sigma(x) \} \; x \in X.$$

Обозначим через x^l решение на шаге l. Применим к задаче следующую процедуру.

Найти x_z^l из задачи

$$\max_{x_z} \sigma(x_1^l, \ldots, x_z, \ldots, x_v^l) \} \; x_z \in X_z, \; x_z^l \in F(x_i^l),$$

где $x_{i \neq z}^l$, $i \in Z$.

Условия сходимости процедуры не изучены.

Рассмотрим частный случай:

$$\max_{x_z} \sigma(x_1^l, \ldots, x_z, \ldots, x_v^l) \} \; x_z \in X_z, \; z \in Z.$$

Доказано [16], что при вогнутом $\sigma(x)$ процедура сходится.

Пример. Пусть имеется линейная задача со следующими обозначениями: $i \in \{1, \ldots, m\} = M$ — ресурсы, $s \in \{1, \ldots, t\} = S$ — технологии, $p \in \{1, \ldots, r\} = R$ — местоположения, $j \in \{1, \ldots, n\} = N$ — изделия. Пусть x_j^{sp} — объем производства изделия j при помощи технологии s в месте p. Соответствующий технологический коэффициент a_{ij}^{sp} и множитель целевой функции c_j^{sp}. Вся задача будет

$$\max \sum c_j^{sp} x_j^{sp} \} \sum_{jsp} a_{ij}^{sp} x_j^{sp} \geqslant b_i,\ i \in M,\ x_j^{sp} \in X_j^{sp}.$$

Выделим из задачи три дополнительных задачи.

1. Задача о производственной структуре системы. Предположим, что на шагу l для этой задачи задана структура технологий и размещений таким образом, что на основании параметров a_{ij}^{sp} и c_j^{sp} можно вычислить параметры a_{ij} и c_j. Заметим, что $x_j = \sum_{sp} x_j^{sp}$. Получим задачу

$$\max \sum_j c_j x_j \} \sum a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i \in M,\ x_j \in X_j,$$

откуда находим оптимальную производственную структуру $x^l = (x_j^l)$ системы на шагу l.

2. Задача о технологии. Допустим, что x^l и размещение заданы. Получим задачу

$$\max \sum_s c_j^s x_j^s \} \sum a_{ij}^s x_j^s \geqslant b_i^l,\quad i \in M,\ x_j^s \in X_j^s$$

Отсюда находим технологическую структуру x_j^{sl} системы на шагу l.

3. Задача о размещении. Заданы производственная структура x^l и технологическая структура x_j^{sl}. На их основании составим задачу

$$\max \sum_{jp} c_j^p x_j^p \} \sum_p x_j^p = x_j,\ \sum_j a_{ij}^p x_j^p \geqslant b_i^p,\ i \in M,\ j \in N,$$

где b_i^p — ограничение на ресурс i в точке p. Отсюда находим оптимальное размещение x_j^{pl} на шагу l.

В отношении информации три задачи замкнуты и можно начать итерацию. Сходимость ее можно проверить или численно, или по [18].

5. Об образовании разложенной планирующей системы

Понятие большого и малого всегда было относительным. Постараемся оценить размер производственной системы на основании возможностей планирования. Под последними мы понимаем уровень как теории планирования, так и средств по переработке информации. Если при данных возможностях оптимальная планирующая система, соответствующая какой-либо производственной системе, будет разложена, то производственную систему назовем крупной. Заметим, что технологически довольно «небольшая» система становится крупной, если в систему информации входит человек.

При образовании планирующей системы крупной производственной системы возникают следующие проблемы:

1. Оптимальная структура иерархии (число уровней управления и группировка элементов на подсистемы).

2. Выбор схем обмена информации между уровнями управления (другими словами, какой вид информации в каком количестве обменивается).

3. Выбор алгоритмов переработки информации на каждом уровне управления и в каждом элементе.

Проблемы выбора оптимального числа уровней управления только находятся в стадии постановки [13, 14] и в ближайшее время теория вряд ли сможет исправить решения, полученные из опыта. Можно отметить, что число уровней находится в явной зависимости (с обратной связью) от алгоритма планирования (т. е. от каналов информации и алгоритмов). В первое время наилучшие практические результаты смогла бы дать сравнительная имитация на электронно-вычислительной машине работы различных иерархических структур.

Иначе обстоит дело с выбором обмениваемой информации и совершенствованием алгоритмов переработки информации в элементах управления. Как показала настоящая статья, при помощи математических методов разложения строже, чем до сих пор, можно определить, обмен какой информацией необходим и достаточен для получения когерентной планирующей системы. Так же обстоит дело с алгоритмом переработки информации в каждом элементе управления. Математические методы оптимизации позволяют перерабатывать информацию более последовательно и автоматизированно (конечно, при декомпозиции не обязательно, чтобы каждый элемент перерабатывал информацию формализированным способом).

Повторим вышесказанное в терминах планирования народного хозяйства. В многоуровневой планирующей системе задача высшего уровня состоит в обеспечении баланса спроса-предложения ресурсов. Разделим ресурсы на глобальные и локальные. Последние делятся на территориально и технологически локальные. Таким образом, имеется два вида руководителей высшего уровня: территориальные и технологические (отрасль или министерство).

Каждый элемент производственной системы должен согласовывать свою работу как с территориальным, так и технологическим руководителем высшего уровня. Последние могут назначать для них лимиты на ресурсы и должны определить цены согласно координируемым ими ресурсам. Практика показала, что для координации глобальных ресурсов нецелесообразно создавать руководителя высшего уровня, а эту координацию можно осуществить через территориальных и технологических руководителей, работа которых координируется на высшем уровне. Для обмена информацией, связанной с локальными ресурсами, на каждом уровне управления должны быть горизонтальные каналы информации. Между хозяйственными единицами, а также между ними и потребителями могут быть «прямые связи» для обмена необходимой информацией об уникальных и несущественных ресурсах. Заметим, что территориальный и технологический руководители в принципе должен быть на одинаковом уровне. Однако с точки зрения локальных ресурсов, территориальный руководитель в отношении руководителя отрасли будет руководителем высшего уровня.

Планы, составляемые любым руководителем, делим на долговременные (до горизонта планирования), средние и кратковременные. Заметим, что для руководителя высшего уровня горизонт планирования более далек, чем для подчиненных ему руководителей. Он пользуется агрегированными параметрами, которые более устойчивы во времени. Например, горизонт планирования у руководителя низшего уровня соответствует концу среднего планового периода у руководителя высшего уровня. Таким образом, составление долговременного плана нельзя децентрализовать, его можно только разложить в разрезе проблем и упрощений. Это значит, что долговременный план составляется руководителем централько, а затем разлагается на частичные задачи.

Нужно еще подчеркнуть, что оптимальное планирование элемента только тогда приведет к оптимуму системы, когда система информации построена соответствующим образом. Если же в действительности соответствующая система информации не существует, то оптимальные планы элемента необходимо составлять очень осторожно [19] с тем расчетом, чтобы они были ориентированы на общий оптимум. При отсутствии цен равновесия особо опасны задачи оптимизации хозяйственных структур. Более надежны задачи о выборе технологии и размещения.

В итоге видим, что объективным условием оптимального планирования крупных производственных систем является его декомпозиция и децентрализация. При децентрализованном планировании руководитель высшего уровня стимулирует и может ограничить деятельность руководителей элементов. Он определяет, что и сколько элементы в общей сложности должны производить и могут потреблять. Как они это сделают, решают руководители элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Eppen, F. Gould, A Lagrangian Application to Production Models. Opns. Res., 1968, 16, 4, стр. 819—829.
2. А. Аганбегян, К. Багриновский, О соотношении народнохозяйственного оптимума и локальные оптимумов в экономической системе социализма. Опти-

мальное планирование и совершенствование управления народным хозяйством. М., 1969, стр. 53—65.
3. A. Charnes, R. Clower, K. Kortanek, Effective Control through Coherent Decentralization with Preemptive Goals. Econometrica, 1967, **37**, 2, стр. 294—320.
4. Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей. М., 1963.
5. W. Zangwill, A Decomposable Nonlinear Programming Approach. Opns. Res., 1967, **15**, 6, стр. 1068—1087.
6. Ч. Карр, Ч. Хоув, Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. М., 1966.
7. В. Волконский, Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Экономика и математические методы, 1965, **1**, 2, стр. 195—219.
8. H. Everett, III. Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources. Opns. Res., 1963, 3, стр. 399—417.
9. Ü. Ennuste, Tootmissüsteemi optimumülesannete lahendamisest dekomponeeritud Lagrange'i funktsiooni abil. ENSV TA Toimetised, Ühiskonnateadused, 1968, **XVII**, 2, стр. 107—122.
10. Т. Первозванская, А. Первозванский, Децентрализация оптимального планирования в сложной системе. Автоматика и телемеханика, 1968, № 7, стр. 60—71.
11. А. Волконский, Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М., 1967.
12. Р. Куликовский, Агрегация, оптимизация и управление организационной структуры больших систем. Экономика и математические методы, 1968, **4**, 1, стр. 65—85.
13. В. Михалевич, Ю. Ермольев, В. Шкурба, Н. Шор, Сложные системы и решение экстремальных задач АН УССР. Кибернетика, 1967, № 5, стр. 29—39.
14. M. Mesarović, Views on General System Theory. Wiley, New York, 1964.
15. С. Ульм, Метод условного градиента и принцип декомпозиции задач оптимального управления. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **18**, 2, стр. 245—248.
16. J. Warga, Minimizing Certain Convex Functions. J. Soc. Industr. Appl. Math. 1963, **11**, 3, стр. 588—593.
17. C. Hwang, L. Fan, A Discrete Version of Pontryagin's Maximum Principle. Opns. Res., 1967, **15**, 1, стр. 139—146.
18. Ф. Мартинес, В. Черняк, Некоторые свойства процессов агрегирования и десагрегирования в задачах линейного программирования. Моделирование экономических процессов. Вып. 2. Изд. Московского университета, 1968.
19. Ü. Ennuste, On Optimality Criteria for Production Systems. ENSV TA Toimetised, Ühiskonnateadused, 1969, **XVIII**, 2, стр. 99—104.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/II 1969

Ü. ENNUSTE

TOOTMISE OPTIMAALSE PLANEERIMISE DEKOMPONEERIMISEST

Resümee

Optimaalse plaani leidmiseks on kaks põhimõtteliselt erinevat teed: 1) ülesanne koostatakse ja lahendatakse tervikuna, 2) ülesannet vaadatakse osadest koosnevana ning ligikaudne optimaalne plaan leitakse osaülesannete koordineeritud lahendina. Viimast nimetatakse dekomponeeritud ehk polütsentriliseks planeerimiseks.

Dekompositsioonimeetodite uurimine võimaldab selgitada suuremõõtmeliste ülesannete lahendusvõimalusi ning, mis veelgi olulisem, valgustab polütsentrilise planeerimissüsteemi koordineerimise juhiseid.

Neid probleeme püütaksegi artiklis uurida, kusjuures oluliseks instrumendiks on heuristiline programmeerimine. Rakendatakse kahte meetodit: 1) tsenter jaotab ressursse ja alamjuhid määravad neile hinnangud ning 2) vastupidi — tsenter määrab hinnangud, alamjuhid aga ressursside jaotuse. Näidatakse, et mõlema lähenemise kombinatsioon annab üldisema meetodi.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
10. II 1969

Ü. ENNUSTE

ON THE DECOMPOSITION OF THE OPTIMUM PLANNING OF PRODUCTION

Summary

To determine the optimum plan, there are, in principle, two different ways. First, the problem is composed and solved as a whole. Secondly, the problem is considered to be made up of a number of parts; in that case, an approximate optimum plan is found as a co-ordinated solution of partial problems. The latter method is called decomposed planning (polycentric planning).

Research into decomposition methods allows us to reveal possibilities for solving multidimensional problems and, what is more important, throws light on the percepts for co-ordinating polycentric planning systems.

In this paper, an attempt is made to study those problems. Heuristic programming has been applied as an essential tool. Two patterns are employed: a centre distributes resources, and submanagers estimate them, or, on the contrary, a centre gives estimates and submanagers distribute resources. It is shown that a combination of both approaches will produce a more general method.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
Feb. 10, 1969