EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1969, Nr. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1969, № 4

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1969.4.06

Ю. ТЕНИСБЕРГ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ РЫНОЧНЫХ ЦЕН НА ЦВМ

1. Введение

Обычно проблемы ценообразования рассматриваются в форме «макроэкономических» задач. Эти проблемы затрагиваются не только при оптимизации экономических систем, но и при изучении рыночных процессов регулирования цен, основанных на спросе и предложении [1]. Представляет интерес исследование таких процессов на «микроуровне», т. е. на уровне элементарных актов взаимодействия «продавцов» и «покупателей». В [2] исследуются вопросы ценообразования на базе моделей товарно-денежного обмена на рынке. Вероятностный процесс «обмена» описывается детерминированными дифференциальными уравнениями. Строгое обоснование такого подхода представляет большие трудности. В настоящей работе вероятностный процесс «обмена» на рынке моделируется на ЦВМ при определенных параметрах и начальных данных. Исходя из тех же параметров и начальных данных решается система дифференциальных уравнений, полученных в [2]. Близость полученных результатов указывает на справедливость детерминированного описания таких процессов.

2. Моделирование процесса ценообразования на ЦВМ

Формирование цен рассмотрим на базе следующей модели рынка. Рынок составляют продавцы, обладающие одинаковым товаром и заинтересованные только в том, чтобы выручить как можно больше денег, и покупатели, которые преследуют цель получить за свои деньги возможно больше товара. Элементарный акт взаимодействия продавца и покупателя состоит в следующем. Каждый покупатель в соответствии с избранной им тактикой обращается к некоторому продавцу. Если у этого продавца имеется в наличии товар и если цена, назначенная продавцом, устраивает покупателя, совершается сделка: покупатель отдает деньги и получает соответствующее количество товара. Поведение продавцов определяется обычной тактикой изменения цен в зависимости от спроса на его товар. Добиваясь своих целей, покупатели и продавцы используют только ту информацию, которую они получают в таких актах купли-продажи.

Определим тактику продавца и покупателя. Пусть число продавцов на рынке равно n. Охарактеризуем i-го продавца постоянной величиной q_i — количеством товара, которым он располагает для продажи в единицу времени ($q_i>0$, $i=1,\dots,n$); другими словами, q_i — интенсивность «подвоза» товара i-му продавцу. Обозначим через c_i цену, по которой продает товар i-й продавец; тогда «предложение» товара этим продавцом в единицу времени, равное q_i в «натуральных» единицах, в денежном выражении составляет величину $c_i\, q_i$. Пусть спрос в единицу времени у i-го продавца, т. е.

количество денег, которое предлагают ему готовые на сделку покупатели, равняется π_i. Тогда закон регулирования цен можно записать в виде

$$c_i(t_k+\tau)=c_i(t_k)+\gamma\tau(\pi_i(t_k)-c_i(t_k)q_i), \qquad i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где γ — коэффициент, характеризующий скорость регулирования цен; k — номер корректировки цен (итерации); $t_k=t_0+k\tau$.

Покупательский спрос формируется следующим образом. Покупатель узнает цены c_i и c_j у двух равновероятно выбранных продавцов у i-го и j-го. С вероятностью $p(c_i, c_j)$ он совершает покупку у i-го продавца; у j-го продавца он покупает с вероятностью $p(c_j, c_i)=1-p(c_i, c_j)$ (при $c_i=c_j$ у обоих с одинаковой вероятностью — $1/2$). Положим $p(c_i, c_j)=\psi(c_j-c_i)$, где $\psi(x)$ — монотонно растущая функция $\psi(-\infty)=0$, $\psi(+\infty)=1$ (см. рис. 1). Если каждый покупатель имеет фиксированное количество денег a, то учитывая, что роль покупателя исчерпывается единственной сделкой, получаем соотношение, определяющее покупательский спрос в единицу времени у i-го продавца:

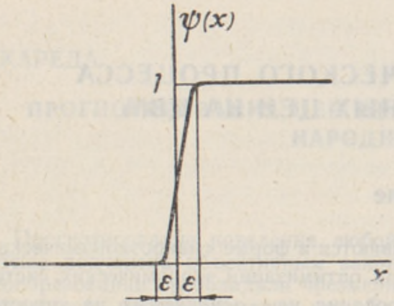

Рис. 1. Вид функции $\psi(x)$.

$$\pi_i=am_i, \quad i=1,\ldots,n,$$

где m_i — количество покупателей, согласившихся совершить покупку у i-го продавца за единицу времени. В среднем

$$\pi_i=\frac{2a\bar{\mu}}{n(n-1)}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\psi(c_j-c_i),$$

где $\bar{\mu}$ — среднее значение величины $\mu=\sum\limits_{i\neq 1}^{n}m_i$ (количество покупателей на рынке в единицу времени). Суммарный покупательский спрос за единицу времени составит величину $a\mu$, среднее значение которого $a\bar{\mu}$ характеризует интенсивность покупательского спроса A [2].

При решении системы (1) на ЦВМ использовался генератор случайного потока покупателей (покупатели «поступали на рынок» по одному за такт, и с помощью датчика случайных чисел выбиралась пара продавцов, к которым они обращались). Система (1) решалась исходя из следующих параметров: $n=32$, $a=10$, $\tau=320$ (тактов машинного времени). Так как покупатели поступали на рынок по одному за такт (единицу времени), то $\bar{\mu}=1$. Параметры подобраны таким образом, что цены коррегировались через интервал времени, в течение которого у каждого продавца в среднем совершили покупку десять покупателей. Функция $\psi(x)$ имела следующий вид:

$$\psi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 1/2 \text{ при } x=0,\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$$

При выборе величины γ исходили из условия, чтобы интервал τ корректировки цен был намного меньше характерного времени в (1) (см. [2]):

$$\gamma\tau\bar{q}\ll 1, \tag{2}$$

где $\bar{q}=0{,}3$ — средняя интенсивность подвоза товара к продавцам. Согласно условию (2) γ принята равной 10^{-4}.

Результаты вычислений приведены на рис. 2 и 3.

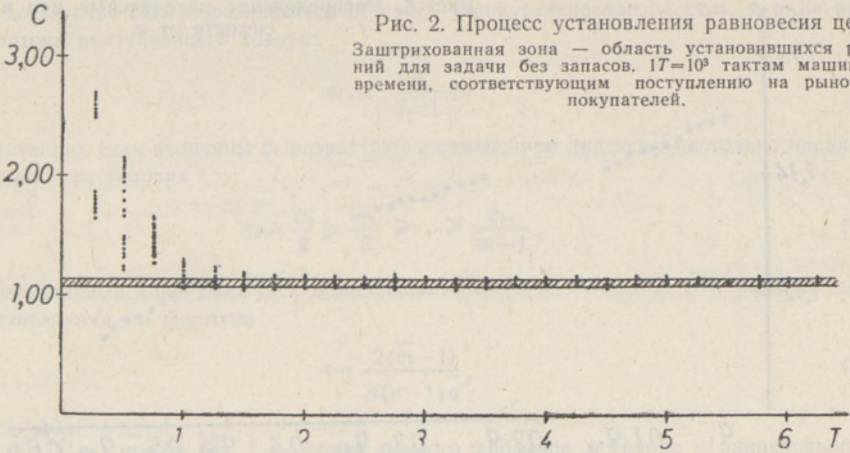

Рис. 2. Процесс установления равновесия цен:

Заштрихованная зона — область установившихся решений для задачи без запасов. $1T=10^3$ тактам машинного времени, соответствующим поступлению на рынок 10^3 покупателей.

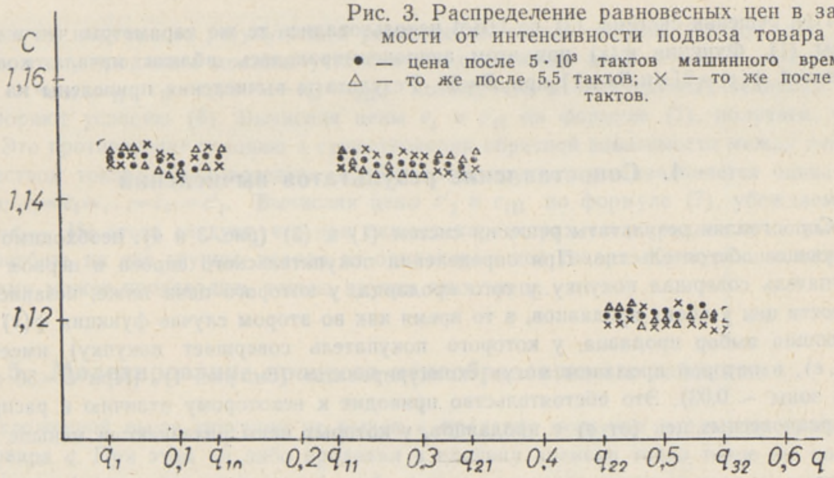

Рис. 3. Распределение равновесных цен в зависимости от интенсивности подвоза товара q:

• — цена после $5 \cdot 10^3$ тактов машинного времени; △ — то же после 5,5 тактов; × — то же после $6 \cdot 10^3$ тактов.

3. Детерминированное описание процесса ценообразования

При описании изложенного выше процесса формирования цен детерминированными дифференциальными уравнениями необходимо сделать некоторые допущения. Первое допущение связано с заменой вероятностных характеристик покупательского спроса детерминированными. Для этого при определении покупательского спроса рассматривались не отдельные покупатели, а поток покупателей с заданной интенсивностью, который позволил заменить вероятностную характеристику спроса усредненной по времени. Второе допущение связано с провозглашением законности описания последовательности дискретных актов взаимодействия непрерывными функциями времени: в частности, предполагается, что можно говорить не только об интегральном покупательском спросе за некоторый период времени, но и о «мгновенном» дифференциальном спросе. Основываясь на этих предположениях, получаем систему уравнений, описывающую регулирование цен:

$$\dot{c}_i=\gamma(\pi_i - c_i q_i), \qquad i=1, \ldots, n, \tag{3}$$

где

$$\pi_i=\frac{2a}{n(n-1)}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\psi(c_j-c_i) \tag{4}$$

(коэффициент γ в (3) может быть принят равным 1, так как это означает лишь надлежащий выбор единицы непрерывного времени).

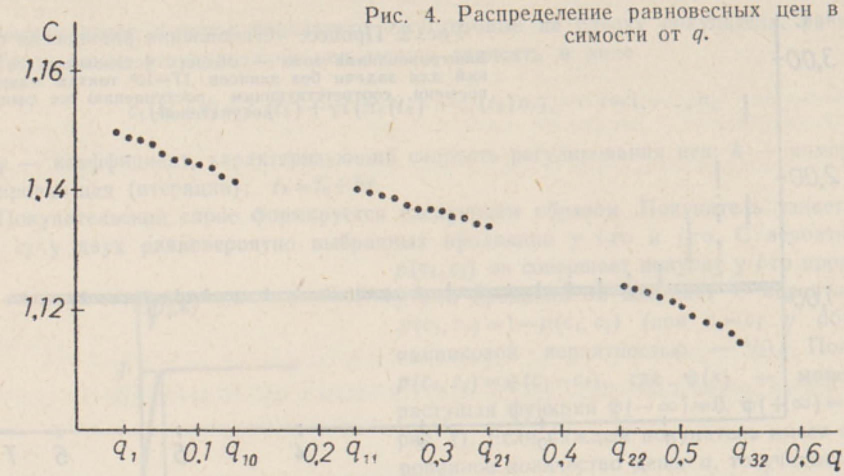

Рис. 4. Распределение равновесных цен в зависимости от q.

При решении системы (3) на ЦВМ использовались те же параметры, что и для системы (1). Функция $\psi(x)$ при этом аппроксимировалась вблизи начала координат функцией $\psi(x)=\frac{1}{2}[\sin Bx+1]$ при $B=50$. Результаты вычисления приведены на рис. 4.

4. Сопоставление результатов вычислений

Сопоставляя результаты решения систем (1) и (3) (рис. 3 и 4), необходимо учесть следующее обстоятельство. При определении покупательского спроса в первом случае покупатель совершал покупку у того продавца, у которого цена ниже, независимо от разности цен у обоих продавцов, в то время как во втором случае функция $\psi(x)$ (определяющая выбор продавца, у которого покупатель совершает покупку) имеет зону $(-\varepsilon, \varepsilon)$, в которой продавцы могут «конкурировать» (см. рис. 1). (При $B=50$ ширина этой зоны $\sim 0{,}03$). Это обстоятельство приводит к некоторому отличию в распределении равновесных цен (от q) у продавцов, у которых цены различаются меньше чем на 0,03.

При аналитическом исследовании системы (3) в [2] получены результаты, сопоставимые с решением системы (1). Результаты аналитического исследования системы (3) приведены в [2] при

$$\psi(x)=sgx:$$

$$sgx=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ 1 \text{ при } x>0, \end{cases}$$

(при любом доопределении $sg0$).

Отметим сперва, что равновесные цены продавцов связаны обратной зависимостью с количеством товара, т. е. если $q_j<q_k$, то $c_j\geqslant c_k$. Расположим продавцов в порядке возрастания величин q_i: тогда для того, чтобы равновесные цены расположились в порядке строгого убывания, необходимо выполнение условия

$$\frac{q_{l+1}}{q_l}>\frac{l}{l-1}, \tag{5}$$

где l — порядковый номер продавца в вариационном ряду q_i. Неравенство (5) показывает, что для того чтобы два «соседних по рангу» продавца не вступали друг с другом в активную конкуренцию (при $\psi(x)=sgx$, для этого необходимо $c_{l+1}=c_l$) — они должны достаточно сильно различаться по своей «конкурентноспособности», т. е. по величине потока поступающего товара:

$$q_{l+1} > \frac{l}{l-1} q_l.$$

В частности, если величины q_i возрастают с изменением индекса i настолько плавно, что выполняются условия

$$q_2 \geqslant \frac{q_3}{2} \geqslant \frac{q_4}{3} \geqslant \ldots \geqslant \frac{q_m}{m-1}, \tag{6}$$

то все равновесные цены окажутся одинаковыми: $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = c$. Эти равновесные цены вычисляются по формуле

$$c = \frac{2(\overline{m}-1)}{n(n-1)\overline{q}}, \tag{7}$$

где $\overline{q} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} q_k$; $\overline{m} = l + \frac{m}{2}$; l — номер первого продавца в группе с одинаковыми ценами.

Применяя полученные результаты к равновесным ценам системы (1) (см. рис. 3), получаем, что у продавцов должны установиться следующие цены: $c_1 = c_2 = \ldots = c_{10} = c_I$, $c_{11} = c_{12} = \ldots = c_{21} = c_{II}$, $c_{22} = c_{23} = \ldots = c_{32} = c_{III}$, потому что в этих группах величины q_i удовлетворяют условию (6). Вычисляя цены c_I и c_{II} по формуле (7), получаем, что $c_I < c_{II}$. Это противоречит условию о существовании обратной зависимости между ценой и количеством товара. Следовательно, в обеих этих группах устанавливается одинаковая цена: $c_1 = c_2 = \ldots = c_{21} = c'_I$. Вычисляя цены c'_I и c_{III} по формуле (7), убеждаемся, что $c'_I > c_{III}$. Из этого следует, что при данных параметрах всех продавцов на рынке можно разбить на две группы, исходя из одинаковых цен товара. Конкуренция между продавцами может происходить только внутри этих групп.

5. Моделирование процесса ценообразования с запасами

В изложенной выше ситуации на рынок к продавцу поступал в единицу времени поток товара q. При этом он либо продавал в единицу времени точно такое же количество товара (положение равновесия), либо у него возникали излишки товара, либо он не полностью удовлетворял спрос покупателей (в процессе установления цен). В любом случае это приводило к потерям продавца, так как ни излишки товара, ни избыточный покупательский спрос не переносились в следующий интервал времени.

Можно представить процесс формирования цен, в котором при отклонениях от равновесия как избыточный спрос, так и излишки товара в данном интервале времени будут сохраняться (интегрироваться) и тактика продавца будет основываться на стремлении распродать весь накопленный товар в течение единичного интервала времени. Как легко можно видеть, в этом случае вместо системы (1) получаем

$$c_i(t_k + \tau) = c_i(t_k) + \gamma\tau(\pi_i(t_k) - c_i(t_k) Q_i(t_k)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где

$$Q_i(t_k) = kq_i + \left(Q_i(t_{k-1}) - \frac{\pi_i(t_{k-1})}{c_i(t_{k-1})}\right) + \ldots + \left(q_i - \frac{\pi_i(t_0)}{c_i(t_0)}\right).$$

Соответствующая система детерминированных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{c}_i = \gamma(\pi_i - c_i Q_i), \\ \dot{Q}_i = q_i - \frac{\pi_i}{c_i}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

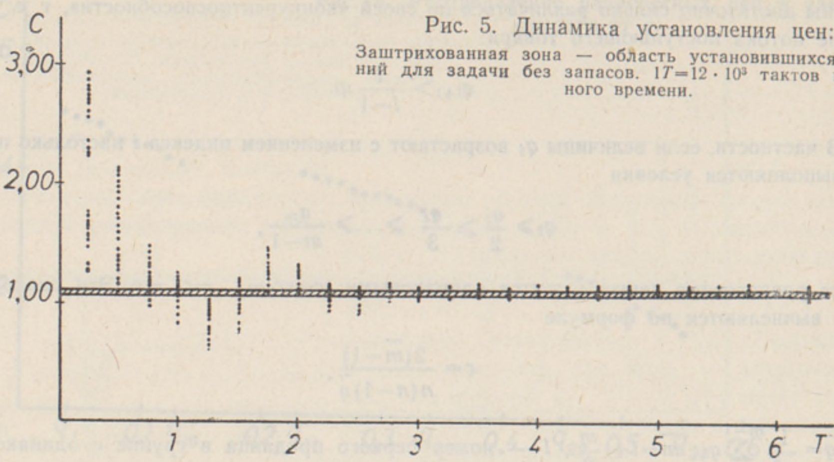

Рис. 5. Динамика установления цен:
Заштрихованная зона — область установившихся решений для задачи без запасов. $1T = 12 \cdot 10^3$ тактов машинного времени.

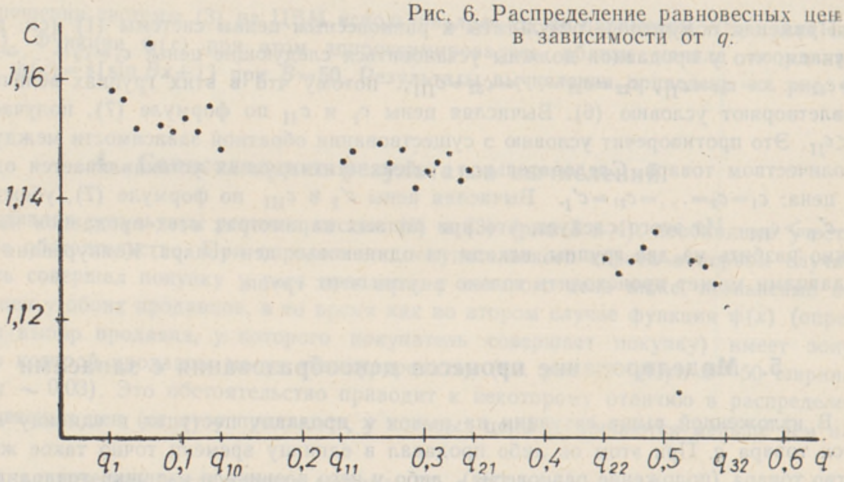

Рис. 6. Распределение равновесных цен в зависимости от q.

Система уравнений (8) решалась на ЦВМ при тех же параметрах и начальных данных, что и системы (1) и (3), единственным отличием был выбор $\gamma = 10^{-6}$. Результаты вычислений, приведенные на рис. 5, 6, указывают на близость равновесных цен системы (8), (1) и (3).

6. Выводы

Результаты моделирования систем (1), (3) и (8) показывают справедливость детерминированного описания вероятностных процессов ценообразования. Полученные численные решения хорошо интерпретируются с помощью результатов аналитических исследований, проведенных в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программирования и экономике. М., 1964.
2. Ю. Д. Тенисберг, Автоматика и телемеханика, 1969, № 7.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/XI 1968

J. TENISBERG

TURUHINNA KUJUNEMISE DÜNAAMIKA MODELLEERIMINE ELEKTRONARVUTIL

Resümee

Etteantud parameetritest ja algandmetest lähtudes modelleeritakse elektronarvutil turul toimuv tõenäoline «vahetusprotsess». Samu algandmeid ja parameetreid kasutades lahendatakse diferentsiaalvõrrandite süsteem, mis kirjeldab sellist protsessi. Esitatakse arvutustulemuste võrdlus.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse 20. XI 1968

J. TENISBERG

DYNAMIC PROCESS OF THE PRICE FORMATION: MODELLING ON COMPUTER

Summary

Stochastic market "exchange process" is modelled on computers. Assumptions on given parameters and initial data are formulated. Solution of the system of differential equations describing such a process is given. Comparative analysis of results is presented.

Academy of Sciences of the Estonian SSR, Institute of Cybernetics

Received Nov. 20, 1968