EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1968, Nr. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1968.1.01

Ü. ENNUSTE

DISKONTEERIMISPROBLEEMIDEST TOOTMISSÜSTEEMIDE OPTIMAALSEL ARENDAMISEL

Tootmissüsteemide optimaalsel arendamisel sõltuvad vahendite väärtused ja nende mõju sihifunktsiooni väärtusele suurel määral sellest, millal neid on võimalik saada. Seejuures tekib vajadus eri aegadel saadavaid, s. o. ajaliselt erinimelisi vahendeid teisendada ajaliselt samanimelisteks ning võrreldavaiks. Diskonteerimise käsitlemisel püütakse käesolevas eristada tootmissüsteemisisest ja -välist diskonteerimist ning teha mõningad siit tulenevad järeldused. Selleks esitatakse tootmissüsteemi optimaalse arendamise ülesanne, mis on järgneva analüüsi aluseks.

Diskonteerimine

Diskonteerimist mõistetakse käesolevas G. Debreu kohaselt [1]. Olgu ajad $\varkappa$ ja θ valitud niiviisi, et $\varkappa < \theta$, s. t. $\varkappa$ on varem kui θ. Olgu i vahend, mille koguse tähistame sümboliga y_i. Kui y_i on saadav ajal $\varkappa$, siis märgime selle sümboliga $y_{i\varkappa}$, kui aga y_i on saadav hetkel θ, siis tähisega $y_{i\theta}$. Nagu öeldud, ei ole $y_{i\varkappa}$ ja $y_{i\theta}$ samanimelised. Viimase saavutamiseks defineerime võrdusega

$$y_{i\varkappa} = \beta^i_{\theta\varkappa} y_{i\theta}$$

d i s k o n t e e r i m i s k o r d a j a $\beta^i_{\theta\varkappa}$, mida loeme järgmiselt: vahend y_i ajast θ on diskonteeritud aega $\varkappa$. Tegur $\beta^i_{\theta\varkappa}$ näitab, mitu ühikut vahendit i on ajal $\varkappa$ samaväärne sama vahendi ühikuga ajal θ.

K e s k m i s e d i s k o n t o m ä ä r a $d^i_{\theta\varkappa}$ defineerime järgmiselt:

$$\beta^i_{\theta\varkappa} = (1 - d^i_{\theta\varkappa})^{\theta-\varkappa},$$

kus $d^i_{\theta\varkappa}$ on ajavahemiku $\theta - \varkappa$ keskmine. Erijuhul, kui $\theta = \varkappa + 1$, saame diskontomäära ajaühiku kohta hetkel $\varkappa$:

$$\beta^i_{\varkappa+1,\,\varkappa} = 1 - d^i_{\varkappa+1,\,\varkappa}.$$

Arusaadavalt

$$\beta^i_{\theta\varkappa} = \prod_{\gamma=\varkappa}^{\theta-1} (1 - d^i_{\gamma+1,\,\gamma}).$$

Tootmissüsteemi mudel

Vaatleme tootmissüsteemi ajavahemikus Ω, mis on omakorda jaotatud ω intervalliks. Intervalli määrab indeks $\tau \in \Omega = \{1, \ldots, \omega\}$. Tähistame süsteemi tootmisstruktuuri vaadeldavas ajavahemikus vektoriga $x = (x_1, \ldots, x_\omega)$, milles $x_\tau = (x_1^\tau, \ldots, x_n^\tau)$ on tootmisstruktuur intervallis τ. Igas intervallis jäägu tootmisüksuste hulk N samaks ja sisaldagu n elementi jooksva indeksiga j; $j \in N = \{1, \ldots, n\}$. Tähistame süsteemi majandusstruktuuri (vahendite sisend- ja väljundvoogude vektori) $z = (z_1, \ldots, z_\omega)$, kus $z_\tau = (z_{1\tau}, \ldots, z_{m\tau})$ on süsteemi majandusstruktuur intervallis τ ja $z_{i\tau}$ on vara i $\left\{\begin{matrix}\text{väljalase}\\ \text{tarbimine}\end{matrix}\right\}$ süsteemi poolt $\left\{\begin{matrix} z_{i\tau} > 0 \\ z_{i\tau} \leqslant 0\end{matrix}\right\}$. Olgu vahendite hulk M kõigil intervallidel $\tau \in \Omega$ sama ja vahendi jooksev indeks $i \in M = \{1, \ldots, m\}$.

Olgu tootmissüsteemi majandusstruktuurile seatud tõke $\underline{z}$ nii, et $z \geqslant \underline{z}$, s. o. süsteem peab vahendit i intervallis τ $\left\{\begin{matrix}\text{välja laskma mitte vähem}\\ \text{tarbima mitte rohkem}\end{matrix}\right\}$ kui $\underline{z}_i$, $\left\{\begin{matrix} \underline{z}_i > 0 \\ \underline{z}_i \leqslant 0\end{matrix}\right\}$.

Olgu süsteemi majandus- ja tootmisstruktuur seotud operaatoriga o ja kogu süsteemi mudel

$$z = ox.$$

Seda mudelit mõistetakse järgnevas nii, et vahendite hulk M sisaldab ka tootmisvahendid ning leidub vähemalt üks tootmisüksus j, mis tootmisvahendit i toodab. Seega on tegemist tootmissüsteemi arengu mudeliga.

Eeldame, et süsteemi arendamiskriteeriumi modelleerib sihifunktsioon w, mida rakendatakse süsteemi majandusstruktuuri $w = w(z)$ suhtes.

Nüüd saame kirjutada tootmissüsteemi arendamise optimumülesande

$$\max_x \{w(z) \mid ox = z \geqslant \underline{z}\}. \tag{1}$$

Süsteemisisene diskonteerimine

Optimumülesandes (1) esineb sama vahend $i \in M$ eri aegadel, s. o. $\tau \in \Omega$, kujutades vektori z ajaliselt erinimelisi koordinaate $z_{i\tau}$. Vektor z on nii ülesande sihifunktsiooni argumendiks kui ka süsteemi tasakaaluvõrrandi otsitavaks ($z \geqslant \underline{z}$). Mõlemal juhul on vektoriga z seotud vahendi i ajas erinimeliste väärtuste diskonteerimisprobleem.

Vahendite diskonteerimist süsteemi sihifunktsioonis nimetame *süsteemiväliseks diskonteerimiseks* ja vastava diskonteerimiskordaja tähistame $\hat{\beta}^i_{\theta\varkappa}$; θ, $\varkappa \in \Omega$. Eeldame, et sihifunktsioon avaldub kujul

$$w = \sum_{\tau=1}^{\omega} \sum_{i=1}^{m} \hat{\beta}^i_{\tau 1} c_{i\tau} z_{i\tau},$$

kus $c_{i\tau}$ on vahendi i hind intervallis τ (kordaja, mis muudab ajal τ erinimelised vahendid samanimelisteks). Eeldatud sihifunktsioonis tähistab diskontotegur $\hat{\beta}^i_{\tau 1}$ seda, et vahend i intervallis τ diskonteeritakse intervalli 1. Ilmselt $\hat{\beta}^i_{11} = 1$. Esialgu eeldame, et $\hat{\beta}^i_{\tau 1}$ on antud ja käsitleme probleemi, mida nimetame *süsteemisiseseks diskonteerimiseks*.

Kui tootmissüsteemi optimaalne arendamine toimub tsentraalse juhtimissüsteemi poolt (näit. matemaatilise programmeerimise meetodil), siis ei teki mingeid lisaprobleeme. Kui aga optimaalne arendamine toimub detsentraliseeritud juhtimissüsteemis, vajab nn. sisemine diskonteerimisprobleem lahendamist.

Detsentraliseeritud juhtimissüsteemi puhul leitakse süsteemi sihifunktsiooni maksimiseeriv tootmisstruktuur x^* lokaalsetes juhtimissüsteemides, mis töötavad välja optimaalsed lokaalsed tootmisstruktuurid $x_j^* = (x_{j1}^*, \ldots, x_{j\omega}^*)$. Lokaalsete optimumstruktuuride määramisel on kriteeriumiks lokaalse kasumi w_j maksimum, kusjuures lokaalse süsteemi majandusstruktuuri hindamine toimub nn. sisemistes hindades [2,3]:

$$w_j = \sum_{\tau=1}^{\omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i\tau} z_{ij\tau},$$

kus $\lambda_{i\tau}$ on vahendi i sisemine hind ehk optimumhind intervallis τ. Optimumhind defineeritakse järgmiselt:

$$\lambda_{i\tau} = \frac{\partial(\max w)}{\partial z_{i\tau}}. \tag{2}$$

Optimumhindade $\lambda_{i\tau}$ väljatöötamine detsentraliseeritud juhtimissüsteemis toimub iteratsioonimeetodil, s. t. plaani muutmine muudab ka hindu. Kuid suurte tootmissüsteemide korral võib süsteemi optimumhinda λ teatava täpsusega rakendada otseselt selliste projektide efektiivsuse hindamiseks, mis süsteemi plaani oluliselt ei mõjuta (väiksemad projektid) [4].

Optimumhind $\lambda_{i\tau}$ on ilmselt järgmiste argumentide funktsioon:

$$\lambda_{i\tau} = \lambda_{i\tau}(\hat{\beta}, c, o), \tag{3}$$

kus $\hat{\beta}$ on väline diskonteerimissüsteem, c on väline hinnasüsteem ja o on tootmissüsteemi tehnoloogiat kirjeldav operaator. Suuremõõtmeliste tootmissüsteemide korral ei ole võimalik seost (3) analüütiliselt avaldada, kuid $\lambda_{i\tau}$ arvväärtusi on võimalik leida. Kasutades $\lambda_{i\tau}$ arvväärtusi, võime konkreetse ülesande korral varade sisemise diskonteerimisteguri defineerida järgmiselt:

$$\check{\beta}^i_{\theta\varkappa} = \frac{\lambda_{i\theta}}{\lambda_{i\varkappa}},$$

vastav keskmine diskontomäär $\check{d}^i_{\theta\varkappa}$ on aga arvutatav võrdusest

$$\check{\beta}^i_{\theta\varkappa} = (1 - \check{d}^i_{\theta\varkappa})^{\theta-\varkappa}. \tag{4}$$

Eeldades, et $\check{d}^i_{\theta\varkappa}$ väärtus on lõigu $[\theta, \varkappa]$ asendamisel lõiguga $[\varrho, \sigma]$ indiferentne, saab teda rakendada uute diskontotegurite tuletamiseks:

$$\check{\beta}_{\varrho\sigma} = (1 - \check{d}^i_{\theta\varkappa})^{\varrho-\sigma}. \tag{5}$$

Avaldises (5) tehtud vea suunda on küllaltki raske hinnata ja seda saab teha ainult konkreetse ülesande najal, jälgides $\lambda_{i\tau}$ muutusi sõltuvalt τ muutusest. Võrduse (3) uurimine ei ole üldjuhul võimalik.

Süsteemiväline diskonteerimine

Optimaalse arendamise sihifunktsiooni konstrueerimisel tuleb möödapääsmatult määrata väliste diskonteerimiskordajate $\hat{\beta}^i_{\theta 1}$, $(i \in M,\ \theta \in \Omega)$ arvväärtused. Kui optimiseeritav süsteem on vaadeldav mingi suurema, kuid kvaliteedilt samaväärse tootmissüsteemi alamsüsteemina, siis peab toimuma $\hat{\beta}^i_{\theta 1}$ määramine põhimõttel, et alamsüsteemivälised diskonteerimiskordajad võrduksid ülemsüsteemisiseste diskonteerimiskordajatega. Juhul, kui alamsüsteemile perioodi Ω kõigi intervallide kohta ei ole ülemsüsteemi poolt antud diskontokordajaid, saab puuduvad kordajad teatava ligikaudsusega leida valemi (5) abil.

Kuid sageli puudub ülalkirjeldatud võimalus. Näiteks siis, kui antud süsteemile vastava ülemsüsteemi raamides ei toimu diskonteerimisprobleemide lahendamist kvantitatiivsel kujul ja uuritava süsteemi juhtimine on senini toimunud mitteformaalsete meetoditega. Ka sellisel juhul muidugi toimus väline diskonteerimine, kuid ilmutamata kujul ja intuitiivsel tasemel. Sel puhul pakub huvi niisuguse sofistliku diskonteerimissüsteemi uurimine, et selgitada rakendatud diskonteerimistegurite kvantitatiivseid väärtusi. Üks võimalikke teid selle ülesande lahendamiseks oleks järgmine.

Eeldame, et tootmissüsteemi arendamine on siiski toimunud optimaalselt, s. t. w oli maksimaalne. Eeldame, et w sõltus välisest diskonteerimissüsteemist $\hat{\beta}$ ja mingist juhtimisparameetrist k. Eeldame samuti, et $\hat{\beta}$ oli juhtijatele teada, kuid k oli reguleeritav. Seega lahendati ülesanne

$$\max_k w(\hat{\beta}, k)$$

ja järelikult

$$\frac{\partial w(\hat{\beta}, k)}{\partial k} = 0. \tag{6}$$

Kuna me eeldame, et juhtimine toimus optimaalselt ja optimaalne juhtimine k^* on teada (statistikast), siis jääb võrrandis (6) otsitavaks $\hat{\beta}$, mis peab seda võrrandit rahuldama:

$$\left.\frac{\partial w(\hat{\beta}, k)}{\partial k}\right|_{k^*} = 0. \tag{7}$$

Sellest võrrandist avaldame $\hat{\beta}$ väärtuse.

Tuleb märkida, et võrrandist (7) on $\hat{\beta}$ väärtust võimalik leida ainult kõige triviaalsemate mudelite korral. Vähegi keerukama mudeli puhul tekivad matemaatilised raskused.

N ä i d e 1. Vaatleme tootmissüsteemi diskreetses ajas $\tau \in \Omega = (1, \ldots, w)$. Tähistame süsteemi muutujad (skalaarid):

R — kogutoodang,
Y — lõpptoodang,
F — tootmisfondide varu ja
I — investeeringud, mille viivitusaeg on 1.

Olgu muutujatevahelised seosed järgmised:

$$R_\tau = rF_\tau,$$

kus r on fondi tootlikkus;

$$I_\tau = kR_\tau,$$

kus k on koefitsient $(0 < k < 1)$.

Kui põhivahendite väljalangemist ei arvestata, siis

$$F_\tau = F_{\tau-1} + I_{\tau-1}.$$

Kolme viimase võrrandi järgi

$$F_\tau = F_{\tau-1} + kR_{\tau-1} = F_{\tau-1} + krF_{\tau-1} = (1 + kr)F_{\tau-1},$$

millest nähtub, et antud F_0 puhul $F_\tau = (1 + kr)^\tau F_0$.

Eeldame, et

$$Y_\tau = R_\tau - I_\tau$$

ja leiame

$$Y_\tau = R_\tau - kR_\tau = (1 - k)R_\tau = r(1 - k)(1 + kr)^\tau F_0.$$

Olgu arendamise sihifunktsioon

$$w = \sum_{\tau=1}^{\omega} Y_\tau (1-d)^\tau \to \max,$$

kus $d = \text{const} \in (0, 1)$. Tähistame $1 - d = \hat{\beta}$ ja nimetame ta keskmiseks diskonteerimiskordajaks. Seega

$$w = \sum_{\tau=1}^{\omega} Y_\tau \hat{\beta}^\tau \to \max.$$

Asendame Y_τ eespool tuletatud võrdusest, saame

$$\max_k w = \sum_{\tau=1}^{\omega}{}' \hat{\beta}^\tau r (1-k)(1+kr)^\tau F_0.$$

Järelikult

$$\frac{dw}{dk} = rF_0 \sum_{\tau=1}^{\omega} \hat{\beta}^\tau (1+kr)^{\tau-1} [r\tau(1-k) - (1+kr)] = 0,$$

milles $rF_0 \neq 0$. Seega

$$\sum \hat{\beta}^\tau (1+kr)^{\tau-1} [r\tau(1-k) - (1+kr)] = 0.$$

Optimaalse k^* korral, mida teame, peab seda võrdust rahuldama kordaja $\hat{\beta}$ väärtus. Antud k ja r väärtuste korral on $\hat{\beta}$ leitav viimase polünoomi nullkohana vahemikust $0 < \hat{\beta} < 1$.

KIRJANDUST

1. G. Debreu, Theory of Value. New York, Wiley, 1959.
2. S. Lasdon, J. Schoeffler, Decentralized Plant Control. ISA Transactions: 5, 1966.
3. H. Everett, Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources. Operations Research, Vol. 11, Nr. 3, 1963.
4. А. Лурье, Абстрактная модель оптимального хозяйственного процесса и о. о. оценки. Экономика и математические методы, № 1, 1966.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
17. VII 1967

Ю. ЭННУСТЕ

О ПРОБЛЕМАХ ДИСКОНТИРОВАНИЯ ПРИ РАЗВИТИИ ПРОИЗВОДСТВА

Резюме

В статье различаются два вида дисконтирования: внутреннее и наружное. Множитель внутреннего дисконтирования блага i из времени θ ко времени $\varkappa$ определяется следующим образом:

$$\beta^i_{\varkappa\theta} = \frac{\lambda_{i\theta}}{\lambda_{i\varkappa}},$$

где $\lambda_{i\theta}$ и $\lambda_{i\varkappa}$ — дуальные решения прямой задачи оптимизации развития производства для блага i во временах θ и $\varkappa$.

Наружным называется дисконтирование $\hat{\beta}$, положенное в целевую функцию задачи оптимального развития производства. В статье предлагается метод для определения статистического множителя наружного дисконтирования.

Предполагается, что управление системой было оптимальным и, следовательно,

$$\frac{\partial w(k, \hat{\beta})}{\partial k} = 0,$$

где w — целевая функция, k — параметр управления.

Из статистики можно найти оптимальное значение k^* и теперь из

$$\left. \frac{\partial w(k, \hat{\beta})}{\partial k} \right|_{k^*} = 0$$

найдем $\hat{\beta}$.

Приводится пример.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/VII 1967

Ü. ENNUSTE

ON DISCOUNTING PROBLEMS IN THE OPTIMUM DEVELOPMENT OF PRODUCTION SYSTEMS

Summary

In the optimum development of production systems, the values of commodities (their effect on the value of the objective function) depend on the availability of the commodities concerned. There often arises a necessity of transforming commodities available at different moments (i. e. commodities differing in the time of availability) to commodities available at the same moment for the purpose of comparison (from the viewpoint of a given objective function). Here, it has been tried to differentiate between the concepts of internal and external discounting in production systems, and to draw some inferences therefrom.

The term discounting should be understood as follows [1]. Let there be two moments $\varkappa$ and θ, where $\varkappa < \theta$, i.e. $\varkappa$ is the earlier one. Let us consider the commodity i, its quantity being denoted by y_i. If y_i is available at the moment $\varkappa$, this is denoted by $y_{i\varkappa}$, but if available at the moment θ — then by $y_{i\theta}$. As mentioned before, $y_{i\varkappa}$ and $y_{i\theta}$ are not homonymous and to achieve this we define the discount factor $\beta^i_{\theta\varkappa}$ as follows:

$$y_{i\varkappa} = \beta^i_{\theta\varkappa} y_{i\theta}.$$

Let us consider the production system during the period Ω which is divided into ω discrete intervals. The running index of the interval is $\tau \in \Omega$. We denote the production structure of the system by $x = (x_1, \ldots, x_\omega)$ where $x_\tau = (x_{1\tau}, \ldots, x_{n\tau})$ is the production structure of the system at the interval τ. The number of production units N for every interval be the same, containing elements having the running indices j; $j \in N = \{1, \ldots, n\}$. Let us denote the economic structure of the system (input-output vector of commodities) $z = (z_1, \ldots, z_\omega)$, where $z_\tau = (z_{1\tau}, \ldots, z_{m\tau})$ is the economic structure of the system at the interval τ and $z_{i\tau}$ = the system's $\left\{\begin{matrix}\text{output}\\ \text{input}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} z_{i\tau} > 0 \\ z_{i\tau} \leqslant 0\end{matrix}\right\}$ of the commodity i by the system. The commodity set M be equal for all intervals $\tau \in \Omega$ and the commodity's running index will be $i \in M = \{1, \ldots, m\}$.

Let a constraint $\underline{z}$ be applied to the economic structure of the production system so that $z \geqslant \underline{z}$.

Let an operator o be involved in the economic and production structure of the system; in this case the model of the entire system will be

$$z = ox.$$

Assuming that the development criterion of the system is modelled by the objective function of w, and applying it to the economic structure of the system

$$w = w(z),$$

we can express the task of the optimum development of the production system in this manner:

$$\max_x \{w(z) \,|\, ox = z \geqslant \underline{z}\}. \tag{1}$$

In the task (1), the same commodity $i \in M$ appears at different intervals $\tau \in \Omega$, constituting different coordinates $z_{i\tau}$, $\tau \in \Omega$ of the vector z. The latter appears in two different places of the task: firstly, as an argument of the objective function; secondly, in the balancing equation.

Discounting the commodities within the objective function of the system is called external discounting and is denoted by a corresponding discount factor $\hat{\beta}$. To begin with, we presuppose $\hat{\beta}$ to be given and deal with the problem called internal discounting.

If the task of the optimum development of the production system is being solved by a centralized control system (using a mathematical programming method), then internal discounting problems do not arise. On the other hand, if the task is subjected to solution by a decentralized control system, then the so-called problem of internal discounting requires explication.

In decentralized control systems the maximizing production structure x^* of the system's objective function is found in local control systems where local optimum production structures $x_j^* = (x_{j1}^*, \ldots, x_{j\omega}^*)$ are evolved. The determination of the local optimum structures is a criterion for the local maximum profit w_j. The evaluation of the economic structure of the local system is based on the so-called internal prices [2,3]:

$$w_j = \sum_{\tau=1}^{\omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i\tau} z_{ij\tau},$$

where $\lambda_{i\tau}$ is the internal or optimum price of the commodity i at the interval τ.

The optimum price is expressed as

$$\lambda_{i\tau} = \frac{\partial(\max w)}{\partial \underline{z}_{i\tau}}. \tag{2}$$

By using numerical values of $\lambda_{i\tau}$, in the case of a concrete task, it is possible to define the internal discount factor of commodities as follows:

$$\check{\beta}^{i}_{\theta\varkappa} = \frac{\lambda_{i\theta}}{\lambda_{i\varkappa}}.$$

In construing the objective function for the task of the optimum development of a production system, it is impossible to avoid the determination of numerical values of external discount multipliers $\hat{\beta}^{i}_{\theta 1}$ $(i \in M,\ \theta \in \Omega)$.

If considering the system to be optimized as a larger, but qualitatively equivalent subsystem of the production system, the determination of $\hat{\beta}_{\theta 1}{}^{i}$ should be approached from the standpoint that the external discount multipliers equal the internal discount multipliers of the superior system. In cases where the discount multipliers are not given for all intervals of the planning period of the subsystem, the missing multipliers may be determined approximately by means of formula (5).

However, the possibility described above is often not applicable. For instance, if within the superior system of a given subsystem the discounting problems are not solved in a quantitative form and the control of the system investigated has been effected according to nonformal methods. In such a case, external discounting was carried out, too, but implicitly and on an intuitive level. In such conditions the investigation of a sophisticated discounting system is of interest so as to determine the quantitative values of the discount factors employed. A possible way of solving this task is the one dealt with below.

Let us postulate that the production system has been developed in an optimum manner, i. e. with w at its maximum value. Further, presupposing the dependence of

w on the external discounting system $\hat{\beta}$ and on a control parameter k and assuming that $\hat{\beta}$ was known, and k regulable. Thus the problem

$$\max_k w(\hat{\beta}, k)$$

was solved and hence

$$\frac{\partial w(\hat{\beta}, k)}{\partial k} = 0. \tag{6}$$

Since we postulate that control was effected in an optimum manner and the optimum control k^* known (from statistics), then $\hat{\beta}$ in equation (6) is the unknown quantity to be found, which must satisfy the equation

$$\left.\frac{\partial w(\hat{\beta}, k)}{\partial k}\right|_{k^*} = 0 \tag{7}$$

and from this equation the value of $\hat{\beta}$ is expressed. Example.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
July 17, 1967