EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1968, Nr. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1968, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1968.2.01

Ü. ENNUSTE

TOOTMISSÜSTEEMI OPTIMUMÜLESANNETE LAHENDAMISEST DEKOMPONEERITUD LAGRANGE'I FUNKTSIOONI ABIL

Matemaatilises tootmisteoorias on Lagrange'i määramatute kordajate meetodit ilmselt alahinnatud ning temasse suhtumine vajab revideerimist. Oluline fakt, mis suurte tootmissüsteemide puhul selle meetodi sobivust kinnitab, on see, et nende objektide tegelike juhtimissüsteemide arenemine on üldiselt viinud kaubalis-rahaliste suhete ning nõudmis- ja pakkumishindade rakendamisele. Selline majandamisviis on aga hästi interpreteeritav kui dekomponeeritud Lagrange'i määramatute kordajate meetodi kasutamine juhtimissüsteemi algoritmina.

Asjaolu, et majandusmatemaatiliste otsustusmeetodite teooria on käesoleva ajani eelistanud teist teed, peamiselt lineaarset planeerimist ja selle arendusi, on ilmselt tingitud sellest, et küsimusele läheneti puhtmatemaatilisest aspektist. Viimase järgi on ülesande tõkked (muutujate määramispiirkond) tabu ning neid ei tohi rikkuda. Sellest seisukohast lähtudes on seda laadi ülesannete lahendamisel tähtis matemaatilise optimumi leidmine, arvestades antud tõkkeid, tõkete varieerimine aga ei paku huvi, lahendusmeetod peab seejuures andma lahendi, mille majandusteaduslik interpreteeritavus ei ole oluline. Ülesannete lahendamise hõlbustamiseks on soovitav nende lineaarsus jne.

Kuid lähenemine oleks tegelikkusele vastavam, kui silmas pidada, et ülesande tõkke väärtus on alati teatava «hinnaga» muudetav. Seega ei paku huvi mitte ainult antud tõkkele vastav optimumpunkt, vaid ka selle tõkke ümbrusele vastavad optimumid (koos trahviga tõkke rikkumise eest). Lahendusmeetodi omadused on olulised kahel põhjusel. Esiteks, ülesande lahendamisel naturaalses ajas on oluline, et ka lõpetamata lahend läheneks optimaalsele lahendile. Teiseks, mitteautomaatsete juhtimissüsteemide korral tuleb arvestada juhtide psühholoogiat. Ilmselt stimuleerivad nende aktiivsust paremini need lahendusmeetodid, milledes globaalse ülesande lahendamine on dekomponeeritud osaülesannete lahendamiseks (detsentraliseeritud juhtimine). Ja lõpuks tuleb märkida, et lineaarse käsitlusega võivad kaasneda mudeli tõsised printsipiaalsed vead.

Lähenedes küsimusele viimati esitatud seisukohtadelt, näib olevat otstarbekas rakendada tootmissüsteemide juhtimisel dekomponeeritud Lagrange'i kordajate meetodit. Sellele on tähelepanu juhitud juba mitmetes uurimustes [1,2,3], mis käsitlevad ülesandeid, kus süsteemi sihifunktsioon on tema elementidele $j=1, \ldots, n$ antud sihifunktsioonide $g_j(x_j)$ summa $\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)$, kus x_j on elemendi j juhtimist iseloomustav näitaja. Käesolevas uurimuses vaadeldakse üldisemat ülesannet, kus süsteemi sihifunktsioon on $\sum_{i=1}^{m} f_i(z_i(x_1, \ldots, x_n))$, kus $i=1, \ldots, m$ on süsteemi ainelise pooluse (sisendi või väljundi) indeks. Sel sihifunktsiooni kujul on sügavam sisu.

Artiklis püstitatakse algul tootmissüsteemi optimumülesanne üldkujul. Seejärel tuletatakse lahendusmeetod ja antakse tema majandusteaduslik interpretatsioon. Lõpuks esitatakse ülesande kaks rakenduslikku erijuhtu koos vastavate arvnäidetega. Esimene neist on Lorie-Savage'i [3], teine rakuülesande tüüpi [1] (Everetti termin), kuid mõlemal juhul on süsteemi sihifunktsioon keerukam. Lisaks sellele tuletatakse võtted tehnoloogiate käsitlemiseks alternatiivselt.

1. Tootmissüsteemi optimumülesanne üldkujul

Abstraktne tootmissüsteem koosneb üksustest, mis kujutavad enesest mingit tootmisvõimsust, näiteks tööpinki, tehnoloogilist liini, tsehhi, ettevõtet vms. Iga üksus võib antud tõkete piirides toota (väljutada) teatavaid vahendeid (tooteid, energiat, teenuseid jne.). Üksuse poolt ajaühikus toodetud vahendite kogus iseloomustab tema tootmisintensiivsust. Tootmissüsteemi kõigi üksuste tootmisintensiivsuste hulka nimetame süsteemi tootmisstruktuuriks.

Iga üksus võib antud tõkete piirides tarbida (kulutada ja vajada) teatavaid vahendeid. Vahendite tarbimisintensiivsus sõltub üksuse tootmisintensiivsusest. Üksuse tootmistarbimisintensiivsuste hulka nimetame üksuse majandusstruktuuriks. Kõigi üksuste majandusstruktuure kokku nimetame süsteemi majandusstruktuuriks.

Näeme, et süsteemi majandusstruktuur sõltub tema tootmisstruktuurist, kusjuures mõlemad peavad olema lubatavad.

Käsitleme süsteemi tootmisstruktuuri juhitavana (planeeritavana), kusjuures juhtimise eesmärgiks on süsteemi parim majandusstruktuur. Majandusstruktuuri hindamine toimub hindades, mida nimetame välishindadeks. Eeldatakse, et iga vahendi välishind on antud sõltuvana ainult selle vahendi tootmise ja tarbimise intensiivsusest vaadeldavas süsteemis, s. o. saldovoost.

Mingi vahendi väljutamist vaadeldakse tuluna, vahendi tarbimist — kuluna. Süsteemi juhtimise efektiivsust hinnatakse tulude ja kulude vahe väärtusega, mida nimetame süsteemi efektiks. Optimaalsel juhtimisel on efekt maksimaalne.

Lahendamise käigus teisendatakse see ülesanne samaväärseks, kuid teise kujuga ülesandeks. Sealjuures täiendatakse tootmissüsteemi veel ühe süsteemiga, millel on teatavad «spekuleerivad funktsioonid». Viimase tõlgendus aga on otstarbekas anda hiljem.

Kirjeldatud ülesanne võimaldab uurida nii jooksva planeerimise küsimusi kui ka tootmissüsteemi optimaalse arendamise probleeme. Viimasel juhul vaadeldakse erinevatesse intervallidesse (aastasse, kvartalisse jne.) kuuluvaid vahendeid erinevatena, kusjuures nende hulka kuuluvad ka võimsused või tootmisfondid.

1. 1. Ülesanne matemaatilisel kujul. Olgu vahendite hulk M elementide arvuga m ja elemendiindeksiga i; $i \in M = \{1, \ldots, m\}$. Olgu tootmisüksuste hulk N elemendiindeksiga j ja elementide arvuga $n - m$, $(n > m)$, $j \in N = \{m+1, \ldots, n\}$.

Tähistame üksuse j rakendamisintensiivsuse x_j, kusjuures x_j on otseselt tõkestatud suurus lubatavate seisundite hulgaga X_j. Seega $x_j \in X_j$. Hulga X_j omaduste kohta me muid tingimusi ei sea, kui et ta elemendid ei tohi olla negatiivsed. Vektor $x = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ on süsteemi tootmisstruktuur. Arusaadavalt $x \in X$, kus X on süsteemi lubatavate tootmisstruktuuride hulk: $X = \prod_{j \in N} X_j$.

Üksuse j majandusstruktuur z_j on argumendi x_j (skalaar) vektorfunktsioon: $z_j(x_j) = (z_{1j}(x_j), \ldots, z_{mj}(x_j))$, kus z_{ij} on vahendi i $\left\{\begin{array}{l} \text{tootmine} \\ \text{tarbimine} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z_{ij} > 0 \\ z_{ij} \leqslant 0 \end{array}\right\}$ üksuse j poolt. Funktsiooni $z_j(x_j)$ nimetame üksuse j tehnoloogiliseks funktsiooniks ehk lihtsalt tehnoloogiaks. Tehnoloogilisele funktsioonile me mingeid kitsendusi ei sea.

Tootmissüsteemi majandusstruktuur on vektor

$$z = \sum_{j \in N} z_j(x_j), \tag{1}$$

kus $z = (z_1, \ldots, z_m)$,

milles z_i on vahendi i $\left\{\begin{array}{l|l} \text{tootmine} & z_i > 0 \\ \text{tarbimine} & z_i \leqslant 0 \end{array}\right\}$ süsteemi poolt.

Eeldame, et z seisundite hulk on tõkestatud ainult alt, seega $z \geqslant \underline{z}$, kusjuures vektorit $\underline{z} = (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_m)$ nimetame süsteemi majandusstruktuuri alumiseks tõkkeks (ka kohustusstruktuuriks).

Süsteemi kriteeriumi matemaatiliseks kirjeldamiseks (s. o. sihifunktsiooni konstrueerimiseks) tähistame vahendi i välishinna d_i. Eeldame d_i sõltuvana ainult z_i-st mis tahes $z_i \geqslant \underline{z}_i$ puhul. Seega $d_i = d_i(z_i)$. Nüüd saame sihifunktsiooni liikme i kujul $f_i = d_i(z_i) z_i = f(z_i)$. Eeldame, et f_i on nõgus, s. o. paikneb ülalpool oma kõõlu. Et nõgusate funktsioonide summa on nõgus, siis on ka süsteemi sihifunktsioon f nõgus:

$$f = \sum_{i \in M} f_i(z_i). \tag{2}$$

Mudel (1) ja sihifunktsioon (2) ning määramispiirkonnad X ja $\underline{z}$ moodustavad lisatingimustega ekstreemumülesande

$$\max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in M} f_i(z_i) \,\middle|\, \sum_{j \in N} z_j \geqslant \underline{z} \right\}, \tag{3}$$

kus sihifunktsiooni väärtus sõltub kaudselt (z_i kaudu) juhtimisparameetrist x.

Enne kui asume ülesandele (3) Lagrange'i funktsiooni moodustama, teisendame ta uue kujuga samaväärseks ülesandeks.

1. 2. Ülesande teisendamine. Ülesande teisendamine seisneb sihifunktsiooni muutuja z_i asendamises muutujaga w_i ning seoses sellega ka välishindade d_i teisendamises hindadeks c_i. Nende «sõjakavaluste» mõte selgub järgmises punktis.

Defineerime vektori $w = (w_1, \ldots, w_m)$ järgmiselt: $w = z - \underline{z}$. Seega on w majandusstruktuuri z varieeritav liige, sest teine liige $\underline{z}$ on antud. Kuna $z \geqslant \underline{z}$, siis $w \geqslant 0$. Nüüd saame ülesandele (3) kuju

$$\max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in M} f_i(w_i + \underline{z}_i) \,\middle|\, z - w = \underline{z} \right\}. \tag{4}$$

Eraldame sihifunktsioonist fikseeritud liikme $\sum_{i \in M} d_i(\underline{z}_i)\underline{z}_i$ ning teisendatud välishinnad c_i peavad rahuldama võrdust

$$f_i(w_i + \underline{z}_i) = d_i(\underline{z}_i)\underline{z}_i + c_i(\underline{z}_i, w_i) w_i. \tag{5}$$

Teisendatud välishinnad on sisuliselt need hinnad, mida makstakse kas üle kohustuste toodetud vahendite eest, s. t. kui $\underline{z}_i > 0$, või süsteemi poolt säästetud vahendite eest, s. t. kui $\underline{z}_i \leqslant 0$. Formaalselt toimub hindade c_i määramine hindade d_i alusel järgmiselt: koordinaatide alguspunkt teljel i viiakse punkti $\underline{z}_i$. Seega on hinnad c_i kergesti leitavad ja neid võib ülesande jaoks lugeda antuks.

Esimene liige võrduse (5) paremal pool $d_i(\underline{z}_i)\underline{z}_i = \text{const}$, mis võimaldab (5) sihifunktsiooni asendada funktsiooniga $g_i(w_i) = c_i(\underline{z}_i, w_i) w_i$. Viimast kasutades saame

$$\max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in M} g_i(w_i) \,\middle|\, z - w = \underline{z} \right\}. \tag{6}$$

Märgime, et me võime ka w-d käsitada kui sõltumatut (juhitavat) muutujat, mis peab rahuldama tingimuse $w \geqslant 0$. Sel puhul saame moodustada uue juhtimisvektori $u = (w, x)$, mis peab kuuluma teatavasse hulka $u \in U = W \times X$, kus $W = \{w_i \mid w_i \geqslant 0,\ i \in M\}$.

Kasutame vektorit u süsteemi tasakaalutingimuse $z - w = \underline{z}$ ja sihifunktsiooni $\sum_{i \in M} g_i(w_i)$ kirjutamisel. Mudeli puhul saame arutleda järgmiselt:

$$-w + \sum_{j \in N} z_j(x_j) = -w + z(x) = (-E, \tilde{z}) \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} = \check{z}(w, x),$$

kus $\tilde{z}$ on $n - m$ mõõtmeline operaatorite vektor: $\tilde{z} = (\tilde{z}_{m+1}, \ldots, \tilde{z}_n)$, mille komponent $\tilde{z}_j x_j = z_j(x_j)$ ning $\check{z} = (-E, \tilde{z})$ on süsteemi operaator. E on m-mõõtmeline ühikmaatriks. Vektori u kasutamiseks sihifunktsioonis tarvitseb vaid defineerida, et hind $c_i = \begin{cases} c_i, \text{ kui } i \in M \\ 0, \text{ kui } i \in N \end{cases}$. Nüüd saame ülesande kuju, mida on hõlpus analüüsida Lagrange'i kordajate meetodil:

$$\max_{u \in U} \left\{ g(u) = \sum_{i \in M} g_i(u_i) \middle| \check{z}(u) = \underline{z} \right\}. \tag{7}$$

2. Ülesande lahendamine Lagrange'i kordajate meetodil

2. 1. Teoreemid. Everetti poolt esitatud nn. põhiteoreemi [1] modifikatsioon on vastavalt käesolevale juhule järgmine.

Teoreem 1. Kui $u^0 \in U$ maksimiseerib reaalarve λ_i ja $i \in M$ ning $\lambda = (\lambda_i)$ sisaldava Lagrange'i funktsiooni

$$L(u, \lambda) = g(u) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u), \qquad \text{kus } u \in U, \tag{8}$$

siis u^0 on ülesande (7) lahend juhul, kui $\check{z}_i(u^0) = \underline{z}_i$, $i \in M$.

Teoreemi 1 tõestus on uurimuses [1] esitatud tõestuse erijuht. Vastavalt eeldusele $u^0 \in U$ maksimiseerib

$$g(u) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u), \qquad \text{kus } u \in U.$$

Tähendab, kõigi $u \in U$ korral

$$g(u^0) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u^0) \geqslant g(u) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u)$$

ja järelikult

$$g(u^0) \geqslant g(u) + \sum_{i \in M} \lambda_i (\check{z}_i(u) - \check{z}_i(u^0)).$$

Kui viimane võrratus kehtib üle kogu U, siis kehtib ta ka U alamhulgal

$$U^0 = \{u | u \in U, \quad z_i(u) = \underline{z}_i, \quad i \in M\}.$$

Kuid sellel alamhulgal $u \in U^0$ on viimase võrratuse parema poole teise liikme väärtus null ning teoreem on tõestatud.

Teoreemist järeldub, et piisab, kui leida sellised λ_i väärtused, millede puhul $\check{z}_i(u^0) = \underline{z}_i$ ning tõkestatud ülesande (7) lahend on leitav klassikalise optimumülesande (8) lahendina. Selliste λ_i-de eksisteerimise küsimusel peatume allpool. Praegu eeldame, et nad eksisteerivad, ja uurime nende leidmise mehhanismi. Selleks esitame Everetti nn. λ-teoreemi.

Teoreem 2. Olgu $\{\lambda_i^{\mathrm{I}}\}$ ja $\{\lambda_i^{\mathrm{II}}\}$ kaks λ_i-de hulka $i \in M$, mis annavad ülesande (8) lahendid vastavalt u_{I}^0 ja u_{II}^0, ja et

$$\check{z}_i(u_{\mathrm{I}}^0) = \check{z}_i(u_{\mathrm{II}}^0), \qquad \text{kui } i \neq l,$$

ja et
$$\check{z}_l(u_{\mathrm{I}}^0) < \check{z}_l(u_{\mathrm{II}}^0),$$
siis
$$\lambda_l^{\mathrm{II}} \geqslant (g(u_{\mathrm{I}}^0) - g(u_{\mathrm{II}}^0)) / (\check{z}_l(u_{\mathrm{I}}^0) - \check{z}_l(u_{\mathrm{II}}^0)) \geqslant \lambda_l^{\mathrm{I}}.$$

Teoreemist järeldub, et $\check{z}_l(u^0(\lambda))$ on λ_l kasvav funktsioon. Seega lahendi $\check{z}_l(u^0) > \underline{z}_l$ parandamiseks (võrratuse asemel võrduse saavutamiseks) tuleb λ_l väärtust vähendada. Vastupidisel juhul, kui $\check{z}_l(u^0) < \underline{z}_l$, tuleb λ_l väärtust suurendada. Kui $\check{z}_l(u^0) = \underline{z}$ siis on soovitud λ_l väärtus leitud. Tingimust $\check{z}_l(u^0) = \underline{z}_l$ nimetame Everetti tingimuseks.

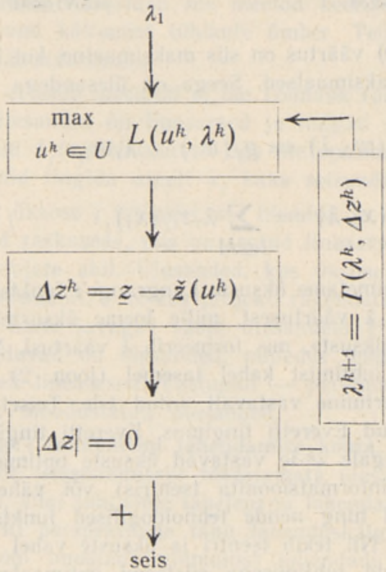
Seega on ülesannet (8) võimalik lahendada iteratiivse protseduuriga, mille samm k, ($k \geqslant 2$) koosneb järgmistest operatsioonidest (siin $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$):

(k. 1) kasutades eelmist sammu u^{0k-1} ja λ^{k-1}, püüame leida sellise λ^k, mis rahuldaks Everetti tingimust;

(k. 2) lahendame ülesande (8) λ^k korral ja leiame u^{0k};

(k. 3) kui $\check{z}_l(u^{0k}) = \underline{z}_i$, $i \in M$, siis on ülesanne lahendatud, vastasel juhul teeme sammu $k+1$.

Piltlikult on kirjeldatud protseduur esitatud joonisel 1.



Joon. 1. Algoritmi põhimõtteline skeem.

Kuidas teha algsammu, s. o. valida $\lambda^{k=1}$, ja kuidas sammul k korrigeerida λ^{k-1} väärtust, on Everett jätnud lahtiseks. Neid küsimusi käsitleme punktis 2.4.

Siinkohal aga märgime, et praktiliselt toimub ülesande (8) lahendamine igal sammul (k. 2) teatava veaga. Võib juhtuda, et saadud ligikaudne lahend erineb oluliselt ülesande (7) lahendist, mis muudab meetodi praktiliselt kasutuks. Sellele probleemile annab vastuse Everetti ε-teoreem.

T e o r e e m 3 (ε-teoreem).* Kui $u^0 \in U$ maksimiseerib Lagrange'i funktsiooni (8) ε piirides:
$$g(u^0) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u^0) > g(u) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u) - \varepsilon$$
ja $\check{z}_i(u^0) = \underline{z}_i$, siis u^0 maksimiseerib ε piirides ka tõkestatud ülesande (7).

Praktilistes arvutustes on otstarbekas loobuda nõudest $\Delta z_i = 0$, $i \in M$ ning lubada

* ε-teoreemi puhul on vajalikuks täiendavaks eelduseks, et $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in M$.

väikest sidumatust $|\Delta z_i| \leqslant \varepsilon_i$, $i \in M$, kus ε_i on vahendi lubatav sidumatus. Tuleb märkida, et ülesande lahend sõltub väärtuste ε_i ja $i \in M$ valikust, sest tõkete rikkumine võimaldab koostada paremaid plaane.

ε_i väärtuse määramine peab toimuma sisulistel kaalutlustel, sõltuvalt vahendile i rakendatava tõkke sisulisest jäikusest.

2. 2. Lahenduskäigu dekomponeerimine. Lagrange'i meetodi separeerivad omadused võimaldavad süsteemi optimaalse lahendi leidmise taandada üksuste iseseisvateks optimumülesanneteks [1, 2, 4, 6]. Käesoleva ülesande struktuuri korral on ülesande dekomponeerimine järgmine.

Lähtume ülesande üksikasjalikust kujust

$$\max_{u \in U} L(u, \lambda) = \sum_{i \in M} g_i(w_i) + \sum_{i \in M} \lambda_i [-w + \sum_{j \in N} z_{ij}(x_j)]. \tag{9}$$

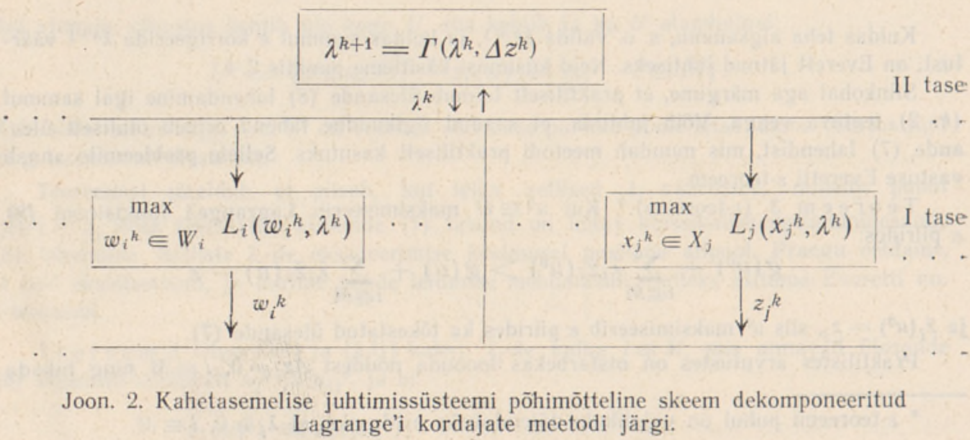
Teisendame võrduse (9) parema poole järgmiselt:

$$\max_{u \in U} L(u, \lambda) = \sum_{i \in M} [g_i(w_i) - \lambda_i w_i] + \sum_{j \in N} [\sum_{i \in M} \lambda_i z_{ij}(x_j)]. \tag{10}$$

Lagrange'i funktsiooni (10) väärtus on siis maksimaalne, kui kandilistes sulgudes olevate avaldiste väärtused on maksimaalsed. Seega on ülesandega (10) samaväärne ülesanne

$$\begin{cases} \max\limits_{w_i \in W_i} L_i(w_i, \lambda) = g_i(w_i) - \lambda_i w_i, & i \in M, \\ \max\limits_{x_j \in X_j} L_j(x_j, \lambda) = \sum\limits_{i \in M} \lambda_i z_{ij}(x_j), & j \in N. \end{cases} \tag{11}$$

Funktsioone L_i ja L_j nimetame üksuste Langrange'i funktsioonideks. Näeme, et nende lahendid sõltuvad vektori λ väärtusest, mille loeme üksustele antuks. Järelikult tuleb meil vaadelda veel ühte «üksust», mis formeerib λ väärtusi. Nüüd aga võime lahenduskäiku interpreteerida kui juhtimist kahel tasemel (joon. 2). Esimesel tasemel toimub üksuste plaanide optimiseerimine vastavalt antud λ-le. Teisel tasemel korrigeeritakse λ selliselt, et oleks rahuldatud Everetti tingimus. Everetti tingimuse kontrollimiseks peab teise taseme juht saama igale λ^k-le vastavad üksuste optimaalsed majandusstruktuurid (juhtimine ilma täieliku informatsioonita tsentris) või vähemalt üksuste optimaalsed rakendamise intensiivsused ning nende tehnoloogilised funktsioonid (juhtimise täieliku informatsiooniga tsentris). Nii tekib tsentri ja üksuste vahel iteratiivne protseduur, mis viib selle detsentraliseeritud juhtimisega süsteemi optimaalsesse seisundisse.



Joon. 2. Kahetasemelise juhtimissüsteemi põhimõtteline skeem dekomponeeritud Lagrange'i kordajate meetodi järgi.

2. 3. **Tühikud ja meetodi rakendusulatusest.** Kui ülesande (8) lahendus u^0 on leitud nii, et $\hat{z}(u^0) = \underline{z}$, siis garanteerib teoreem 1, et see lahendus on ka ülesande (7) globaalseks optimumiks. Seega ei ole ohtu sattuda lokaalsele optimumile, vaatamata sellele, milliseid reaalmuutuja funktsioone me süsteemi mudeli ehitamiseks või sihifunktsiooniks ka ei kasutaks. Kui ülesande lahendamine toimub dekomponeeritult, peavad üksuste optimumülesannete lahendid süsteemi globaalse optimumi kindlustamiseks olema globaalsed.

Kuid selle meetodi komistuskiviks on asjaolu, et paljudel juhtudel ei eksisteeri sellist λ, mis tagaks Everetti tingimuse $\hat{z}(u^0(\lambda)) = \underline{z}$. Viimase sõltuvuse kaudu omab iga λ kujutise vahendite m-mõõtmelises ruumis. Kuid selles ruumis võib leiduda λ-le ligipääsmatuid alasid, tühikuid, milledes λ kujutisi ei oma [1]. Kui vaadelda $m+1$ mõõtmelist ruumi, milles liidetud koordinaat kujutab sihifunktsiooni väärtusi, siis on meetodi suhtes kriitilised sellised olukorrad, kus tühikud satuvad sihifunktsiooni maksimumi piirkonda.

Käesolevas ei anta selgitust üldjuhul tingimustele, milledele süsteemi mudel ja sihifunktsioon peavad vastama, et vältida tühikuid. Ilmselt on need tingimused lähedased Kuhn-Tuckeri teoreemi või Arrow-Debreu' majanduse konkurentse tasakaalu teoreemi tingimustele, mis on üsna ranged. Kuid selle meetodi praktilisel kasutamisel ei tohi tühikuid üle hinnata. Esiteks võimaldab see meetod keeruka mudeli ja sihifunktsiooni korral siiski uurida süsteemi käitumist tühikute ümber. Teiseks võib leida täiendavaid võtteid tühikute tähtsuse vähendamiseks.

Intuitiivselt on näha, et seda meetodit ei ole võimalik rakendada, kui tehnoloogilised funktsioonid käesolevas ülesandes on lineaarsed ja hulgad x_j sisaldavad üle kahe elemendi. Siis on funktsioonid $L_j(x_j)$ lineaarsed ega ole optimiseeritavad. Sisuliselt saavad siin λ kõik kombinatsioonid tingida ainult x_j kaks seisundit: kas $x_j = \underline{x}_j$ või $x_j = \overline{x}_j$, kus $\overline{x}_j$ ja $\underline{x}_j$ on vastavalt üksuse j intensiivsuse ülemine ja alumine tõke. Siit tulenevad ka need «üllatavalt suured raskused», mis on seotud lineaarplaneerimise ülesande lahendamisega Lagrange'i kordajate abil. Ülesanded, kus üksuse rakendamise intensiivsusel on ainult kaks lubatavat seisundit, s. o. kas projekti rakendatakse või ei, on selle meetodi abil uuritavad. Neid nn. Lorie-Savage'i tüüpi ülesandeid [3] uurimegi allpool.

Ilmselt halvasti koonduvad on ülesanded, milledes tehnoloogilised funktsioonid ja sihifunktsioon on suhteliselt lineaarsed. Vastupidi — paremini koonduvad on suhteliselt kõveratest funktsioonidest moodustatud ülesanded.

2. 4. **Märkusi Lagrange'i funktsiooni lahendamise kohta.** Teoreem 1 esitab meetodi tõkestatud optimumülesande teisendamiseks tõkestamata ülesandeks, ei ütle aga midagi viimase lahendamise kohta. Ülal juhtisime tähelepanu lahendamisvõimalusele iteratsioonimeetodi abil, mis näib eriti perspektiivne tänu lahenduskäigu dekompositsiooni võimalusele. Kuid samuti ei tohi unustada võimalust lahendada ülesanne (8) terviklikult järgmise võrrandisüsteemina:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(u,\lambda)}{\partial u_k} = 0, & k \in M \cup N \\ z_i(u) = \underline{z}_i, & i \in M. \end{cases} \tag{12}$$

Ülesannete mõningate konstruktsioonide puhul on süsteem (12) lineaarne, seega täpselt lahendatav ka suurte mõõtmete korral.

Ülesande lahendamisel iteratsioonimeetodi abil oleneb lahenduseks vajalik sammude arv alglähendist λ^1 ja λ korrigeerimiseeskirja $\lambda^{k+1} = \Gamma(\lambda^k, \Delta z)$ efektiivsusest, kus $\Delta z = \underline{z} - \hat{z}(u^k)$.

Alglähendi valikule mingeid formaalseid eeskirju esitada on raske. Ilmselt aitab sobivat alglähendit valida ülesande sisu tundmine, mida käsitleme lõigus, kus peatume lahendusmeetodi majandusteaduslikul interpretatsioonil.

Teoreemist 2 järeldub, et otsitav λ on ülesande (7) sihifunktsiooni gradient vahendite tõkke $\underline{z}$ järgi optimumpunktis u^0:

$$\lambda_i = \frac{\partial g(u^0)}{\partial \underline{z}_i}, \quad i \in M. \tag{13}$$

Viimasele seosele saab tugineda λ korrigeerimisreeglite koostamisel. Õppides lahendamise käigus $m+1$ mõõtmelises vahendite ja sihifunktsiooni ruumis tundma hüperpinda, mille moodustavad optimaalsetele lahenditele vastavad sihifunktsiooni väärtused (s. o. maksimaalsed väärtused), saab prognoosida λ koordinaatide väärtust punktis $(\underline{z}, g(u^0))$.

Kõige lihtsamaks, kuid mitte kõige efektiivsemaks λ parandamise võtteks on järgmise lineaaravaldise kasutamine:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \gamma_i^k \Delta z_i^k, \tag{14}$$

kus γ_i^k on mittenegatiivne kordaja, mille väärtuse õigest valikust sõltub koonduvuskiirus. Tema määramisele võib läheneda kahel teel. Kõige lihtsam on γ_i^k intuitsiooni järgi valida. Kui valitud γ_i^k ei anna head koonduvust, siis valitakse uus γ_i^k jne. Seejuures on koonduvuse hindamise kriteeriumiks $|\Delta z_i^k|$ vähenemise kiirus $\Delta^2 z_i^k = |\Delta z_i^{k-1}| - |\Delta z_i^k|$. Teiseks teeks on γ_i^k esitamine $\Delta^2 z_i^k$ funktsioonina: $\gamma_i^k = \gamma_i^k(\Delta^2 z_i^k)$. Nüüd tuleb selle funktsiooni parameetrid intuitiivselt valida ja neid lahenduse käigus korrigeerida.

3. Lahendusmeetodi majandusteaduslikud aspektid

Esitatud lahendusmeetodit võib ka käsitada kui tootmissüsteemi optimaalse juhtimise ja planeerimise teooriat. Arusaadavalt kehtib see teooria ainult sellise objekti puhul, mis on isomorfne meie ülesandes püstitatud eelduste süsteemiga.

3. 1. Lagrange'i funktsiooni ja tema kordajate tõlgendus. Lagrange'i funktsiooni (8) konstrueerimine põhineb järgneval mõttekäigul. Ülesandes (7) on funktsioon $g(u)$, mida teatavate tõkete korral tuleb maksimiseerida. Sisuliselt on süsteemi tõkked väljastpoolt (kas objektiivsetest põhjustest või administratiivselt kõrgemalseisva organi poolt) antud tingimused vahendite tootmise-tarbimise mahu kohta. Teatavaid vahendeid ei tohi süsteem antud piirist vähem väljutada ja teatavaid vahendeid ei või ta tarbida üle antud piiri. Kui mõnele vahendile ei ole tõket väljastpoolt antud, siis võime selle vahendi tõket vaadelda vastavalt kas küllalt väikese või küllalt suure arvuna.

Ülesande (7) sihifunktsiooni $g(u)$ vabastamine tõketest tähendaks seda, et optimaalne plaan u^0 võiks anda sellise vahendite struktuuri, mis asub vahendite ruumis väljaspool määramispiirkonda. Selle vältimiseks tuleb funktsiooni $g(u)$ täiendada liikmega, mis stimuleeriks sellise u^0 valikut, et vahendite struktuur langeks määramispiirkonda (antud juhul on selleks punkt $\underline{z}$). Niisuguseks täiendavaks liikmeks on sobiv valida monotoonne kahemuutuja funktsioon $G(\lambda, \check{z})$ ehk lineaarsel kujul $\sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u)$, kus $\check{z}_i(u)$ väljendab süsteemi käitumist vahendi i suhtes ja λ_i on stimuleeriv parameeter. Arusaadavalt tuleb λ_i valida niisugune, et $z_i(u^0) = \underline{z}_i$. Sellise arutlusega jõuame funktsiooni

$$L(u, \lambda) = g(u) + \sum_{i \in M} \lambda_i \check{z}_i(u)$$

konstrueerimiseni. Tema sisust on selge, et $\lambda_i, i \in M$, on antud ülesandes mittenegatiivne, sest väljalase on positiivne ja tema stimuleerimiseks maksimiseeritavas funktsioonis peavad ka vastavad kordajad olema mittenegatiivsed. Tarbimine aga on negatiivne ja et tarbimist pidurdada, peaks ka maksimiseeritavat funktsiooni vähendama; seega peab kordaja olema mittenegatiivne.

Lagrange'i funktsiooni konstruktsioon määrab ka λ_i ühiku kui sihifunktsiooni $g(u)$ ühiku ja vahendi i ühiku suhte, sest λ_i peab nad muutma samanimelisteks. Järelikult, kui $g(u)$ ühik on väärtuse ühik (rbl.) ja vahendi i koguse mõõtmine toimub naturaalühikus, siis λ_i on hinnaühik (rbl./vahendi i ühik). Kui $g(u)$ ühik on rbl. ja ka vahendi i koguse mõõtühikuks on rbl., siis kujutab λ_i enesest hinnaindeksit (rbl./rbl.), mis vahendi i välishinna teisendab süsteemi sisehinnaks. Sisehind on tõkestatud ja optimiseeritavas süsteemis tekkiv hind. Optimumlahendile vastavat sisehinda on otstarbekas nimetada optimumhinnaks.*

Märgime veel, et kui süsteem ei ole tõkestatud, siis võrduvad sisehinnad välishindadega ehk teiste sõnadega: lahtises süsteemis kaotab sisehinna ja välishinna mõistete eristamine mõtte.

Lõpuks pakub huvi teada, et optimumhindade taseme määravad käesolevas mudelis kolm argumenti: välishinnad d_i (sihifunktsioonihinnad), süsteemi tehnoloogia $\bar{z}_i(u)$ ja tõkete väärtused $\underline{z}_i$.

3. 2. Üksuste Lagrange'i funktsioonid ja süsteemi detsentraliseeritud juhtimine. Optimumhindade abil on süsteem optimiseeritav üksuste Lagrange'i funktsioonide maksimiseerimisega. Selgitame üksuste Lagrange'i funktsioonide tähendust.

Tootmisüksuse $j \in N$ Lagrange'i funktsioon

$$\max_{x_j \in X_j} L_j(x_j, \lambda) = \sum_{i \in M} \lambda_i z_{ij}(x_j)$$

näitab, et üksuse majandusstruktuuri tuleb maksimiseerida optimumhindades, mida nimetame üksuse majanduslikuks efektiks. Praktikas on selle sisuga näitajal mitmeid nimesid (ürituse majanduslik efekt, kasum, rahvatulu jne.), sõltuvalt üksuse valikust.

Vaatleme süsteemi üksusi $i \in M$:

$$\max_{w_i \in W_i} L_i(w_i, \lambda) = g_i(w_i) - \lambda_i w_i.$$

Siin on juhitavaks muutujaks w_i, süsteemi majandusstruktuuri vabalt valitav osa. Seejuures tuleb suurus w_i valida selline, et maksimiseerida selle üksuse efekti. Viimane seisneb järgmises: kuludeks on vahendi i kogus w_i süsteemi optimumhindades, tuludeks selle vahendi kogus välishindades. Näeme, et efekt luuakse hinnavahe arvel, mistõttu üksusel $i \in M$ on spekuleeriv loomus. Nimetame üksusi $i \in M$ jaotavateks üksusteks. Tänu jaotava üksuse rakendamisele oli võimalik sihifunktsiooni viia ainult vaba majandusstruktuur ja dekomponeerida ülesande lahendamise käiku. Viimasel asjaolul on detsentraliseeritud juhtimissüsteemide uurimisel sügav majandusteaduslik sisu.

Juhtimissüsteemi optimaalsuse küsimus on äärmiselt keerukas, sest siin ei saa piirduda ainult tehnoloogilise aspektiga, vaid tuleb arvestada ka psühholoogilisi aspekte (näiteks, kas psühholoogiliselt on vastuvõetavam tsentraliseeritud või detsentraliseeritud juhtimine). Loobudes küsimuse psühholoogilisest küljest, võib esialgses lähenduses juhtimissüsteemi efektiivsust hinnata algoritmi koonduvuskiiruse järgi. Ühtlasi on tähtis see, et ülesande lahendamisel oleks kogu aeg käepärast optimumile lähedane lahend.

Tõlgendades käesolevat meetodit kui juhtimissüsteemi projekti, võime öelda, et tegemist on kahetasemelise juhtimisega. Esimesel tasemel toimub üksuste, teisel — kogu süsteemi juhtimine, kuid mitte otseselt, vaid kaudselt, sisehindade abil. Viimased kujunevad nõudmise ja pakkumise tasakaalustamisel ja viivad süsteemi optimiseerimiseni. Nagu juba öeldud, sünteesivad sisehinnad informatsiooni kolme teguri, nimelt välishindade, süsteemi tehnoloogia ja süsteemi tõkete kohta. Konkreetsete juhtimissüsteemide korral võib neid kolme tegurit jällegi interpreteerida mitmeti. Seejuures võib süsteemi ja selle üksuse tõkkeid käsitada kui tsentraliseeritud juhtimise elemente. Huvitav on märkida, et detsentraliseerimine nõuab jaotavate üksuste (turg, kaubandus jne.) olemasolu. Ka need peavad töötama nii, et maksimiseerida oma efekte.

---

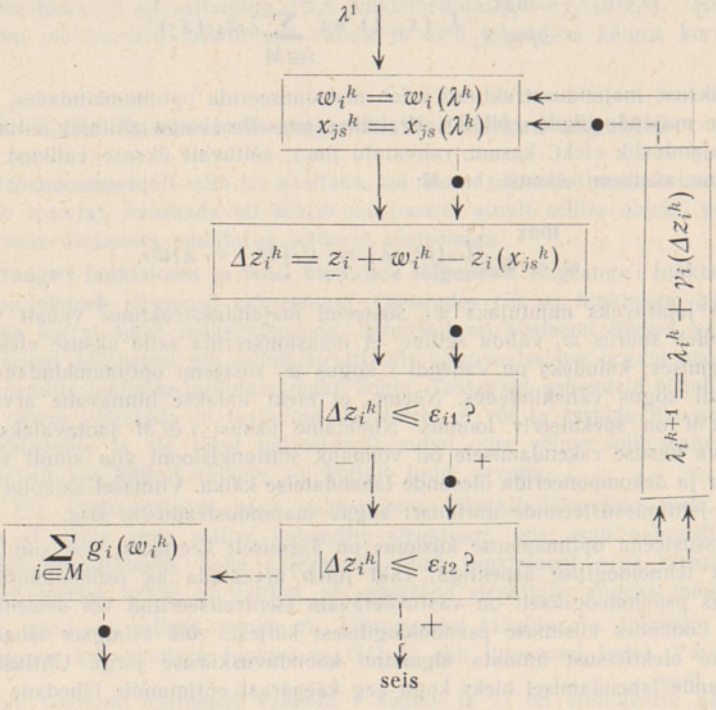
* On tõestatud [5], et λ_i sisu on samane analoogilise sisuga lineaarplaneerimisülesande duaallahendi π_i omaga.

4. Meetodi rakendusi

Järgnevalt vaatleme esitatud üldise ülesande kahte erijuhtu, mis sobivad tootmissüsteemide juhtimisotsuste väljatöötamiseks. Enne aga esitame arvutusmeetodi blokkskeemi, mis võimaldab ülesande lahendada programmeeritult (joon. 3).

Elektronarvuti kasutamisel on otstarbekas selleks rakendada kahte lubatava sidumatuse mõistet ε_{i1} ja ε_{i2}, kus $\varepsilon_{i1} > \varepsilon_{i2}$. Kui esimene täpsus ε_{i1} on saavutatud, siis on jõutud optimumpunkti lähedusse ning arvutustulemused on kasulik välja trükkida. Nende analüüs pakub sisulist huvi. Kuigi ülesande lahendamise eesmärgiks on sihifunktsiooni maksimumi leidmine antud tõkke korral, on ülesande lahendamise käigus tõkked rikutud ning sihifunktsiooni väärtus võib seetõttu väheneda. Pakub huvi, milliste tõkete korral saaks sihifunktsiooni väärtust oluliselt suurendada. Samuti pakub huvi sisehindade muutuste uurimine jne.

Esitatud blokkskeem on üldine kõigile selle ülesande erijuhtudele. Igale erijuhule vastavad ainult esimese bloki operaatorite w_i^k ja x_{js}^k kindlad erikujud, mis esitatakse ülesannete juures.



Joon. 3. Ülesande lahendamise eeskiri.

Märkused: 1. $\varepsilon_{i1} > \varepsilon_{i2}$.
2. Kui $|\Delta z_i^k| < \varepsilon_{i1}$, läheb juhtimine üle katkeva joonega kontuurile.
3. $-\bullet\rightarrow$ välja trükkida.

4. 1. Tootmissüsteemi komplekteerimisülesanne. Olgu antud projektide hulk, millest on lubatud süsteemi komplekteerida. Iga projekt läheb süsteemis käiku kas täielikult (projekteeritud võimsusega) või üldse mitte. Igale projektile vastab oma majandusstruktuur. Süsteemi majandusstruktuur on süsteemi komplekteeritud projektide majandusstruktuuride summa.

Süsteem peab rahuldama järgmisi tingimusi. Tema majandusstruktuurile on antud alumine tõke (süsteem ei tohi teatavaid tooteid väljutada antud mahust vähem ega tarbida teatavaid tooteid rohkem kui lubatud). Lubatavate projektide hulk jaguneb kolmeks: 1) osa projekte võib kas plaani minna või mitte; 2) osa projekte on alternatiivsed: kui valida üks projekt, langevad ülejäänud välja; 3) alternatiivsete projektide kohta võib veel kehtida reegel, et üks neist tuleb tingimata valida.

Ülesandeks on maksimiseerida süsteemi vaba majandusstruktuuri antud välishindades. Eeldatakse, et välishinnad sõltuvad süsteemi majandusstruktuurist.

Ülesannet võib varieerida nii, et süsteemi vaadeldakse kas ainult ühe ajavahemiku vältel või pikema ajavahemiku vältel intervallide kaupa. Viimase, dünaamilise ülesande puhul peavad ka projektide majandusstruktuurid olema antud kogu ajavahemiku kohta intervallide lõikes.

4. 1. 1. Ülesande formaliseerimine. Olgu vahendi ja jaotava üksuse indeks $i \in \{1, \ldots, m\} = M$ ja jaotava üksuse rakendamisintensiivsus w_i. Viimane on alt tõkestatud $w_i \geqslant 0$.

Olgu tootmisüksuse indeks $j \in \{m+1, \ldots, n\} = N$. Igal tootmisüksusel $j \in N$ on alternatiivsete projektide hulk indeksiga $s \in \{1, \ldots, l_j\} = N_j$ (kui alternatiivid puuduvad, siis sisaldab hulk N_j ainult ühte elementi j). Hulgast N_j võib igasse plaani valida ainult ühe elemendi.

Tähistame üksuse j rakendamisintensiivsuse alternatiivi s korral x_{js}. Vastavalt eeldusele $x_{js} = \begin{cases} \bar{\bar{x}}_{js} \\ 0 \end{cases}$, kus $\bar{\bar{x}}_{js}$ on projekti js projekteeritud võimsus.

Jaotame hulga N kaheks ühisosata alamhulgaks $N = P \cup Q$. Üksuse $j \in P$ võivad plaani minna nullintensiivsusega. Üksused $j \in Q$ ei või plaani minna nullintensiivsusega: $x_{js} > 0$, $s \in N_j$ ühe s korral.

Projekti js majandusstruktuur $z_{js} = \bar{\bar{z}}_{js} x_{js}$, kus $\bar{\bar{z}}_{js} = (\bar{\bar{z}}_{1js}, \ldots, \bar{\bar{z}}_{mjs})$ — projekti tehnoloogia. Kui projekti js ei rakendata $x_{js} = 0$, siis $z_{js} = 0$. Süsteemi majandusstruktuur $z = \sum_{j \in N} \sum_{s \in N_j} z_{js}$, mida alt tõkestab $z \geqslant \underline{z}$.

Süsteemi tasakaalutingimus vahendi i kohta on

$$\underline{z}_i + w_i - \sum_{j \in N} \sum_{s \in N_j} \bar{\bar{z}}_{ijs} x_{js} = 0.$$

Ülesande sihifunktsioon

$$g = \sum_{i \in M} g_i(w_i) = \sum_{i \in M} (\hat{c}_i + \check{c}_i w_i) w_i,$$

kus $c_i = \hat{c}_i + \check{c}_i w_i$ — välishind (teisendatud), milles parameetrite $\hat{c}_i$ ja $\check{c}_i$ väärtused on antud.

4. 1. 2. Algoritmi elemendid. Selle süsteemi korral üksuste Lagrange'i funktsioonid

$$L_i(w_i) = \hat{c}_i w_i + \check{c}_i w_i^2 - \lambda_i w_i,$$

$$L_{js}(x_{js}) = \sum_{i \in M} \lambda_i \bar{\bar{z}}_{ijs} x_{js}.$$

Tundmatu w_i esialgse optimaalse väärtuse leiame tingimusest

$$\frac{dL_i(w_i)}{dw_i} = 0, \quad \text{mis annab} \quad w_{i1} = \frac{\lambda_i + \hat{c}_i}{2\check{c}_i}.$$

Arvestades tõket $w_i \geqslant 0$, saame eeskirja optimaalse w_i määramiseks:

$$w_i = \begin{cases} w_{i1}, & \text{kui } w_{i1} \geqslant 0 \text{ ja } L_i(w_{i1}) > 0, \\ 0, & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Tundmatu x_{js}, $j \in P$ leiame järgmiselt:

$$x_{js} = \begin{cases} \bar{\bar{x}}_{js}, & \text{kui } L_{js} > L_{jk} \text{ ja } L_{js} > 0,\ s,\ k \in N_j, \\ 0, & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Tundmatu x_{js}, $j \in Q$, leiame

$$x_{js} = \begin{cases} \bar{\bar{x}}_{js}, & \text{kui } L_{js} > L_{jk},\ k,\ s \in N_j, \\ 0, & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Märgime, et lineaarse sihifunktsiooni korral $(c_i = \hat{c}_i)$ on ülesanne ainult siis lahenduv kui $w_i = \begin{cases} \bar{\bar{w}}_i \\ 0 \end{cases}$, kus $\bar{\bar{w}}_i = \text{const}$.

Näide (ilma alternatiivideta). Olgu vaja lahendada järgmine tootmissüsteemi pooldiskreetne optimumülesanne:

$$\max_{w_i,\, x_j} \begin{cases} 2(w_1 + w_2) - \\ -0{,}1\,(w_1^2 + w_2^2) \end{cases} \left| \begin{array}{l} -w_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3 \\ -w_2 - 0{,}5x_3 - x_4 - 1{,}5x_5 - 2x_6 - 4x_7 = -5 \\ 0 \leqslant w_1; \quad 0 \leqslant w_2 \qquad x_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \end{array} \right\}.$$

Ülesande lahendamine toimub kahe tabeli abil. Tabelis 1 arvutatakse w_i^k ja x_j^k vastavalt λ^k-le, tabelis 2 — λ^{k+1} vastavalt Δz_i^k-le.

Antud ülesandes $L_i(w_i) = 2w_i - 0{,}1w_i^2 - \lambda_i w_i$ ja

$$L_j(x_j) = \lambda_1 \bar{\bar{z}}_{1j} x_j - \lambda_2 \bar{\bar{z}}_{2j} x_j.$$

Lahendamiseks valiti:

1) $\lambda_1^1, \lambda_2^1 = 2{,}0;$
2) $\gamma_i = 0{,}2;$
3) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0{,}1.$

Tabel 1

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$w_1^k = \begin{cases} 10 - 5\lambda_1^k \\ 0 \end{cases}$	0	0	0	0	0
$w_2^k = \begin{cases} 10 - 5\lambda_2^k \\ 0 \end{cases}$	0	3,5	2	3,5	2
$x_3^k = \begin{cases} 1, L_3 \geqslant 0 \\ 0, L_3 < 0 \end{cases}$	1	1	1	1	1
$x_4^k = \begin{cases} 1, L_4 \geqslant 0 \\ 0, L_4 < 0 \end{cases}$	1	1	1	1	1
$x_5^k = \begin{cases} 1, L_5 \geqslant 0 \\ 0, L_5 < 0 \end{cases}$	0	1	0	1	1
$x_6^k = \begin{cases} 1, L_6 \geqslant 0 \\ 0, L_6 < 0 \end{cases}$	0	0	0	0	0
$x_7^k = \begin{cases} 1, L_7 \geqslant 0 \\ 0, L_7 < 0 \end{cases}$	0	0	0	0	0

Tabel 2

i	Δz_i^1	λ_i^2	Δz_i^2	λ_i^3	Δz_i^3	λ_i^4
1	1	$2+0{,}2=2{,}2$	0	$2{,}2+0=2{,}2$	1	$2{,}2+0{,}2=2{,}4$
2	$-3{,}5$	$2-0{,}7=1{,}3$	1,5	$1{,}3+0{,}3=1{,}6$	$-1{,}5$	$-1{,}6-0{,}3=1{,}3$
$\Sigma\lvert\Delta z_i\rvert$	4,5		1,5		2,5	
g	0		5,8		3,6	

i	Δz_i^4	λ_i^5	Δz_i^5
1	0	$2{,}4+0=2{,}4$	$0\leqslant 0{,}1$
2	1,5	$1{,}3+0{,}3=1{,}6$	$0\leqslant 0{,}1$
$\Sigma\lvert\Delta z_i\rvert$	1,5		0
g	5,8		3,6

4. 2. Mittelineaarsete tehnoloogiliste funktsioonidega ülesanne. Eeldame, et tootmisüksuste tehnoloogilised funktsioonid on mittelineaarsed. Niisiis, üksuse rakendamisintensiivsuse muutmisel muutub tema majandusstruktuur (vähemalt üks koordinaat) mittelineaarselt. Esitatud tehnoloogiline funktsioon võimaldab kirjeldada sellist tootmist, kus toodangu väikese mahu korral on erikulud suhteliselt suured, toodangu mahu suurenemisel nad vähenevad ja suurenevad siis jälle. Eeldame, et iga üksuse rakendamisintensiivsus on tõkestatud alt ja ülevalt. Alumine, loomulik tõke, null, esineb alati. Ülemise tõkke sisulisel puudumisel kasutame küllalt suurt fiktiivset tõket. Eeldatakse, et igal tootmisüksusel võib olla mitu alternatiivset tehnoloogiat.

Süsteemi majandusstruktuur, nagu juba eespool märkisime, on üksuste majandusstruktuuride summa. Eeldame, et tal on olemas alumine tõke, s. t. süsteem ei või välja lasta vähem või tarbida rohkem etteantud kogusest.

Ülesandes maksimiseeritakse süsteemi vaba majandusstruktuuri efekt välishindades. Eeldame, et iga vahendi välishind on tema väljundi kahanev funktsioon (mida rohkem vahendit väljutada, seda odavamaks ta läheb ja vastupidi).

Süsteemi dünaamilisel käsitlemisel (mitme intervalli jooksul) tähistame füüsiliselt sama üksust erinevates intervallides erinevate üksustena. Sellega on võimalik üksuse rakendusintensiivsust plaaniperioodi intervalliks varieerida.

4. 2. 1. Ülesanne matemaatiliselt. Olgu vahendi ja jaotava üksuse indeks $i \in \{1, \ldots, m\} = M$ ja tootmisüksuse indeks $j \in \{m+1, \ldots, n\} = N$. Tähistame jaotava üksuse i rakendusintensiivsuse w_i, $i \in M$, ja tootmisüksuse j rakendusintensiivsuse x_j, $j \in N$. Vastavalt eeldusele on mõlemad suurused tõkestatud: $0 \leqslant w_i \leqslant \bar{w}_i$ ja $0 \leqslant \underline{x}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{x}_j$.

Iga tootmisüksus j omab l_j alternatiivset tehnoloogiat indeksiga $s \in \{1, \ldots, l_j\} = N_j$. Ühe alternatiivse tehnoloogia rakendamisel langeb hulgast N_j ära võimalus rakendada mõnda teist.

Eeldame, et üksuse j tehnoloogia s puhul on tehnoloogilise funktsiooni koordinaadi i väärtus ruutfunktsioon:

$$z_{ijs}(x_{js}) = \begin{cases} \hat{a}_{ijs} + \check{a}_{ijs}x_{js} + \tilde{a}_{ijs}x_{js}^2, & \text{kui } x_{js} > 0 \\ 0, & \text{kui } x_{js} = 0, \end{cases}$$

kus parameetrite a väärtused on antud.

Olgu tootmissüsteemi majandusstruktuuri koordinaadi i alumise tõkke väärtus $\underline{z}_i$. Nüüd peab lahend w_i, x_j rahuldama järgmist tasakaalutingimust:

$$\underline{z}_i + w_i - \sum_{j\in N}\sum_{s\in N_j}\left\{\begin{matrix} \hat{a}_{ijs} + \check{a}_{ijs}x_{js} + \tilde{a}_{ijs}x_{js}^2, & \text{kui } x_{js} > 0 \\ 0 \quad , & \text{kui } x_{js} = 0 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ülesande sihifunktsiooniks valime samuti ruutfunktsiooni

$$g = \sum_{i\in M} g_i(w_i) = \sum_{i\in M} (\hat{c}_i + \check{c}_i w_i)\, w_i,$$

kus teisendatud välishind $c = \hat{c}_i + \check{c}_i w_i$. Parameetrite $\hat{c}_i$ ja $\check{c}_i$ väärtused on antud.

Dünaamilise ülesande korral, kus süsteemi käitumist vaadeldakse otsustusperioodi $\Omega = \{1, \ldots, \omega\}$ intervallide lõikes, tuleb süsteemi iga parameeter varustada veel ühe indeksiga: $\tau \in \Omega$.

Lineaarse sihifunktsiooni $c = \hat{c}_i$ korral on ülesanne ainult siis lahendatav, kui $w_i = \begin{cases} 0 \\ \bar{\bar{w}}_i \end{cases}$, kus $\bar{\bar{w}}_i = \text{const}$.

4. 2. 2. Algoritmi elemendid. Selles ülesandes on üksuste Lagrange'i funktsioonid

$$L_i(w_i) = \hat{c}_i w_i + \check{c}_i w_i^2 - \lambda_i w_i,$$
$$L_{js}(x_{js}) = \sum_{i\in M} \lambda_i\,(\hat{a}_{ijs} + \check{a}_{ijs}x_{js} + \tilde{a}_{ijs}x_{js}^2),$$

kui $x_{js} > 0$, ja 0, kui $x_{js} = 0$.

Tundmatu w_i väärtuse määramiseks lähtume tingimusest $\dfrac{dL_i(w_i)}{dw_i} = 0$, millest saame w_i esialgse optimaalse väärtuse

$$w_{i1} = \frac{\lambda_j - \hat{c}_i}{2\check{c}_i}.$$

Arvestame tõkkeid ja asjaolu, et $L_i(0) = 0$, saame reegli

$$w_i = \begin{cases} \bar{w}_i, & \text{kui} \quad w_{i1} > \bar{w}_i \quad \text{ja} \quad L_i(w_{i1}) \geqslant 0, \\ w_{i1}, & \text{kui} \quad 0 \leqslant w_{i1} \leqslant \bar{w}_i \quad \text{ja} \quad L_i(w_{i1}) \geqslant 0, \\ 0, & \text{kui eelmised ei kehti.} \end{cases}$$

Tundmatu x_{js} väärtuse leidmiseks lähtume eeldusest, et $L_{js}(x_{js})$ on nõgus*, ning nüüd saame tingimusest $\dfrac{dL_{js}(x_{js})}{dx_{js}} = 0$

$$x_{js}^* = -\sum_{i\in M} \lambda_i \check{a}_{ijs} / 2 \sum_{i\in M} \lambda_i \tilde{a}_{ijs}.$$

Arvestades tõkkeid, leiame

$$x_{js}^0 = \begin{cases} x_{js}^*, & \text{kui} \quad \underline{x}_j \leqslant x_{js}^* \leqslant \bar{x}_j, \\ \bar{x}_j, & \text{kui} \quad x_{js}^* > \bar{x}_j, \\ \underline{x}_j, & \text{kui} \quad x_{js}^* < \underline{x}_j. \end{cases}$$

* L_{js} nõgusus nõuab, et liikmed $\hat{a}_{ijs} + \check{a}_{ijs}x_{js} + \tilde{a}_{ijs}x_{js}^2$, $i \in M$ oleksid nõgusad funktsioonid, mis sisuliselt tähendab seda, et väga väikese või väga suure intensiivsusega ei ole efektiivne töötada. Formaalselt saab seda väljendada negatiivse $\tilde{a}_{ijs}$ kasutamisega.

Saadud x_{js} väärtus on alternatiivi js optimumkoht. Valime selle alternatiivi, millel $\overset{0}{L}_{js}$ on maksimaalne. Saame optimaalse x_{js} leidmiseks eeskirja

$$x_{js} = \begin{cases} 0, & \text{kui } \overset{0}{L}_{js} < \overset{0}{L}_{jk} \quad (k=1, \ldots, l_j;\ k \neq s), \\ 0, & \text{kui } \overset{0}{L}_{js} < 0 \text{ ja } \underline{x}_j = 0, \\ \overset{0}{\underline{x}}_{js}, & \text{kui eelmised ei kehti.} \end{cases}$$

Selgitame lahenduskäiku järgmise näitega.

Näide 2. Olgu kaks vahendit $i=1{,}2$ ning kaks tootmisüksust $j=3{,}4$ ilma alternatiivsete tehnoloogiateta. Olgu üksuse $j=3$ tehnoloogiline funktsioon $z_3 = (x_3, -x_3^2)$ ja üksuse $j=4$ tehnoloogiline funktsioon

$$z_4 = \left(x_4, -\begin{Bmatrix} 0{,}5+0{,}1x_4^2, & x_4>0 \\ 0 \quad , & x_4=0 \end{Bmatrix}\right).$$

Sihifunktsiooni moodustamiseks kasutame taandatud välishindu $c_1 = 2 - 0{,}1w_1$ ja $c_2 = 2 - 0{,}1w_2$.

Süsteemi tõkked olgu $\underline{z}_1 = 3$ ja $\underline{z}_2 = -5$.

Koondkujul saame ülesande

$$\max_{w_i, x_j} \left\{ \begin{array}{l|l} 2(w_1+w_2) - & -w_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ -0{,}1\,(w_1^2+w_2^2) & -w_2 - x_3^2 - \begin{Bmatrix} 0{,}5+0{,}1x_4^2, & x_4>0 \\ 0 \quad , & x_4=0 \end{Bmatrix} = -5 \end{array} \right\}$$

Ülesande lahendamisel kasutame kahte tabelit. Tabelis 3 arvutame w_i^k ja x_j^k, tabelis 4 — λ^{k+1}.

Enne lahendamisele asumist valime

1) $\lambda_1^1,\ \lambda_2^1 = 2{,}0$;

2) $\gamma_1^1 = \gamma_2^1 = 0{,}2$ $\quad (\gamma_i^{k>1}$ valime vastavalt lahenduskäigule);

3) $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = 0{,}04$.

Tabelist näeme, et kui $k=7$, on täpsus küllaldane. Samuti näeme, et esimesel sammul oli otstarbekas kasutada suhteliselt suuremat γ_i väärtust, edasi oli otstarbekas töötada väiksema väärtusega. Lahendi edasine täpsustamine aga nõuaks γ_i väärtuse uut suurendamist.

Tabel 3

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$w_1^k = \dfrac{\lambda_1^k - 2}{-0{,}2}$	0	2,50	2,25	2,35	2,40	2,35	2,30
$w_2^k = \dfrac{\lambda_2^k - 2}{-0{,}2}$	0	1,75	2,15	2,30	2,05	2,00	2,00
$x_3^k = -\dfrac{\lambda_1^k}{-2\lambda_2^k}$	0,50	0,455	0,494	0,497	0,478	0,478	0,481
$x_4^k = -\dfrac{\lambda_1^k}{-0{,}2\lambda_2^k}$	5,00	4,550	4,940	4,965	4,780	4,780	4,810

Tabel 4

	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	Δz_i^1	λ_i^2	Δz_i^2	λ_i^3	Δz_i^3	λ_i^4	Δz_i^4	λ_i^5	Δz_i^5	λ_i^6
$i=1$	−2,50	−1,50	0,495	1,55	−0,184	1,53	−0,112	1,52	0,140	1,53
$i=2$	−1,75	1,65	−0,470	1,57	0,334	1,54	0,500	1,59	0,058	1,60
$\Sigma \lvert \Delta z_i \rvert$	4,25		0,965		0,518		0,612		0,198	
g	0		7,57		7,8		8,2		7,9	

	$k=6$		$k=7$	
	Δz_i^6	λ_i^7	Δz_i^7	
$i=1$	0,100	1,54	0,010	0,04
$i=2$	0,010	1,60	0,040	0,04
$\Sigma \lvert \Delta z_i \rvert$	0,110		0,050	
g	7,7		7,7	

KIRJANDUS

1. H. Everett III, Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources. Opns. Res., 3, 1963.
2. L. Lasdon, J. Schoeffler, Decentralized Plant Control. ISA Transactions, 5, 1966.
3. S. Kaplan, Solution of the Lorie-Savage and Similar Integer Programming Problems by the Generalized Lagrange Multiplier Method. Opns. Res., 6, 1966.
4. J. Pearson, Decomposition, Coordination and Multilevel Systems. IEEE Trans. Syst. Sci. and Cybernet., 1, 1966.
5. С. Дрейфус, М. Фреймер, Новых подход к теории двойственности математического программирования. В кн.: Р. Беллман, С. Дрейфус, Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.
6. D. K. Bose, Dynamic programming for decentralized planning. Indian Econ. J., **13**, No. 3, 1966.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
17. VII 1967

Ю. ЭННУСТЕ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ЛАГРАНЖА

Резюме

В математической теории о производстве способ неопределенных множителей Лагранжа явно недооценивался и поэтому отношение к нему необходимо пересмотреть. На это было обращено внимание уже в нескольких трудах [1, 2, 3], где рассматривались задачи, в которых целевая функция системы является суммой $\sum_{j=1}^{j=n} g_j(x_j)$ целевых функций $g_j(x_j)$, приданных ее элементам $j=1, \ldots, n$. В настоящей работе подвергается исследованию более общая задача с целевой функцией системы $\sum_{i=1}^{i=m} f_i(z_i(x_1, \ldots, x_n))$, экономическое содержание которой глубже.

Изложенный метод применим для решения различных задач, которые представляют собой частные случаи общей задачи вогнутого программирования с нелинейной системой ограничений. Этот метод применен автором для мануального решения задач цело-

численного планирования с квадратно-целевой функцией, задач т. п. типа Лори-Савиджа и задач с нелинейными технологическими функциями.

Ко времени представления статьи для последнего типа задач была составлена программа на языке MALGOL, а для решения целочисленных крупноразмерных задач с нелинейными целевыми функциями составлялась программа для ЭВМ Урал-4.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/VII 1967

Ü. ENNUSTE

SOLVING THE OPTIMUM TASK OF THE PRODUCTION SYSTEMS BY DECOMPOSED LAGRANGE MULTIPLIER METHOD

Summary

The application of the decomposed Lagrange multiplier method has obviously been underestimated. The above question has been quoted in several works [1, 2, 3], but only in connection with the tasks in which the objective function has the form $\sum_{j=1}^{j=n} g_j(x_j)$, where $g_j(x_j)$ is the objective function of element $j = 1, \ldots, n$.

This paper deals with a more general optimum task, in which the objective function of the system has the form $\sum_{i=1}^{i=m} f_i(z_i(x))$, where z_i is the input or output of the system $i = 1, \ldots, m$ and the vector $x = (x_j)$, $j = 1, \ldots, n$ — the plan of the system.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
July 17, 1967