EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1968, Nr. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1968, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1968.2.02

И. КАГАНОВИЧ

ТИПЫ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ИХ РЕШЕНИЮ

1. Классификация применяемых моделей

Рост эффективности производства или услуг при увеличении их масштаба имеет определенные границы, сменяясь затем стабилизацией или снижением в связи с противодействующими тенденциями. Выбор той или иной математической модели для анализа проблем экономической концентрации, в частности оптимизации параметров предприятий, зависит от характера производства и круга факторов и связей, учитываемых в задаче.

Существенно с экономической и вычислительной точек зрения подразделение задач на однопродуктовые, многопродуктовые и многоотраслевые.

Как однопродуктовые формулируются задачи определения мощностей и пунктов размещения предприятий при производстве однородной продукции, технологически мало связанном с другими отраслями, но с большим удельным весом транспортных затрат в стоимости продукции.

Многопродуктовые модели служат для выбора оптимальных вариантов мощности, специализации, кооперирования и размещения предприятий, выпускающих два и более видов продукции либо в одном производственном процессе (в случае комплексного производства), либо раздельно. Многопродуктовые задачи при полной или частичной взаимозаменяемости продукции сводятся к однопродуктовым.

Многоотраслевые модели используются в тех же целях, что и многопродуктовые, при оптимизации промышленных комплексов, в которых имеют место межзаводские поставки продукции, вырабатываемой в пределах комплекса (межотраслевое или внутриотраслевое потребление продукции). Многоотраслевые модели позволяют решать задачи специализации, концентрации, кооперирования, размещения производств с обратными связями и вместе с тем оптимизировать ценностные соотношения разнородных продуктов, получать оптимальные межотраслевые (межпродуктовые) балансы.

По способу отражения в моделях зависимости затрат от масштабов производства могут быть выделены дискретные и непрерывные постановки задач. Задачи в дискретной постановке имеют линейную целевую функцию, но на переменные, выражающие интенсивность применения технологических способов (вариантов) наложены ограничения, требующие, чтобы каждый вариант либо использовался полностью, либо вообще не использовался (требование целочисленности переменных). Поскольку целому значению переменного соответствует фиксированная величина затрат, такой подход дает возможность не рассматривать зависимость затрат от масштабов производства и пользоваться разрывной целевой функцией вместо нелинейной.

Каждый вариант развития производства задается определенным количеством единиц вырабатываемой и перерабатываемой продукции. Изменение объема или структуры производства учитывается путем построения соответствующего набора вариантов.

Дискретная модель используется прежде всего в тех случаях, когда набор вариантов мощности и структуры предприятий заранее задан, например в виде типовых проектов или номенклатуры типов производств. Особенно часто дискретные модели применяются для анализа многопродуктовых производств. Здесь они в настоящее время считаются основными.

В случае непрерывной постановки задаются узко специализированные технологии, состав предприятия формируется из них в ходе решения задачи без предварительной разработки вариантов специализации и мощности. Переменные принимают любые значения в области их определения. Целевая функция должна быть нелинейной с учетом формы зависимости затрат от масштабов производства.

Непрерывная постановка свободна от субъективного подхода при установлении вариантов структуры предприятия и особенно предпочтительна, если задача определения оптимальной мощности и состава предприятий решается первично, на стадии проектирования, т. е. при отсутствии заранее разработанных типовых проектов для предприятий разных размеров и специализации.

Многопродуктовые и многоотраслевые задачи в дискретной постановке обычно решаются с использованием целочисленной модели линейного программирования общего типа или производственно-транспортного типа. Первая применяется при отсутствии или небольшом влиянии транспортного фактора на величину затрат, вторая — если он играет существенную роль.

Для однопродуктовых задач (или многопродуктовых со взаимозаменяемой продукцией) в дискретной и непрерывной постановках предназначены модели транспортного типа.

Как однопродуктовые, так и многопродуктовые задачи могут быть по своему содержанию двухэтапными и многоэтапными. Двухэтапные задачи учитывают связи предприятий либо только с пунктами производства сырья, либо только с пунктами потребления продукции. Они уместны, если рассматриваемые производства: а) нематериалоемки (затраты на транспорт сырья и материалов несущественны); б) имеют меньший вес и объем продукции по сравнению с количеством перерабатываемого сырья (затраты на транспорт продукции несущественны); в) имеют заранее установленные, единственно возможные связи с определенным поставщиком (потребителем) при многовариантности связей с потребителями (поставщиками).

В многоэтапных задачах размещение предприятий определяется по отношению к поставщикам сырья и к потребителям продукции в условиях многовариантности связей с теми и другими, причем могут одновременно рассматриваться предприятия нескольких типов, осуществляющие последовательные стадии переработки сырья, например, заводы первичной обработки льна — льнопрядильные предприятия — льноткацкие фабрики.

Задача оптимизации размеров, структуры и размещения предприятий, составная часть задачи перспективного планирования, носит динамический характер, который может быть принят в расчет двояким образом: а) путем решения изолированных статических задач для ряда лет с теми или иными интервалами при последующей увязке и корректировке полученных планов; б) путем решения единой динамической задачи оптимального планирования.

Последний подход повышает точность и надежность результатов, но сопряжен с резким увеличением размерности задачи и потому технически не всегда осуществим.

Ниже описаны основные типы экономико-математических моделей, применяемых для определения оптимальных мощностей, специализации, размещения предприятий, отраслей и межотраслевых комплексов. Модели даны в статической постановке. Критерием оптимальности принят минимум затрат для удовлетворения заданных потребностей в продукции. Приводится также пример модели для случаев, когда целесообразна постановка задачи на максимум прибыли.

2. Однопродуктовые модели транспортного типа

2. 1. Задача в матричной непрерывной постановке. Требуется найти оптимальную степень концентрации однородного производства и оптимально разместить его, определив, на каких предприятиях и в каких масштабах следует организовать выпуск продукции, причем заданы возможные пункты производства, типы же мощностей отсутствуют.

При построении модели принято, что зависимость удельных затрат от масштаба производства носит характер равносторонней гиперболы.

Обозначения:

j — номер предприятия или возможного пункта его размещения ($j=1, 2, \ldots, n$);
r — номер потребителя продукции ($r=1, 2, \ldots, l$);
x_{jr} — искомый объем поставок из j-го предприятия r-му потребителю;
x_j — искомый объем производства на j-м предприятии;
d_j — максимальная мощность j-го предприятия;
s_r — потребность r-го потребителя в продукции;
γ_{jr} — затраты на перевозку продукции от j-го предприятия до r-го потребителя;
α_j — пропорциональные производственные затраты на единицу продукции в j-м предприятии;
β_j — фиксированные (условнопостоянные) затраты на j-м предприятии.

Задача формулируется следующим образом: найти план, минимизирующий значение целевой функции (сумму производственных и транспортных затрат)

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{l} (\gamma_{jr} + \alpha_j) x_{jr} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j (x_j) \tag{1}$$

при условиях

$$x_{jr} \geqslant 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n; \; r=1, 2, \ldots, l), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jr} = s_r \qquad (r=1, 2, \ldots, l) \tag{3}$$

— спрос всех потребителей должен быть удовлетворен;

$$\sum_{r=1}^{l} x_{jr} = x_j \leqslant d_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

— объем поставок продукции потребителям не должен превышать допустимой мощности j-го предприятия;

$$\beta_j(x_j) = \begin{cases} \beta_j, & \text{если} \quad x_j > 0 \\ 0, & \text{если} \quad x_j = 0 \end{cases} \qquad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

— фиксированные затраты β_j имеют место, если j-й завод входит в план, и отсутствуют, если его в плане нет (целевая функция разрывна в точках $x_j=0$).

Задача может быть сведена к модели (1)—(5) и в том случае, если зависимость суммарных затрат на производство от его масштаба представляет собой нелинейную выпуклую вверх функцию. Для этого каждая кривая заменяется двумя или несколькими прямыми. Эта замена равносильна тому, что пункт производства рассматривается не как один, а как несколько вариантов размещения, каждому из которых соответствует определенная величина фиксированных затрат.

В задаче (1)—(5), по мере увеличения мощности отдельных предприятий в плане и тем самым сокращения их числа, сумма фиксированных затрат ($\Sigma\beta_j$) снижается, растет, однако, дальность перевозки груза из оставшихся пунктов переработки до потребителей. Эти противоположно направленные изменения взаимно компенсируются в точке минимума целевой функции (1), которой отвечает оптимальный вариант мощности и размещения предприятий.

2.2. Сетевая постановка. В сетевой постановке целесообразно решать многоэтапные, а также двухэтапные задачи, если значительная часть транспортных маршрутов запрещена (матрица затрат частично заполнена большими числами). В отличие от матричной сетевая постановка таких задач дает возможность гораздо экономнее использовать память ЭВМ, а также сократить время на подготовку данных и само решение. Сетевая постановка транспортных задач дает и другие преимущества, из которых отметим следующие:

1) так как на сети нет принципиальной разницы между поставщиками, конечными потребителями и промежуточными пунктами, то пользуясь однажды составленной сетью, можно решать большее количество различных задач, чем на матрице, где поставщики и потребители строго разделены;

2) решение транспортной задачи на сети можно использовать для определения кратчайших маршрутов (при матричной постановке они должны быть определены заранее);

3) постановка транспортной задачи на направленной сети дает возможность учитывать некоторые дополнительные ограничения, например, ограничения по пропускной способности для некоторых дуг.

Рассмотрим на сети трехэтапную задачу в непрерывной постановке для определения мощности и пунктов размещения мясокомбинатов. Пусть двойным индексом kt или tk обозначен участок пути, соединяющий два соседних пункта k и t, причем на первом месте стоит пункт отправления (без различения начального и промежуточного), на втором — пункт получения (без различения промежуточного и конечного); d_{kt} — ограничение пропускной способности участка kt; x_{kt} — количество груза, перевозимого по участку kt. Обозначим, кроме того, множество начальных пунктов через K_1, конечных — K_2 и промежуточных — K_3; q_k — суточное количество скота в начальном пункте в месяц максимальной заготовки, s_k — суточная потребность в мясопродуктах в пункте потребления конечной продукции, x_k — мощность мясокомбината (размещенного в промежуточном пункте), d_k — ее ограничение.

Тогда задачу выбора оптимальной мощности и пунктов размещения мясокомбинатов можно сформулировать следующим образом:

$$\sum_{k,t} \alpha_{kt} x_{kt} + \sum_{k} \beta_k(x_k) \to \min, \tag{6}$$

$$0 \leqslant x_{kt} \leqslant d_{kt} \tag{7}$$

— ограничение пропускной способности участков kt;

$$\sum_{t} x_{kt} - \sum_{t} x_{tk} = \begin{cases} q_k, & \text{если} \quad k \in K_1 \\ -s_k, & \text{если} \quad k \in K_2 \\ 0, & \text{если} \quad k \in K_3 \end{cases} \tag{8}$$

— сальдо ввоза и вывоза в пункте k;

$$\sum_{t} x_{kt} = x_k \leqslant d_k, \quad k \in K_3; \tag{9}$$

$$\beta_k(x_k) = \begin{cases} \beta_k, & \text{если} \quad x_k > 0 \\ 0, & \text{если} \quad x_k = 0, \end{cases} \qquad k \in K_3. \tag{10}$$

Условие (9), ограничивающее мощность предприятия, легко учесть, ставя в соответствие каждому предприятию не один, а два промежуточных пункта, соединенных участком пути. Тогда ограничение пропускной способности этого участка выразит указанное требование.

2.3. Дискретная модель. Модель обеспечивает выбор оптимальных пунктов размещения предприятий и типа мощности для каждого при заданном множестве вариантов мощности.

Обозначения (дополнительно к использованным для модели 2.1):

H_j — число вариантов развития j-го предприятия;

h — номер варианта развития j-го предприятия ($h = 1, 2, \ldots, H_j$);

f_j^h — затраты на производство единицы продукции на j-м предприятии по h-му варианту развития;

d_j^h — мощность j-го предприятия (выпуск продукции) по h-му варианту развития.

Формулировка задачи: найти план, минимизирующий значение целевой функции (сумму затрат на производство и транспорт продукции)

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{H_j} \sum_{r=1}^{l} (\gamma_{jr} + f_j^h) x_{jr} \tag{11}$$

при условиях

$$x_{jr} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \; r = 1, 2, \ldots, l), \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jr} = s_r \quad (r = 1, 2, \ldots, l), \tag{13}$$

$$\sum_{r=1}^{l} x_{jr} = x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

$$x_j \in \{0, d_j^1, d_j^2, \ldots, d_j^{H_j}\} \tag{15}$$

— j-е предприятие либо не входит в план, либо его размер равен типовой мощности, заданной в ряде вариантов.

Условие (15) может быть поставлено менее жестко:

$$\underline{d}_j^h \leqslant x_j \leqslant \overline{d}_j^h \quad (h = 1, 2, \ldots, H_j), \tag{15'}$$

где $\underline{d}_j^h$ и $\overline{d}_j^h$ — соответственно, нижняя и верхняя границы допустимых отклонений от типовой мощности d_j^h.

3. Многопродуктовые дискретные модели общего типа

3. 1. Модель для задачи на минимум затрат. Задача решается с целью установить оптимальные размеры, специализацию и пункты размещения предприятий отрасли при заданных вариантах состава и мощности предприятия; внутренний оборот продукции не предусмотрен.

Обозначения:

i — номер вида продукции ($i = 1, 2, \ldots, v$) и ресурсов ($i = v + 1, \ldots, m$);

j — номер предприятия ($j = 1, 2, \ldots, n$);

h — номер варианта развития предприятия ($h = 1, 2, \ldots, H_j$);

x_j^h — искомая интенсивность использования h-го варианта развития j-го предприятия;

p_j^h — производственные затраты при использовании h-го варианта развития j-го предприятия с единичной интенсивностью;

c_{ij}^h — выпуск i-го продукта ($i = 1, 2, \ldots, v$) при единичной интенсивности использования h-го варианта развития j-го предприятия;

a_{ij}^h — соответственно, расход i-го ресурса ($i = v + 1, \ldots, m$);

b_i — потребность в продукции i-го вида ($i = 1, 2, \ldots, v$);

q_i — ограничение расхода i-го ресурса ($i = v + 1, \ldots, m$).

Требуется найти план, минимизирующий целевую функцию (производственные затраты)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} p_j^h x_j^h \qquad (16)$$

при ограничениях

$$x_j^h = 0 \quad \text{или} \quad 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ h=1, 2, \ldots, H_j), \qquad (17)$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} x_j^h \leqslant 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n), \qquad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^h x_j^h \geqslant b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ v) \qquad (19)$$

— потребность в каждом виде продукции должна быть покрыта ее производством;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^h x_j^h \leqslant q_i \qquad (i=v+1, \ldots, m) \qquad (20)$$

— расход ресурсов не должен превышать их лимита.

Условия (17) и (18) означают, что вариант либо полностью используется, либо в план не входит, причем каждое предприятие может быть представлено в плане не более чем одним вариантом.

3.2. Модель для задачи на максимум прибыли. Данная модель рассчитана на случаи, когда ассортимент и объем выпуска продукции не установлены, а подлежат определению, заданы же цены реализации, на основании которых может быть подсчитан размер прибыли (u_j^h) при использовании каждого технологического варианта с единичной интенсивностью. Предполагается, что цены на реализуемые продукты и на используемые ресурсы не зависят от объема реализации. Обозначения приняты по аналогии с задачей 3.1.

Формулировка задачи: найти план, который обеспечивает наибольшую прибыльность производства, т. е. сообщает максимум целевой функции

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} u_j^h x_j^h \qquad (21)$$

при условиях

$$x_j^h = 0 \quad \text{или} \quad 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ h=1, 2, \ldots, H_j), \qquad (22)$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} x_j^h \leqslant 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n), \qquad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} a_{ij}^h x_j^h \leqslant q_i \qquad (i=v+1, \ldots, m). \qquad (24)$$

Если для некоторых продуктов объем реализации ограничен сверху или снизу, то в модель вводится условие

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} c_{ij}^h x_j^h = z_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ v), \qquad (25)$$

$$z_i \begin{cases} \leqslant \bar{b}_i & (i=1, 2, \ldots, v_1) \\ \geqslant \underline{b}_i \geqslant 0 & (i=v_1+1, \ldots, v), \end{cases} \qquad (26)$$

где z_i — объем реализации i-го продукта $(i=1, 2, \ldots, v)$,

$\bar{b}_i$ — максимальный объем реализации тех продуктов, спрос на которые ограничен сверху $(i=1, 2, \ldots, v_1)$,

$\underline{b}_i$ — объем реализации продуктов, для которых установлен нижний предел потребности, подлежащей удовлетворению $(i=v_1+1, \ldots, v)$.

4. Многоотраслевая задача общего типа в непрерывной постановке

Модель предназначена для определения оптимального состава и мощности комбината или комплекса производств, связанных между собой технологически взаимными поставками продукции; роль транспортного фактора несущественна, типовые варианты предприятий не заданы.

Обозначения:

i — номер вида продукции или ресурса $(i=1, 2, \ldots, m)$;

j — номер технологического способа $(j=1, 2, \ldots, n)$;

x_j — искомая интенсивность применения j-го технологического способа;

c_{ij} — выпуск i-го продукта при единичной интенсивности использования j-го технологического способа;

a_{ij} — расход i-го ресурса или промежуточной продукции (внутриотраслевые и межотраслевые поставки) при единичной интенсивности использования j-го способа;

B_i — потребность в i-м виде продукции $(B_i \geqslant 0)$ или ограничение расхода i-го ресурса $(B_i < 0)$;

η_j — сумма пропорциональных затрат на расходуемые в производстве ресурсы и факторы, которые поступают в рассматриваемую систему извне, т. е. не воспроизводятся внутри нее, при единичной интенсивности использования j-го способа;

Ω_j — фиксированные затраты на внешние ресурсы и факторы при использовании j-го способа с ненулевой интенсивностью.

Формулировка задачи: найти план, сообщающий минимум значению целевой функции (здесь — сумме производственных затрат, пропорциональных и фиксированных, исключая внутренний оборот)

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \Omega_j(x_j) \tag{27}$$

при условиях:

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - a_{ij}) x_j \geqslant B_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{29}$$

— конечная потребность в каждом виде продукции должна быть удовлетворена, а расход ресурсов не может превышать их наличия;

$$\Omega_j(x_j) = \begin{cases} \Omega_j, & \text{если } x_j > 0 \\ 0, & \text{если } x_j = 0 \end{cases} \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{30}$$

Действие модели с фиксированными затратами основано на эффекте увеличения масштаба производства, выражающемся в снижении общей суммы условнопостоянных расходов, таком, что оно в определенных условиях перекрывает прирост пропорциональных затрат.

В задаче линейного программирования число ненулевых переменных в оптимальном решении обычно равно числу ограничений (здесь n). В нелинейной задаче на минимум с условием повышающейся эффективности способов количество ненулевых переменных в оптимальном плане меньше, чем в аналогичной задаче с линейной однородной целевой функцией. В результате сокращения числа используемых технологических способов при интенсификации остающихся и создается экономия на постоянных расходах. Пока выигрыш от такой «концентрации технологий производства» будет превосходить убытки, связанные с использованием оставшихся технологических способов взамен выбывших, уменьшение числа привлеченных способов экономически оправдано. При оптимальном их наборе целевая функция получает наименьшее значение. Таким образом, модель, в которой предусмотрен рост экономичности технологического способа при увеличении интенсивности его использования, обеспечивает бо́льшую свободу отбора и загрузки лучших способов за счет отсева худших, чем это допускает гипотеза пропорциональности затрат.

5. Дискретные модели производственно-транспортного типа

5. 1. Многопродуктовая модель. Модель применяется в тех же целях, что и модель 3. 1, но при условии значимости транспортного фактора.

Обозначения:

i — номер вида продукции ($i=1, 2, \ldots, v$) и ресурсов ($i=v+1, \ldots, m$);

j — номер предприятия ($j=1, 2, \ldots, n$);

h — номер варианта развития предприятия ($h=1, 2, \ldots, H_j$);

r — номер потребителя продукции ($r=1, 2, \ldots, l$);

x_j^h — искомая интенсивность использования h-го варианта развития j-го предприятия;

x_{ijr} — искомый объем поставки i-го продукта ($i=1, 2, \ldots, v$) из j-го предприятия r-му потребителю;

p_j^h — затраты при использовании h-го варианта развития j-го предприятия с единичной интенсивностью;

γ_{ijr} — затраты на транспортировку единицы i-й продукции ($i=1, 2, \ldots, v$) от j-го предприятия до r-го потребителя;

c_{ij}^h — выпуск i-го продукта ($i=1, 2, \ldots, v$) при единичной интенсивности использования h-го варианта развития j-го предприятия;

a_{ij}^h — соответственно, расход i-го ресурса ($i=v+1, \ldots, m$);

b_{ir} — размер спроса у r-го потребителя на i-ю продукцию ($i=1, 2, \ldots, v$);

q_i — ограничение расхода i-го ресурса ($i=v+1, \ldots, m$).

Формулировка задачи: найти план, при котором достигает минимума целевая функция (сумма производственных и транспортных затрат)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} p_j^h x_j^h + \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l} \gamma_{ijr} x_{ijr} \tag{31}$$

и выполняются условия

$$x_{ijr} \geqslant 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, v;\ j=1, 2, \ldots, n;\ r=1, 2, \ldots, l), \tag{32}$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} x_j^h \leqslant 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n), \tag{32a}$$

$$x_j^h = 0 \text{ или } 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ h=1, 2, \ldots, H_j), \tag{33}$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} c_{ij}^h x_j^h \geqslant \sum_{r=1}^{l} x_{ijr} \qquad (i=1, 2, \ldots, v;\ j=1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

— объем производства на j-м предприятии должен быть не меньше, чем вывоз продукции;

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijr} = b_{ir} \qquad (i=1, 2, \ldots, v;\ r=1, 2, \ldots, l) \tag{35}$$

— спрос каждого потребителя i-й продукции должен покрываться поставками с предприятий;

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} a_{ij}^h x_j^h \leqslant q_i \qquad (i = v+1, \ldots, m) \tag{36}$$

— расход ресурсов ограничен.

5.2. Многоотраслевая модель. Многоотраслевая модель представляет собой трехиндексный вариант общей модели производственного планирования [1, 2] с условием целочисленности переменных. Предназначена для нахождения оптимальной мощности и структуры предприятий, входящих в рассматриваемый комплекс с обратными технологическими связями и транспортоемкими продукцией и сырьем. Для этого минимизируется сумма затрат: производственных — на расходуемые ресурсы и факторы, поступающие в систему извне, и транспортных — на доставку конечной продукции, полуфабрикатов и сырья.

Обозначения (в дополнение к введенным для предыдущей задачи):

y_{ijr} — объем перевозки i-го промежуточного продукта $(i = 1, 2, \ldots, v)$ от j-го предприятия-поставщика до r-го предприятия-потребителя;

y_{ij} — объем поставок i-го вида ресурса $(i = v+1, \ldots, m)$ j-му предприятию;

φ_{ij} — затраты на транспортировку i-го ресурса $(i = v+1, \ldots, m)$ до j-го предприятия;

a_{ij}^h — расход i-го ресурса $(i = v+1, \ldots, m)$ или промежуточной продукции $(i = 1, 2, \ldots, v)$ при единичной интенсивности применения h-го варианта развития j-го предприятия.

Формулировка задачи: найти план, минимизирующий целевую функцию

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H_j} p_j^h x_j^h + \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{l} \gamma_{ijr} x_{ijr} + \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \gamma_{ijr} y_{ijr} + \sum_{i=v+1}^{m} \varphi_{ij} y_{ij} \tag{37}$$

при ограничениях

$$x_{ijr}, y_{ijr}, y_{ir} \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, l), \tag{38}$$

$$x_j^h = 0 \text{ или } 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, H_j), \tag{39}$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} x_j^h \leqslant 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{40}$$

$$\sum_{h=1}^{H_j} c_{ij}^h x_j^h \geqslant \sum_{r=1}^{l} x_{ijr} + \sum_{r=1}^{n} y_{ijr} \qquad (i = 1, 2, \ldots, v;\ j = 1, 2, \ldots, n) \tag{41}$$

— на j-м предприятии объем производства должен быть не меньше, чем вывоз конечной и промежуточной продукции.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijr} = b_{ir} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, l) \tag{42}$$

— ограничение по спросу на конечную продукцию;

$$\sum_{h=1}^{H_j} a_{ij}^h x_j^h \leqslant \sum_{g=1}^{n} y_{igj} + y_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m) \tag{43}$$

— расход ресурсов сырья и промежуточной продукции на j-м предприятии не может превышать их поставок из других предприятий данного комплекса или извне;

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leqslant q_i \qquad (i = v+1, \ldots, m) \tag{44}$$

— ограничение расхода ресурсов.

6. Использование транспортных потенциалов для решения задач экономической концентрации

Как следует из представленных типов моделей, задача определения оптимальных размеров предприятий, их специализации и размещения не укладывается в схему линейного программирования, поскольку затраты на производство меняются не пропорционально его масштабам. Результат решения линейной задачи, особенно транспортного типа, обнаруживает тенденцию к дроблению производственных мощностей и территориальному рассредоточению производства: сумма пропорциональных транспортных затрат тем ниже, чем гуще сеть предприятий-поставщиков (или потребителей). Так, при подходе к модели 2.1 как к линейной без учета эффекта концентрации, т. е. при решении задачи на минимум целевой функции

$$\sum_{j,r} (\gamma_{jr} + \alpha_j) x_{jr}, \tag{45}$$

придем к плану с максимальным числом предприятий и их минимальной средней мощностью по сравнению с решением на минимум целевой функции (1), в котором учтена экономия от увеличения масштаба производства.

Вместе с тем модель 2.1 (или 2.2) сводится к большому числу транспортных задач линейного программирования. Если зафиксировать какой-либо набор предприятий, то для этого набора $\Sigma \beta_j$ будет величиной постоянной и минимизировать придется лишь пропорциональную часть целевой функции (1), т. е. выражение (45).

К задачам 2.1 и 2.2 применим весьма эффективный метод последовательных расчетов [3]. Разработан комбинаторный метод решения целочисленных задач типа 2.3 [4].

Решая задачи концентрации и размещения методом последовательных расчетов, вместо 2^n возможных вариантов нужно просчитывать примерно $n^3 - n^4$ вариантов. Однако при значительной размерности задачи и этот объем расчетных операций превосходит возможности ЭВМ, используемых в экономических расчетах.

Задачи с числом возможных вариантов размещения более 20—30 обычно решаются приближенными методами. Значение хотя бы и приближенного их решения весьма велико, ибо позволяет экономить крупные суммы капитальных вложений при осуществлении фондоемных строительных программ. Кроме того, необходимо соразмерять точность искомого решения со степенью точности исходной экономической информации.

Для приближенного решения однопродуктовых задач концентрации и размещения производства в непрерывной и дискретной постановках и практически любой размерности применяется метод отсева [5–8]. В основном он рассчитан на распространенные и вместе с тем наиболее трудные для решения случаи, когда число возможных вариантов развития и размещения предприятий значительно больше требуемого. Процесс решения методом отсева разбивается на ряд итераций (шагов), каждая из которых состоит в том, что число пунктов или вариантов производства сокращается на единицу по определенному признаку (правилу отсева).

Предложено несколько правил отсева. Одно из них рассчитано на случаи равномерного распределения потребителей продукции (или поставщиков сырья) по территории. Согласно этому правилу признаком для отсева предприятия на каждой итерации служит минимальная величина его загрузки по решению транспортной задачи [5]: размер загрузки рассматривается как характеристика выгодности расположения предприятия относительно потребителей продукции, учитывая, что исключение из плана заводов с малыми мощностями влечет за собой перевозки на более дальние расстояния минимального груза, крупных же заводов — увеличение расстояния транспортировки больших его количеств. Общее число решаемых транспортных задач не превышает $2n$, а чаще всего равно n (возможному числу вариантов предприятий). Однако в степени точности решения этот вариант метода уступает алгоритму отсева под контролем целевой функции [7]. Поочередно проверяя на отсев все предприятия, по признаку минимума целевой функции обнаруживают то из них, которое следует исключить из плана, чтобы затраты были меньше, чем при любом другом варианте отсева. Содержание последующих итераций аналогично, но в них не участвуют ранее отсеянные предприятия. В заключение из поитерационных минимумов выбирается общий.

Опыт применения этого правила отсева свидетельствует о том, что в большинстве случаев оно приводит к решению, совпадающему с глобальным оптимумом, либо весьма к нему близкому. Число просматриваемых комбинаций (транспортных задач) $n(n+1)/2$.

Для отыскания худших пунктов размещения менее трудоемким способом, т. е. без перебора на каждой итерации всех вариантов отсева, но вместе с тем с учетом экономических оценок предлагается алгоритм отсева под контролем потенциалов транспортной задачи.

Данное правило отсева вначале рассмотрим применительно к задаче 2.1 (в непрерывной постановке) при условии равенства фиксированных затрат $\beta_j(x_j)$ во всех пунктах производства. В этом случае речь идет о задаче минимизации целевой функции

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{l} a_{jr} x_{jr} + \beta \Upsilon \tag{46}$$

при ограничениях (2)—(4).

Здесь $a_{jr} = \gamma_{jr} + a_j$ (пропорциональные расходы на единицу продукции), $\beta = \beta(x_j)$ при $x_j > 0$,

$$\Upsilon = \sum_{j} \operatorname{sign}(x_j). \tag{47}$$

Расчет ведется в следующем порядке.

1°. Строим матрицу пропорциональных затрат $\|a_{jr}\|$, включая все n предприятий и вводя фиктивный потребитель продукции с номером $r = l+1$, со спросом в объеме

$$s_{l+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{r=1}^{l} s_r \tag{48}$$

и с показателями затрат, равными нулю ($a_{j,\,l+1} = 0$).

2°. Решаем транспортную задачу линейного программирования, в которой исходное число поставщиков n (максимально возможное число предприятий) и число потребителей $l+1$:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{l+1} a_{jr} x_{jr} \to \min, \tag{49}$$

$$x_{jr} \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, l+1), \tag{50}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jr} = s_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, l+1), \tag{51}$$

$$\sum_{r=1}^{l+1} x_{jr} = d_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

3°. Находим сумму фиксированных затрат $\beta\Upsilon^\circ$ (Υ° — число предприятий, вошедших в исходный план). Складывая это произведение с пропорциональными затратами — выражение (49), получаем исходное значение целевой функции (46), которое обозначим F°, и переходим к I итерации.

4°. Приравниваем к нулю мощность предприятия с номером $j = 1$, т. е. считаем $d_1 = 0$, и выполняем при этом условии операции 1° и 2°.

5°. Решив транспортную задачу (49)—(52), получаем потенциалы предприятий и потребителей продукции соответственно μ_j^{I} и ν_r^{I} (I — номер итерации). При этом исходим из соотношения $\mu_j + \nu_r = d_{jr}$ в случае $x_{jr} > 0$ и задаем в качестве начального параметра нулевое значение потенциала фиктивного потребителя $(\nu_{l+1} = 0)$. Потенциал пункта с номером $j = 1$ фиксируем для дальнейшего.

6°. Снимаем ограничение $d_1 = 0$ (возвращаем пункт $j = 1$ в план), вводим ограничение $d_2 = 0$ и, выполнив операции 1°, 2°, 5°, фиксируем значение потенциала μ_2^{I} для предприятия $j = 2$.

Аналогичным образом, поочередно присваивая предприятиям нулевую мощность, определяем все μ_j^{I} $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

7°. Устанавливаем предварительную последовательность отсева предприятий j_1, $j_2, \ldots, j_n$, располагая их в порядке уменьшения потенциалов.

Предприятие j_1, для которого $\mu_{j_1}^{\mathrm{I}} = \max\{\mu_j^{\mathrm{I}}\}$, считаем отсеявшимся в результате I итерации. *

8°. Для оставшегося набора предприятий определяем значение целевой функции F^{I} (см. операцию 3°).

9°. II итерация начинается с проверки на отсев предприятия j_2 (второго по величине потенциала μ_j^{I}).

Для этого решаем транспортную задачу (49)—(52) при $d_{j_1} = 0$ и $d_{j_2} = 0$.

Если окажется, что $\mu_{j_2}^{\mathrm{II}} \geqslant \mu_{j_3}^{\mathrm{I}}$ (здесь $\mu_{j_2}^{\mathrm{II}}$ — потенциал пункта j_2 на II шаге), то пункт j_2 считаем отсеявшимся и, выполнив операцию 3°, определяем F^{II}.

В случае же $\mu_{j_2}^{\mathrm{II}} < \mu_{j_3}^{\mathrm{I}}$ снимаем ограничение $d_{j_2} = 0$ и испытываем на отсев пункт j_3 и т. д.

Таким путем корректируем последовательность пунктов и выявляем тот из них, которому соответствует наибольшее на данной итерации значение потенциала. Этот пункт отсеиваем и находим F^{II}.

10°. Если на второй итерации потенциал ранее отсеянного пункта j_1 снизится по сравнению с первоначальным значением $(\mu_{j_1}^{\mathrm{II}} < \mu_{j_1}^{\mathrm{I}})$ и станет меньше потенциала того предприятия, которое отсеивается в результате второго шага (например, $\mu_{j_1}^{\mathrm{II}} < \mu_{j_2}^{\mathrm{II}}$), то пункт j_1 возвращаем в план. В последовательности $j_1, \ldots, j_n$ он занимает место соответственно новому значению потенциала.

Путем отсева круг предприятий сужаем до тех пор, пока в плане останется минимально возможное при данных ограничениях их число.

11°. Определяем $\min\{F^0, F^{\mathrm{I}}, \ldots, F^{n-1}\}$ и отвечающий ему набор предприятий, лучший из рассмотренных (число предприятий в этом наборе обозначим Υ^*), мощность каждого и план прикрепления потребителей к поставщикам.

Для контроля результатов отсева и для получения нескольких гипотез плана целесообразно просмотреть дополнительно некоторые другие комбинации с числом пунктов Υ^*, $\Upsilon^* - 1$ и $\Upsilon^* + 1$, пользуясь в этих границах правилом отсева под контролем целевой функции (см. выше). Отсев под контролем потенциалов дает хорошие по точности результаты, причем число решаемых линейных задач не превышает $3n - 4n$.

Ход решения методом отсева как бы моделирует процесс концентрации производства — постепенное, шаг за шагом, выпадение худших вариантов и сосредоточение производства в лучших пунктах. При этом определяется кривая изменения производственных и транспортных затрат по мере концентрации. Методом отсева эффективно решаются задачи определения оптимальной мощности и размещения также в дискретной постановке (модель 2.3).

---

* Потенциал предприятия с нулевой мощностью можно трактовать как меру увеличения пропорциональных затрат, к которому повел бы возврат этого предприятия в план (рост с нуля до единицы поставок груза из пункта его расположения). Поэтому отсеиваем тот пункт, присутствие которого в сети давало бы наибольший прирост пропорциональных затрат или наименьшую их экономию (последнее — если потенциалы отрицательны).

Для решения задачи с дискретными мощностями отбираем вначале наиболее экономичные варианты мощности $d_j^{h_j}$, которые используем в качестве ограничений,* и строим задачу (49)—(52) с матрицей затрат $||a_{jr}||$, элементы которой представляют собой производственные и транспортные затраты (в сумме) на единицу мощности при данном типе последней ($a_{jr} = \gamma_{jr} + f_j^{h_j}$).

Алгоритм отсева в этом случае может быть построен аналогично рассмотренному с той лишь разницей, что после первой итерации вместо исключения из сети пункта с максимальным по величине потенциалом, тип предприятия заменяется (обычно на менее мощное), соответственно, делается замена столбца матрицы затрат. Отсев «худшего» пункта происходит после перебора в нем всех заданных типов предприятия.

Для задач в дискретной постановке разработан также модифицированный алгоритм. Разница состоит в том, что определяя потенциалы, предприятиям поочередно присваивают не нулевую мощность, а типовую.

Дальнейший процесс решения однопродуктовых задач состоит в последовательном отборе в план вариантов с наименьшими потенциалами — по одному на каждой итерации, контролируя в рассмотренном выше порядке изменение потенциалов.

Для решения многопродуктовых и многоотраслевых задач производственно-транспортного типа (модели 5.1 и 5.2) используется идея выражения затрат на перевозку сырья и продукции с помощью транспортных потенциалов по каждому транспортному блоку в отдельности.** В качестве оценки расположения предприятия мы применяем потенциал, найденный при фиксированной (заранее заданной) мощности, т. е. тем же путем, что и для однопродуктовых задач. Такие потенциалы характеризуют предприятия в сопоставимых условиях и с ослабленными взаимосвязями между собой, что существенно при формировании набора, состав которого заранее не известен. Все предприятия получают отличную от нуля оценку и в случае резкого несоответствия ресурсов и мощности, которая характерна для задач размещения (в подобных случаях коэффициенты экономичности большей частью оказываются равными нулю).

Для дальнейшего использования потенциалов их нужно пронормировать с учетом фактического уровня транспортных затрат и удельного веса в общих затратах. Затем для приведения трехиндексной задачи к двухиндексной и сокращения при этом ее размерности, потенциалы суммируют с производственными затратами.

В многоотраслевых производственно-транспортных системах предприятия в своем большинстве являются и поставщиками продукции и получателями сырья. В таком случае строятся трехэтапные транспортные задачи, позволяющие для всех предприятий, путем их поочередного закрепления в плане с заполненной мощностью, получать по два потенциала (строки из столбца). Их сумма («оценка расположения») при данном оптимальном плане — величина постоянная (не зависит от начального параметра, произвольно выбираемого для исчисления потенциалов). Она соразмерна с элементами матрицы затрат, в данном случае с величиной транспортных расходов, и потому при объединении с производственными затратами не нуждается в нормировке.

Алгоритмы, основанные на использовании транспортных потенциалов, были опробованы в Институте экономики АН Эстонской ССР на нескольких практических задачах концентрации, специализации и размещения производства. Параллельным решением задач точным и приближенным методами установлена хорошая сходимость последнего.

Равным образом, результаты решения ряда многопродуктовых задач в дискретной постановке симплексным методом показали, что построение модели с учетом производственных связей и пропорций, сопряженности переделов, а также выбор системы ограничений, в частности использование ограничений типа (40), позволяет получать план весьма близкий к целочисленному или легко к нему приводимый.

---

* Каждое предприятие будет представлено в оптимальном нецелочисленном плане, если войдет в последний, вариантом мощности с самыми низкими производственными затратами в удельном исчислении независимо от степени загрузки этой мощности согласно решению.

** Впервые этот подход был предложен и реализован в форме метода коэффициентов экономичности [9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959.
2. Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей. М., 1963.
3. В. П. Черенин, В. Р. Хачатуров, Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства. В кн.: Экономико-математические методы, вып. 2. М., 1965.
4. И. Ф. Клебанов, Алгоритм решения задачи размещения по критерию производственных и транспортных затрат. В кн.: Оптимальное размещение и специализация в отраслях промышленности. Минск, 1966.
5. И. З. Каганович, Применение математического программирования для оптимального выбора мощности и пунктов размещения маслодельных заводов (на примере о-ва Сааремаа). Изв. АН ЭССР. Серия общ. наук, 11, 3, 1962.
6. I. Kaganovitš, Tööstusettevõtete paigutamise ülesannete matemaatiline püstitamine ja analüüs. Rmt.: Tootmise kontsentreerimine ja paigutamine mõnedes Eesti NSV tööstusharudes. Tallinn, 1967.
7. В. А. Паршиков, Приближенное решение комбинаторной задачи размещения комплекса устройств. Материалы конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. Новосибирск, 1962.
8. E. Feldman, F. Lehrer, T. Ray, Ware-house Location Under Continuous Ecomonics of Scale. Management Science, 12, No. 9, 1966.
9. Д. М. Казакевич, Использование коэффициентов экономичности в транспортно-производственных задачах размещения и специализации производства. В кн.: Оптимальное планирование размещения производства. Науч. тр. НГУ. Серия экон., вып. 7. Новосибирск, 1965.
10. Методические положения по отраслевому оптимальному планированию в промышленности. Новосибирск, 1967.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15/IX 1967

I. KAGANOVITS

MAJANDUSE KONTSENTREERIMISE ÜLESANNETE TÜÜBID JA ÜKS NENDE LAHENDAMISVIISE

Resümee

Tootmise kontsentreerimise, spetsialiseerimise ja paigutamise probleemide analüüsimisel kasutatavad matemaatilised mudelid liigitatakse tootmise iseloomu järgi ühe ja mitme tootega ning mitme tootmisharuga mudeliteks. Selle järgi, kuidas mudelis kajastub kulude sõltuvus tootmise mastaabist, tehakse vahet diskreetsete ja pidevate ülesannete vahel. Diskreetsed ülesanded, kus on tegemist mitme tootega ja mitme tootmisharuga, lahendatakse tavaliselt kas üldist tüüpi täisarvulise lineaarse programmeerimismudeli või tootmistranspordimudeli abil. Ülesannete puhul, kus on tegemist ühe tootega (või ka paljude, kuid vastastikku asendatavate toodetega), rakendatakse diskreetses ja pidevas käsitluses transpordimudeleid.

Artiklis esitatakse nende ülesandetüüpide matemaatiline käsitlus ja iseloomustus ning heuristiline algoritm nende lahendamiseks katkeva või täisarvuliste muutujatega sihifunktsiooni puhul. Iteratsiooniprotsessi organiseerimiseks kasutatakse algoritmis oluliselt transpordiülesande duaalseid hinnanguid (potentsiaale).

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
15. IX 1967

I. KAGANOVICH

TYPES OF ECONOMIC CONCENTRATION PROBLEMS AND AN APPROACH TO THEIR SOLUTION

Summary

The mathematical models employed in the analysis of the problems of concentration, specialization and locating of production are divided into multi-product and multi-branch ones, depending on their character. By the way how the model reflects the relationship between expenses and the production scale, discrete and continuous problems can be distinguished. Multi-product and multi-branch problems in the discrete treatment are commonly solved with the use of a general type integer model of linear programming or a model of production-transport type. For the solution of one-product (or substitutable multi-product) problems in the discrete and continuous treatment, models of transport type are used.

This paper deals with the mathematical treatment and description of such types of models. A heuristic algorithm is given to solve them in the case of a non-continuous or integer-variable target function. To organize the iteration procedure, in the algorithm mainly dual appreciations of a transport problem (potentials) are used.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
Sept. 15, 1967