EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSED. 1967, Nr. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ. 1967, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1967.2.04

E. LEINEMANN

TOOTMISE TASAKAAL JA OMAHIND. IV

Töö neljas osa üldistab teises osas arendatud taastootmise teooriat sel juhul, kui põhifondid on heterogeensed ja tootmissektorisse kuulub mitu tootmisüksust. Teise ja kolmanda osa [2,3] eeskujul põhineb käsitlus töö esimeses osas [1] tuletatud tootmise tasakaaluvõrranditele

$$X_{22}\bar{E}_m + Y = X \qquad (*)$$

$$X_{22}'h + R = (\operatorname{diag} X)\; h, \qquad (**)$$

milles

X_{22} — tootmissüsteemi sisekäibemaatriks,
X — tootmissüsteemi arenemiskiirus,
Y — lõpptarbimiskiirus,
R — tootmise esmastegurite kulu kiirusvektor,
h — tootmissüsteemi-omahind,
$\bar{E}_m$ — m-mõõtmeline vektor, mille iga koordinaat on 1.

Asendanud tasakaaluvõrrandis (*) tootmissüsteemi sisekäibe võrdusest

$$X_{22} = \mathfrak{A} \operatorname{diag} X,$$

kus maatriks $\mathfrak{A}$ on *tootmissüsteemi majandustegevus*, võime veenduda, et tasakaalumudel (*) avaldub kujul

$$\mathfrak{A}X + Y = X, \qquad (***)$$

mis on tuntud Leontjevi mudeli nimetuse all. Artiklis rakendatakse tootmise tasakaaluvõrrandeid (**) ja (***) põhifondide erisuse probleemi uurimiseks. Esituse selguse huvides on seejuures piirdutud ainult põhivahendi kahe liigiga, millel on erinevad ekspluatatsiooniajad ja mille tootmisel on investeerimistegevusel eri viivitusajad. Tuletatakse valemid, mis võimaldavad neil eeldustel arvutada tootmiskiiruse soovitud kasvutempole vastava akumulatsiooninormi ja põhivahendite liikide järgi diferentseeritud fondimaksu määrad. Tootmise makrodünaamilise tasakaalumudeli üldistamisel käsitatakse tootmissüsteemi tehnilisi ja vabaparameetreid kui vektoreid ja maatrikseid, konstrueerides üldmudeli, mis on rakendatav majandusalase tegelikkuse paljudes eriolukordades. Üldmudeli ühe lihtsama erikuju järgi lahendatakse analüütiline ja poliitiline planeerimisülesanne, peatudes eriti hinnapoliitika ning tootmise kasvu ja mastaabitegurite sõltuvusel. Tootmissüsteemi-omahinna käsitlemisel näidatakse, et hinnapoliitika määrab hinnad üheselt, ning vaadeldakse lähemalt, mis tingimust peab täitma tootmissüsteemis diskontoprotsendi määr, et hinnad rahuldaksid hinnakriteeriumi ja kujutaksid omahinda majandusteaduslikus mõttes. Käsitledes elatustaseme ja elanikkonna tulu kasvu mõju tarbimisele, postuleeritakse tarbimise olenevus tarbimisfondist, mille varal uuritakse tootmiskiiruse kasvutempo ja akumulatsiooninormi sõltuvust. Artikli lõpus peatutakse lühidalt optimaalse arendamispoliitika kavandamisel, kui arendamise eesmärk on seotud tarbimisfondi maksimiseerimisega ja arendamispoliitika realiseerimisvahendiks on akumulatsiooninorm.

Taastootmise teooria põhimõistete, nagu analüütilise ja poliitilise planeerimisülesande, arendamise eesmärgi, arendamispoliitika realiseerimisvahendi jt. kasutamisel on autor tuginenud J. Tinbergeni, H. C. Bos'i ja H. B. Chenery uurimustele [4, 5, 6, 7]. Osa põhimõisteid, nagu hinnapoliitika ja hinnakriteeriumi mõiste, esineb selles töös ja selles tähenduses esmakordselt. Töö neli osa näitavad, et need mõisted on otstarbekohased ja õigustavad kasutusele võtmist. Töö kinnitab, et viljakas on ka autori väljatöötatud meetod tasakaaluvõrrandite järgi tootmiskiiruse ja omahinna uurimiseks.

1. Töö teises osas käsitletud taastootmise teooria eeldab, et eksisteerib ainult üks põhivahendite liik ekspluatatsiooniajaga T. Näitame, et põhivahendite homogeensuse tingimusest võime vajaduse korral loobuda ja kogu teooria kergesti üldistada niisugusele juhule, mis arvestab eri liiki põhivahendite olemasolu. Tähtis planeerimisülesannete klass on seotud *põhivahendite erisusega*, mille all mõistame seda, et eri tootmistegevustes kasutatakse eri põhivahendeid [6]. Käsitleme arenemise planeerimist [5, 6] kahte liiki põhivahendite korral, mida nimetame teist ja esimest liiki põhivahenditeks. Mõistame *teist liiki põhivahendite* all põhivahendeid tootmisvahendite tootmiseks, nagu näiteks masinatööstuse seadmed. *Esimest liiki põhivahendite* all mõistame põhivahendeid tarbimisvahendite tootmiseks, nagu kerge- ja toiduainete tööstuse seadmed. Interpreteerime naturaalarve 1, 2, 3, 4 ja 5 järgmiselt:

1 — teist liiki põhivahendid (näiteks tööpingid), mille varu on $\overline{K}_1$;

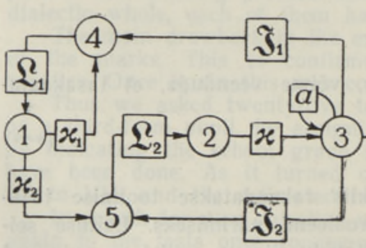
2 — esimest liiki põhivahendid (näiteks kangasteljed), mille varu on $\overline{K}_2$;

3 — tarbimisvahendite (näiteks kangaste) tootmine, mille kiirus on X;

4 — investeeringud teist liiki põhivahendite tootmiseks, mille kiirus on I_1^+;

5 — investeeringud esimest liiki põhivahendite tootmiseks, mille kiirus on I_2^+.

Esitagu tootmissüsteemi graaf



milles

$\mathfrak{I}_1$ — investeerimistegevus teist liiki põhivahendite tootmisel;

$\mathfrak{I}_2$ — investeerimistegevus esimest liiki põhivahendite tootmisel;

$\mathfrak{L}_1$ — operaator, mis teist liiki põhivahendite varuga seab vastavusse teist liiki uute põhivahendite väljundvoo I_1^+;

$\mathfrak{L}_2$ — operaator, mis esimest liiki põhivahendite varuga seab vastavusse esimest liiki uute põhivahendite väljundvoo I_2^+;

$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa$ — fondimahukusnorm teist ja esimest liiki põhivahendite ning tarbimisvahendite tootmisel;

a — tarbimisvahendite omatoodangu otsekulunorm.

Graafile vastab Leontjevi mudel (***) kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ 0 & 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \mathfrak{I}_1 & \mathfrak{I}_2 \\ \mathfrak{L}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{L}_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{K}_1 \\ \overline{K}_2 \\ X \\ I_1^+ \\ I_2^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{K}_1 \\ \overline{K}_2 \\ X \\ I_1^+ \\ I_2^+ \end{pmatrix} \qquad (1)$$

või kujul

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 I_1^+ + \varkappa_2 I_2^+ &= \overline{K}_1 \\ \varkappa X & &= \overline{K}_2 \\ &aX + \mathfrak{J}_1(I_1^+) + \mathfrak{J}_2(I_2^+) + Y &= X \\ \mathfrak{L}_1(\overline{K}_1) & &= I_1^+ \\ \mathfrak{L}_2(\overline{K}_2) & &= I_2^+, \end{aligned} \tag{1'}$$

kus Y on elanikkonna tarbimine ja eksport. Võrrandisüsteemi (1′) kahe esimese ja kahe viimase võrrandi järgi

$$\varkappa_1 \mathfrak{L}_1(\overline{K}_1) + \varkappa_2 \mathfrak{L}_2(\varkappa X) = \overline{K}_1,$$

millest

$$\overline{K}_1 = (1 - \varkappa_1 \mathfrak{L}_1)^{-1}[\varkappa_2 \mathfrak{L}_2(\varkappa X)]. \tag{2}$$

Toonud võrdusega

$$X - Y = \alpha X \tag{3}$$

mudelisse hinnapoliitika α [2, 3], leiame, et võrrandisüsteemi (1′) kolmas võrrand avaldub kujul

$$\mathfrak{J}_1 \left[\mathfrak{L}_1 \{ (1 - \varkappa_1 \mathfrak{L}_1)^{-1} [\varkappa_2 \mathfrak{L}_2(\varkappa X)] \} \right] + \mathfrak{J}_2[\mathfrak{L}_2(\varkappa X)] = (\alpha - a)X. \tag{4}$$

Eeldame, et operaatorid $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ on lineaarsed ja kommuteeruvad. Rakendame võrrandi (4) pooltele operaatorit $1 - \varkappa_1 \mathfrak{L}_1$, jätame ära sulud ja leiame, et

$$(\varkappa_2 \mathfrak{J}_1 - \varkappa_1 \mathfrak{J}_2) \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 X = \frac{\alpha - a}{\varkappa} (X - \varkappa_1 \mathfrak{L}_1 X) - \mathfrak{J}_2 \mathfrak{L}_2 X. \tag{4'}$$

Põhivahendite varu ja asendamistegevuse definitsiooni järgi [2] avalduvad operaatorid $\mathfrak{L}_1$ ja $\mathfrak{L}_2$ kujul

$$\mathfrak{L}_1 = (1 - \mathfrak{R}_1)^{-1}\mathbf{D}, \ \mathfrak{L}_2 = (1 - \mathfrak{R}_2)^{-1}\mathbf{D}, \tag{5}$$

kus $\mathfrak{R}_2$ ja $\mathfrak{R}_1$ on vastavalt esimest ja teist liiki põhivahendite asendamistegevus ning $\mathbf{D}$ tuletisoperaator. Olgu T_2 ja T_1 vastavalt esimest ja teist liiki põhivahendite ekspluatatsiooniaeg. Asendamistegevuse hüpoteesi (A_R) järgi [2] on $\mathfrak{R}_1$ ja $\mathfrak{R}_2$ sel juhul negatiivse sammuga nihkeoperaatorid:

$$\mathfrak{R}_1 = \underset{-T_1}{\mathcal{E}}, \ \mathfrak{R}_2 = \underset{-T_2}{\mathcal{E}}. \tag{6}$$

Esimest ja teist liiki põhivahendite tootmisel olgu investeerimistegevuse viivitusaeg vastavalt θ_2 ja θ_1. Investeerimistegevuse hüpoteesi (C_I) lihtsaimal erijuhul on investeerimistegevused $\mathfrak{J}_1$ ja $\mathfrak{J}_2$ siis keskväärtuse integraaloperaatorid:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} d\tau \underset{\theta_1 - \tau}{\mathcal{E}}, \qquad \mathfrak{J}_2 = \frac{1}{\theta_2} \int_0^{\theta_2} d\tau \underset{\theta_2 - \tau}{\mathcal{E}}. \tag{7}$$

Võrduste (7) järgi pole raske näha, et investeerimistegevuse ja tuletisoperaatori korrutis on keskväärtuse diferentsoperaator:

$$\mathfrak{J}_1 \mathbf{D} = \frac{1}{\theta_1} \underset{\theta_1}{\Delta}, \qquad \mathfrak{J}_2 \mathbf{D} = \frac{1}{\theta_2} \underset{\theta_2}{\Delta}. \tag{8}$$

Asendame võrrandis (4′) operaatorid $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{L}_1$ ja $\mathfrak{L}_2$ võrdustest (7), (5) ja (6). Peame silmas võrdusi (8) ja rakendame võrrandi (4′) pooltele operaatorit $(1 - \underset{-T_1}{\mathcal{E}})(1 - \underset{-T_2}{\mathcal{E}})$. Võrrand (4′) avaldub kujul

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\varkappa_2}{\theta_1}\underset{\theta_1}{\Delta}-\frac{\varkappa_1}{\theta_2}\underset{\theta_2}{\Delta}\right)\mathbf{D}X= \\
=\frac{a-a}{\varkappa}\,(1-\underset{-T_1}{\mathcal{E}}-\varkappa_1\mathbf{D})\,(1-\underset{-T_2}{\mathcal{E}})X-\frac{1}{\theta_2}\,(1-\underset{-T_1\theta_2}{\mathcal{E}})\Delta X.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Operaatorvõrrand (9) on konstantkordajatega esimest järku lineaarne homogeenne diferents-diferentsiaalvõrrand, mille karakteristlik võrrand on

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{\varkappa_2}{\theta_1}\left(e^{\omega\theta_1}-1\right)-\frac{\varkappa_1}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2}-1\right)\right]\omega= \\
=\frac{a-a}{\varkappa}\left(1-e^{-\omega T_1}-\varkappa_1\omega\right)\left(1-e^{-\omega T_2}\right)-\frac{1}{\theta_2}\left(1-e^{-\omega T_1}\right)\left(e^{\omega\theta_2}-1\right).
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Kui konjunktuuriennustamisel tuleb uurida tootmissüsteemi karakteristliku võrrandi kõiki lahendeid, eeskätt aga neid kompleksseid lahendeid, mis põhjustavad tootmiskiiruse lühiperioodilisi võnkumisi, siis planeerimisülesannete lahendamisel huvitab meid ainult karakteristliku võrrandi positiivne reaallahend, mille olemasolul on võimalik tootmise sujuv arenemine [6]. Karakteristliku võrrandi (10) positiivse reaallahendi olemasolu uurimiseks kirjutame võrrandi kujul

$$
\omega=\frac{\left[\frac{a-a}{\varkappa}\left(1-e^{-\omega T_2}\right)-\frac{1}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2}-1\right)\right]\left(1-e^{-\omega T_1}\right)}{\frac{a-a}{\varkappa}\varkappa_1\left(1-e^{-\omega T_2}\right)+\frac{\varkappa_2}{\theta_1}\left(e^{\omega\theta_1}-1\right)-\frac{\varkappa_1}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2}-1\right)}.
\tag{10'}
$$

Võrrandi (10′) parem pool $\Phi(\omega)$ kujutab kõverat, mis on ülalt tõkestatud ja läbib koordinaatide algust, — vasak pool aga sirget, mis läbib koordinaatide algust 45°-se nurga all. Et sirge ω lõikaks koordinaattasandi esimeses veerandis kõverat $\Phi(\omega)$, selleks peab koordinaatide alguses kõvera puutuja tõusunurk olema suurem kui 45° [2]:

$$
\operatorname{arctan}\Phi'(0)>45^\circ
$$

või

$$
\Phi'(0)>1.
\tag{11}
$$

Arvutanud funktsiooni $\Phi(\omega)$ tuletise punktis $\omega=0$, avaldub võrratus (11) kujul

$$
\frac{\left(\frac{a-a}{\varkappa}\,T_2-1\right)T_1}{\frac{a-a}{\varkappa}\,\varkappa_1 T_2+\varkappa_2-\varkappa_1}>1.
\tag{11'}
$$

Võrratuse (11′) lahendamisel näeme, et tootmise kriisivaba kasv on võimalik, kui

$$
a>a+\frac{\varkappa}{T_2}\left(1+\frac{\varkappa_2}{T_1-\varkappa_1}\right).
\tag{11''}
$$

Eeldame, et investeerimis- ja asendamistegevus ning tootmissüsteemi tehnilised parameetrid võimaldavad tootmise kriisivaba kasvu kujul

$$
X_t=X_0e^{\omega t},
\tag{12}
$$

ja avaldame karakteristlikust võrrandist (10) hinnapoliitika:

$$
a=a+\frac{\varkappa\left[\frac{\varkappa_2}{\theta_1}\left(e^{\omega\theta_1}-1\right)-\frac{\varkappa_1}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2}-1\right)\right]\omega+\frac{\varkappa}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2}-1\right)\left(1-e^{-\omega T_1}\right)}{\left(1-e^{-\omega T_1}-\varkappa_1\omega\right)\left(1-e^{-\omega T_2}\right)}.
\tag{13}
$$

Valemit (13) võime kasutada soovitud arenemistempot tagava hinnapoliitika kavandamiseks.

Hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi seose uurimiseks postuleerime rahvatulu jaotuse [2].

A_N. Investeerimissektori sisendvoog I^- on amortisatsiooni ja rahvatulu säästetava osa S summa:

$$I^- = F_{11}{}^+ + F_{12}{}^+ + S, \tag{14}$$

kus $F_{11}{}^+$ ja $F_{12}{}^+$ on teist ja esimest liiki põhivahendite amortisatsioon.

B_N. Rahvatulu säästetav osa on rahvatuluga $S + Y$ võrdeline:

$$S = \sigma(S + Y), \tag{15}$$

kus võrdetegur σ on akumulatsiooninorm.

Võrduse (2) ja võrrandisüsteemi (1′) teise võrrandi järgi

$$\overline{K}_1 = (1 - \varkappa_1 \mathfrak{L}_1)^{-1} \varkappa_2 \mathfrak{L}_2 (\varkappa X), \quad \overline{K}_2 = \varkappa X, \tag{16}$$

milles operaatorid $\mathfrak{L}_1$ ja $\mathfrak{L}_2$ on määratud võrdustega (5) ja (6). Peame silmas, et tootmiskiirus on võrdusega (12) antud eksponentfunktsioon, ja rakendame operaatoreid $\mathfrak{L}_2$ ja $(1 - \varkappa_1 \mathfrak{L}_1)^{-1}$. Võrduste (16) esimene võrdus avaldub kujul

$$\overline{K}_1 = \frac{\varkappa\varkappa_2 (1 - e^{-\omega T_1}) \omega}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1 \omega)(1 - e^{-\omega T_2})} X. \tag{17}$$

Võrduste (15) ja (3) järgi

$$S = \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma} X. \tag{18}$$

Olgu teist ja esimest liiki põhivahendite amortisatsiooninorm vastavalt δ_1 ja δ_2, s. t. $F_{11}{}^+ = \delta_1 \overline{K}_1$, $F_{12}{}^+ = \delta_2 \overline{K}_2$. Lähtudes võrdusest (14), saame:

$$I^- = F_{11}{}^+ + F_{12}{}^+ + S = \delta_1 \overline{K}_1 + \delta_2 \overline{K}_2 + \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma} X =$$

$$= \left[\frac{\delta_1 \varkappa\varkappa_2 (1 - e^{-\omega T_1}) \omega}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1 \omega)(1 - e^{-\omega T_2})} + \delta_2 \varkappa + \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma} \right] X.$$

Võrrandisüsteemi (1′) kolmanda võrrandi järgi leiame nüüd akumulatsiooninormi ja hinnapoliitika seose:

$$\frac{\delta_1 \varkappa\varkappa_2 (1 - e^{-\omega T_1}) \omega}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1 \omega)(1 - e^{-\omega T_2})} + \delta_2 \varkappa + \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma} = \alpha - a,$$

millest

$$\alpha = \sigma + (a + \overline{\delta}\varkappa)(1 - \sigma), \tag{19}$$

kus

$$\overline{\delta} = \frac{\delta_1 \varkappa_2 (1 - e^{-\omega T_1}) \omega}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1 \omega)(1 - e^{-\omega T_2})} + \delta_2. \tag{20}$$

Avaldanud valemist (19) akumulatsiooninormi, saame

$$\sigma = \frac{\alpha - a - \overline{\delta}\varkappa}{1 - a - \delta\varkappa}. \tag{21}$$

Valemeid (20) ja (21) kasutame hinnapoliitikale vastava akumulatsiooninormi arvutamiseks.

Ülesanne 1. Arvutame akumulatsiooninormi σ niisuguse väärtuse, mis tagaks arenemistempo $\omega = 0{,}08$, kui

teist liiki põhivahendite tootmise fondimahukusnorm $\varkappa_1 = 3$ aastat,
esimest liiki põhivahendite tootmise fondimahukusnorm $\varkappa_2 = 2$ aastat,
tarbimisvahendite tootmise fondimahukusnorm $\varkappa = 1$ aasta,
teist liiki põhivahendite ekspluatatsiooniaeg $T_1 = 20$ aastat,
esimest liiki põhivahendite ekspluatatsiooniaeg $T_2 = 15$ aastat,
investeerimistegevuse viivitusaeg teist liiki põhivahendite tootmisel $\theta_1 = 5$ aastat,
investeerimistegevuse viivitusaeg esimest liiki põhivahendite tootmisel $\theta_2 = 2$ aastat,
tarbimisvahendite omatoodangu otsekulunorm $a = 0{,}6$.

Lahendame ülesande kolmel juhul:

1) kui diskonteerimist ei arvestata,
2) kui diskontoprotsendi määr $100\varrho = 4$,
3) kui diskontoprotsendi määrab arenemistempo, s. t. $\varrho = \omega$.

Lahendus. Valemi (13) järgi arvutame hinnapoliitika väärtuse:

$$\alpha = 0{,}6 + \frac{[0{,}4(e^{0{,}4} - 1) - 1{,}5(e^{0{,}16} - 1)]\cdot 0{,}08 + 0{,}5(e^{0{,}16} - 1)(1 - e^{-1{,}6})}{(1 - e^{-1{,}6} - 0{,}24)(1 - e^{-1{,}2})} \approx$$

$$\approx 0{,}6 + \frac{(0{,}4\cdot 0{,}4918 - 1{,}5\cdot 0{,}1735)\cdot 0{,}08 + 0{,}5\cdot 0{,}1735\cdot 0{,}7981}{(0{,}7981 - 0{,}24)\cdot 0{,}6988} \approx 0{,}7644.$$

Kordaja $\bar{\delta}$ leidmiseks arvutame avaldise:

$$\frac{\varkappa_2(1 - e^{-\omega T_1})\omega}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1\omega)(1 - e^{-\omega T_2})} = \frac{2(1 - e^{-1{,}6})\cdot 0{,}08}{(1 - e^{-1{,}6} - 0{,}24)(1 - e^{-1{,}2})} \approx 0{,}3274.$$

Kui diskonteerimist ei arvestata ($\varrho = 0$), siis avalduvad amortisatsiooninormid δ_1 ja δ_2 valemitega [2]:

$$\delta_1 = 1/T_1 = 1/20 = 0{,}05, \quad \delta_2 = 1/T_2 = 1/15 \approx 0{,}0667.$$

Arvutanud valemiga (20) kordaja $\bar{\delta}$

$$\bar{\delta} \approx 0{,}3274\cdot 0{,}05 + 0{,}0667 \approx 0{,}0830,$$

võime valemi (21) järgi leida akumulatsiooninormi:

$$\sigma \approx \frac{0{,}7644 - 0{,}6 - 0{,}0830}{1 - 0{,}6 - 0{,}0830} \approx 0{,}257.$$

Kui diskontoprotsendi määr $100\varrho = 4$, siis amortisatsiooninormid

$$\delta_1 = \varrho/(1 - e^{-\varrho T_1}) = 0{,}04/(1 - e^{-0{,}8}) \approx 0{,}0726$$

$$\delta_2 = \varrho/(1 - e^{-\varrho T_2}) = 0{,}04/(1 - e^{-0{,}6}) \approx 0{,}0887$$

ja

$$\bar{\delta} \approx 0{,}3274\cdot 0{,}0726 + 0{,}0887 \approx 0{,}1124.$$

Akumulatsiooninormi vastav väärtus

$$\sigma \approx \frac{0{,}7644 - 0{,}6 - 0{,}1124}{1 - 0{,}6 - 0{,}1124} \approx 0{,}181.$$

Kui diskontoprotsendi määrab arenemistempo, s. t. $\varrho = \omega = 0{,}08$, siis amortisatsiooninormid

$$\delta_1 = 0{,}08/(1 - e^{-1{,}6}) \approx 0{,}1002, \quad \delta_2 = 0{,}08/(1 - e^{-1{,}2}) \approx 0{,}1145$$

ja

$$\bar{\delta} \approx 0{,}3274\cdot 0{,}1002 + 0{,}1145 \approx 0{,}1473.$$

Akumulatsiooninormi vastav väärtus

$$\sigma \approx \frac{0{,}7644 - 0{,}6 - 0{,}1473}{1 - 0{,}6 - 0{,}1473} \approx 0{,}068.$$

2. Lähtume tootmissüsteemi-omahinna võrrandist (**) [1] ja arvutame tootmissüsteemi (1) omahinna. Märgime teist ja esimest liiki põhivahendite fondimaksu määra tähtedega h_{E1} ja h_{E2}, tarbimisvahendite omahinna tähega h, teist ja esimest liiki põhivahendite omahinna tähtedega h_{I1} ja h_{I2}. Tarbimisvahendite ning teist ja esimest liiki põhivahendite tootmisel olgu tootmise esmastegurite (tööjõu) kulu vastavalt L, L_{I1}, L_{I2}. Tootmise esmastegurite kulu kiirusvektor ja tootmissüsteemi-omahind avalduvad siis järgmiselt:

$$\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ L \\ L_{I1} \\ L_{I2} \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{Vmatrix} h_{E1} \\ h_{E2} \\ h \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{Vmatrix}$$

ja omahinna võrrand (**) järgmiselt:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \varkappa_1 I_1^+ & \varkappa_2 I_2^+ \\ 0 & 0 & \varkappa X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aX & \mathfrak{J}_1(I_1^+) & \mathfrak{J}_2(I_2^+) \\ \mathfrak{L}_1(\bar{K}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{L}_2(\bar{K}_2) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}' \begin{Vmatrix} h_{E1} \\ h_{E2} \\ h \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ L \\ L_{I1} \\ L_{I2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \bar{K}_1 h_{E1} \\ \bar{K}_2 h_{E2} \\ Xh \\ I_1^+ h_{I1} \\ I_2^+ h_{I2} \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Korrutame võrrandi (22) pooli vasakult diagonaalmaatriksiga $(\operatorname{diag} \boldsymbol{X})^{-1}$, tähistades tootmise esmastegurite kulunormid $L/X = l$, $L_{I1}/I_1^+ = l_{I1}$, $L_{I2}/I_2^+ = l_{I2}$, ning leiame, et

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ 0 & 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dfrac{\mathfrak{J}_1(I_1^+)}{I_1^+} & \dfrac{\mathfrak{J}_2(I_2^+)}{I_2^+} \\ \dfrac{\mathfrak{L}_1(\bar{K}_1)}{\bar{K}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathfrak{L}_2(\bar{K}_2)}{\bar{K}_2} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}' \begin{Vmatrix} h_{E1} \\ h_{E2} \\ h \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ l_{I1} \\ l_{I2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h_{E1} \\ h_{E2} \\ h \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{Vmatrix}. \tag{22'}$$

Suhete $\mathfrak{L}_1(\bar{K}_1)/\bar{K}_1$ ja $\mathfrak{L}_2(\bar{K}_2)/\bar{K}_2$ arvutamisel tugineme võrdustele (5) ja (6), mille järgi leiame:

$$\mathfrak{L}_1(\bar{K}_1)/\bar{K}_1 = \omega/(1 - e^{-\omega T_1}), \quad \mathfrak{L}_2(\bar{K}_2)/\bar{K}_2 = \omega/(1 - e^{-\omega T_2}).$$

Suhete $\mathfrak{J}_1(I_1^+)/I_1^+$ ja $\mathfrak{J}_2(I_2^+)/I_2^+$ arvutamisel arvestame lihtsaimat diskonteerimishüpoteesi, mille järgi eeldatakse, et diskonteeritavatel suurustel I_1^+ ja I_2^+ on jääv kasvutempo

$$I_1^+ = I_{10}^+ e^{\varrho t}, \quad I_2^+ = I_{20}^+ e^{\varrho t},$$

kus 100ϱ on diskontoprotsendi määr [2]. Peame silmas võrdustega (7) dikteeritud investeerimistegevusi ning saame, et

$$\mathfrak{J}_1(I_1^+)/I_1^+ = (e^{\varrho\theta_1} - 1)/\varrho\theta_1, \quad \mathfrak{J}_2(I_2^+)/I_2^+ = (e^{\varrho\theta_2} - 1)/\varrho\theta_2.$$

Võrrand (22′) avaldub kujul

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ 0 & 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \frac{e^{\varrho\theta_1}-1}{\varrho\theta_1} & \frac{e^{\varrho\theta_2}-1}{\varrho\theta_2} \\ \frac{\omega}{1-e^{-\omega T_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{1-e^{-\omega T_2}} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|' \left\|\begin{matrix} h_{E1} \\ h_{E2} \\ h \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ l \\ l_{I1} \\ l_{I2} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} h_{E1} \\ h_{E2} \\ h \\ h_{I1} \\ h_{I2} \end{matrix}\right\| \tag{23}$$

või

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{1-e^{-\omega T_1}} h_{I1} &= h_{E1} \\ \frac{\omega}{1-e^{-\omega T_2}} h_{I2} &= h_{E2} \\ \varkappa h_{E2} + ah + l &= h \\ \varkappa_1 h_{E1} + \frac{e^{\varrho\theta_1}-1}{\varrho\theta_1} h + l_{I1} &= h_{I1} \\ \varkappa_2 h_{E1} + \frac{e^{\varrho\theta_2}-1}{\varrho\theta_2} h + l_{I2} &= h_{I2}, \end{aligned} \tag{23'}$$

mille lahendamisel leiame, et

$$\begin{aligned} h_{E1} &= \chi_1 \frac{\varphi_1 l + (1-a-\varkappa\varphi_2\psi_2) l_{I1} + \varkappa\varphi_1\psi_2 l_{I2}}{1-a-\varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2} \\ h_{E2} &= \psi_2 \frac{(\varkappa_2\varphi_1\chi_1+\varphi_2) l + \varkappa_2(1-a)\chi_1 l_{I1} + (1-a) l_{I2}}{1-a-\varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2} \\ h &= \frac{l + \varkappa\varkappa_2\psi_2\chi_1 l_{I1} + \varkappa\psi_2 l_{I2}}{1-a-\varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2} \\ h_{I1} &= \frac{\chi_1}{\psi_1} \frac{\varphi_1 l + (1-a-\varkappa\varphi_2\psi_2) l_{I1} + \varkappa\varphi_1\psi_2 l_{I2}}{1-a-\varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2} \\ h_{I2} &= \frac{(\varkappa_2\varphi_1\chi_1+\varphi_2) l + \varkappa_2(1-a)\chi_1 l_{I1} + (1-a) l_{I2}}{1-a-\varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2}, \end{aligned} \tag{24}$$

kus

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (e^{\varrho\theta_1}-1)/\varrho\theta_1 & \varphi_2 &= (e^{\varrho\theta_2}-1)/\varrho\theta_2 \\ \psi_1 &= \omega/(1-e^{-\omega T_1}) & \psi_2 &= \omega/(1-e^{-\omega T_2}) \\ \chi_1 &= \omega/(1-e^{-\omega T_1}-\varkappa_1\omega). \end{aligned} \tag{25}$$

Kui investeerimistegevuse viivitusaega ja põhivahendite kulumist ei arvestata, s. t. $T_1 = T_2 \to \infty$ ja $\theta_1 = \theta_2 = 0$, siis võrduste (25) järgi $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\psi_1 = \psi_2 = \omega$, $\chi_1 = \omega/(1-\varkappa_1\omega)$ ja hinnavalemid (24) lihtsustuvad:

$$h_{E1}=\omega\,\frac{l+(1-a-\varkappa\omega)l_{I1}+\varkappa\omega l_{I2}}{(1-a-\varkappa\omega)(1-\varkappa_1\omega)-\varkappa\varkappa_2\omega^2}$$

$$h_{E2}=\omega\,\frac{[1-(\varkappa_1-\varkappa_2)\omega]l+\varkappa_2(1-a)\omega l_{I1}+(1-a)(1-\varkappa_1\omega)l_{I2}}{(1-a-\varkappa\omega)(1-\varkappa_1\omega)-\varkappa\varkappa_2\omega^2}$$

$$h=\frac{(1-\varkappa_1\omega)l+\varkappa\varkappa_2\omega^2 l_{I1}+\varkappa\omega(1-\varkappa_1\omega)l_{I2}}{(1-a-\varkappa\omega)(1-\varkappa_1\omega)-\varkappa\varkappa_2\omega^2} \tag{24'}$$

$$h_{I1}=\frac{l+(1-a-\varkappa\omega)l_{I1}+\varkappa\omega l_{I2}}{(1-a-\varkappa\omega)(1-\varkappa_1\omega)-\varkappa\varkappa_2\omega^2}$$

$$h_{I2}=\frac{[1-(\varkappa_1-\varkappa_2)\omega]l+\varkappa_2(1-a)\omega l_{I1}+(1-a)(1-\varkappa_1\omega)l_{I2}}{(1-a-\varkappa\omega)(1-\varkappa_1\omega)-\varkappa\varkappa_2\omega^2}.$$

Ülesanne 2. Arvutame ülesande 1 andmete järgi teist ja esimest liiki põhivahendite fondimaksu määra, mille dikteerib arenemistempo $\omega=0{,}08$. Lahendame ülesande kolmel juhul:

1) kui diskonteerimist ei arvestata;
2) kui diskontoprotsendi määrab arenemistempo, s. t. $\varrho=\omega$;
3) kui investeerimistegevuse viivitusaega ja põhivahendite kulumist ei arvestata.

L a h e n d u s. Kui diskontoprotsenti ei arvestata, siis $\varphi_1=\varphi_2=1$ ja $\psi_1=$ $=0{,}08/(1-e^{-1{,}6})\approx 0{,}1002$, $\psi_2=0{,}08/(1-e^{-1{,}2})\approx 0{,}1145$, $\chi_1=0{,}08/(1-e^{-1{,}6}-0{,}24)\approx$ $\approx 0{,}1433$. Valemite (24) järgi leiame, et teist ja esimest liiki põhivahendite fondimaksu määr on vastavalt

$$h_{E1}\approx 0{,}567\,(l+0{,}286l_{I1}+0{,}115l_{I2})$$
$$h_{E2}\approx 0{,}453\,(1{,}287l+0{,}115l_{I1}+0{,}4l_{I2}).$$

Kui diskontoprotsendi määrab arenemistempo, s. t. $\varrho=\omega=0{,}08$, siis $\varphi_1=$ $=(e^{0{,}4}-1)/0{,}4\approx 1{,}2295$, $\varphi_2=(e^{0{,}16}-1)/0{,}16\approx 1{,}0844$ ning teist ja esimest liiki põhivahendite fondimaksu määr on vastavalt

$$h_{E1}\approx 0{,}608\,(1{,}230l+0{,}276l_{I1}+0{,}141l_{I2})$$
$$h_{E2}\approx 0{,}486\,(1{,}437l+0{,}115l_{I1}+0{,}4l_{I2}).$$

Kui investeerimistegevuse viivitusaega ja põhivahendite kulumist ei arvestata, siis valemite (24′) järgi

$$h_{E1}\approx 0{,}347\,(l+0{,}32l_{I1}+0{,}08l_{I2})$$
$$h_{E2}\approx 0{,}347\,(0{,}92l+0{,}064l_{I1}+0{,}304l_{I2}).$$

Uurime, mis tingimust peab täitma diskontoprotsendi määr, et valemitega (24) väljendatud hinnad rahuldaksid hinnakriteeriumi ja kujutaksid omahinda majandusteaduslikus mõttes [1]. Hinnapoliitika valemi (13) ja võrduste (25) järgi leiame, et

$$1-\alpha=$$
$$=1-a-\frac{\varkappa\left[\frac{\varkappa_2}{\theta_1}(e^{\omega\theta_1}-1)-\frac{\varkappa_1}{\theta_2}(e^{\omega\theta_2}-1)\right]\omega+\frac{\varkappa}{\theta_2}(e^{\omega\theta_2}-1)(1-e^{-\omega T_1})}{(1-e^{-\omega T_1}-\varkappa_1\omega)(1-e^{-\omega T_2})}=$$
$$=1-a-\varkappa(\varkappa_2\bar{\varphi}_1-\varkappa_1\bar{\varphi}_2+\bar{\varphi}_2/\psi_1)\psi_2\chi_1=$$
$$=1-a-\varkappa[\varkappa_2\bar{\varphi}_1+\bar{\varphi}_2(1/\psi_1-\varkappa_1)]\psi_2\chi_1=$$
$$=1-a-\varkappa(\varkappa_2\bar{\varphi}_1+\bar{\varphi}_2/\chi_1)\psi_2\chi_1=$$
$$=1-a-\varkappa\varkappa_2\bar{\varphi}_1\psi_2\chi_1-\varkappa\bar{\varphi}_2\psi_2, \tag{26}$$

kus

$$\bar{\varphi}_1 = (e^{\omega\theta_1} - 1)/\omega\theta_1, \quad \bar{\varphi}_2 = (e^{\omega\theta_2} - 1)/\omega\theta_2. \tag{27}$$

Peame silmas võrdusi (3), (26) ja (24) ning arvutame lõpptoodangu maksumuse omahinnas:

$$Yh = (1 - a)Xh =$$

$$= \frac{1 - a - \varkappa\varkappa_2\bar{\varphi}_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\bar{\varphi}_2\psi_2}{1 - a - \varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2}(Xl + \varkappa\varkappa_2\psi_2\chi_1 X l_{I1} + \varkappa\psi_2 X l_{I2}). \tag{28}$$

Kordajate $\varkappa\psi_2 X$ ja $\varkappa\varkappa_2\psi_2\chi_1 X$ uurimisel arvestame eeldust (12), mille põhjal tootmiskiirus on eksponentfunktsioon kujul $X = X_0 e^{\omega t}$. Võrrandisüsteemi (1′) teise ja viimase võrrandi järgi leiame, et

$$I_2^+ = \mathfrak{L}_2(\bar{K}_2) = (1 - \underset{-T_2}{\mathcal{E}})^{-1}\mathbf{D}(\varkappa X) =$$

$$= \frac{\varkappa\omega}{1 - e^{-\omega T_2}} X = \varkappa\psi_2 X.$$

Sama võrrandisüsteemi esimese ja neljanda võrrandi järgi leiame nüüd analoogilise avaldise I_1^+ jaoks:

$$I_1^+ = (1 - \varkappa_1\mathfrak{L}_1)^{-1}\mathfrak{L}_1(\varkappa_2 I_2^+) = \varkappa\varkappa_2\psi_2(1 - \varkappa_1\mathfrak{L}_1)^{-1}\mathfrak{L}_1 X = \varkappa\varkappa_2\psi_2\chi_1 X.$$

Kordajad $\varkappa\varkappa_2\psi_2\chi_1 X$ ja $\varkappa\psi_2 X$ kujutavad seega investeerimissektori väljundvoo koordinaate I_1^+ ja I_2^+ ning võrdus (28) avaldub kujul

$$Yh = \frac{1 - a - \varkappa\varkappa_2\bar{\varphi}_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\bar{\varphi}_2\psi_2}{1 - a - \varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2}(Xl + I_1^+ l_{I1} + I_2^+ l_{I2}) =$$

$$= \frac{1 - a - \varkappa\varkappa_2\bar{\varphi}_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\bar{\varphi}_2\psi_2}{1 - a - \varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2}(L + L_{I1} + L_{I2}). \tag{29}$$

Võrdusest (29) nähtub, et

$$Yh \begin{cases} < L + L_{I1} + L_{I2}, & \text{kui } \varrho < \omega \\ = L + L_{I1} + L_{I2}, & \text{kui } \varrho = \omega \\ > L + L_{I1} + L_{I2}, & \text{kui } \varrho > \omega. \end{cases} \tag{30}$$

Valemitega (24) antud tootmissüsteemi-omahind rahuldab hinnakriteeriumi ainult sel juhul, kui diskontoprotsendi määra dikteerib tootmiskiiruse kasvutempo ($\varrho = \omega$). Kui $\varrho > \omega$, siis lõpptoodangu maksumus omahinnas sisaldab kasumi, mille suurus on

$$m = Yh - (L + L_{I1} + L_{I2}) =$$

$$= \frac{\varkappa\varkappa_2(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1)\psi_2\chi_1 + \varkappa(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2)\psi_2}{1 - a - \varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2}(L + L_{I1} + L_{I2}).$$

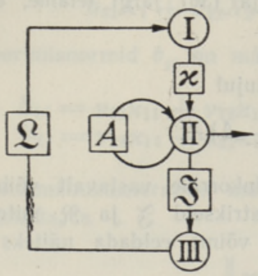
3. Üldistame töö teises osas käsitletud tootmise dünaamilist tasakaalumudelit niiviisi, et see võimaldaks peale põhivahendite eri liikide vajaduse korral arvestada erinevaid tootmis- ja investeerimistegevusi ning uurida nende koostoimet tootmiskiirusele ja hinnapoliitikale. Interpreteerime rooma numbreid I, II ja III järgmiselt:

I — põhivahendid, mille varuvektor on $\bar{K}$;

II — tootmine, mille kiirusvektor on X;

III — investeerimissektor, mille väljundvoog on I^+.

Esitagu tootmissüsteemi graaf milles tähtedega $\varkappa$, A, $\mathfrak{J}$ ja $\mathfrak{L}$ on märgitud maatriksid:



$$\varkappa = \begin{pmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \dots & \varkappa_{1m} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \dots & \varkappa_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varkappa_{k1} & \varkappa_{k2} & \dots & \varkappa_{km} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \dots & \mathfrak{J}_{1k} \\ \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \dots & \mathfrak{J}_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{J}_{m1} & \mathfrak{J}_{m2} & \dots & \mathfrak{J}_{mk} \end{pmatrix}$$

Maatriksite üldelemente $\varkappa_{ij}$, a_{ij}, $\mathfrak{J}_{ij}$, $\mathfrak{L}_j$ interpreteerime järgmiselt:

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{L}_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{L}_k \end{pmatrix}.$$

$\varkappa_{ij}$ — põhivahendite liigi i fondimahukusnorm tootmisüksuses j;

a_{ij} — tootmisüksuse i toodangu otsekulunorm tootmisüksuses j;

$\mathfrak{J}_{ij}$ — osa-investeerimistegevus, mis investeerimissektori väljundvoo koordinaadiga I_j^+ (j-ndat liiki uued põhivahendid) seab vastavusse sisendvoo elemendi I_{ij}^-;

$\mathfrak{L}_j$ — operaator, mis põhivahendite liigi j varuga $\overline{K}_j$ seab vastavusse investeerimissektori väljundvoo koordinaadi I_j^+.

Märgime tootmissektori toodangu lõpptarbimiskiiruse tähega Y. Neil eeldustel on tootmissüsteemi graafile vastav Leontjevi mudel (***) järgmine:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & A & \mathfrak{J} \\ \mathfrak{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{K} \\ X \\ I^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{K} \\ X \\ I^+ \end{pmatrix} \tag{31}$$

või

$$\begin{aligned} \varkappa X &= \overline{K} \\ AX + \mathfrak{J} I^+ + Y &= X \\ \mathfrak{L}\overline{K} &= I^+. \end{aligned} \tag{31'}$$

Elimineerinud võrrandisüsteemist (31′) vektorid $\overline{K}$ ja I^+, saame võrrandi

$$AX + \mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X + Y = X. \tag{32}$$

Toome võrdusega

$$X - Y = \alpha X \tag{33}$$

mudelisse (32) hinnapoliitika diagonaalmaatriksi α [1] ja leiame, et

$$\mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X = (\alpha - A) X. \tag{34}$$

Operaatori $\mathfrak{L}$ avaldamiseks peame silmas, et põhifondide definitsiooni järgi on põhivahendite varuvektori kasv võrdne investeerimissektori väljundvoo I^+ ja põhivahendite väljalangemise F_2^+ vahega:

$$I^+ - F_2^+ = \mathrm{D}\overline{K}. \tag{35}$$

Põhifondide majandustegevuse definitsiooni järgi asendatakse kõik väljalangenud põhivahendid:

$$F_2^+ = \mathfrak{R} I^+, \tag{36}$$

kus $\mathfrak{R}$ on asendamistegevuse diagonaalmaatriks, mille elemendid on defineeritud asendamistegevuse hüpoteesidega [2]. Võrduste (35) ja (36) järgi leiame, et

$$\mathfrak{L} = (E - \mathfrak{R})^{-1}\mathbf{D}, \tag{37}$$

kus E on ühikmaatriks. Mudel (34) avaldub seega kujul

$$\mathfrak{J}(E - \mathfrak{R})^{-1}\mathbf{D}\varkappa X = (a - A)X. \tag{38}$$

Majandusalase tegelikkuse ühele või teisele eriolukorrale vastavalt võib tootmise dünaamilisse tasakaalumudelisse (38) kuuluvaid maatrikseid $\mathfrak{J}$ ja $\mathfrak{R}$ mitmeti interpreteerida. Maatriksite $\mathfrak{J}$ ja $\mathfrak{R}$ konkretiseerimiseks võime eeldada näiteks järgmist.

$\mathrm{A_G}$. Maatriksi $\mathfrak{J}$ elemendid $\mathfrak{J}_{ij}$ on mittenegatiivsete reaalarvude ja nihkeoperaatorite korrutised:

$$\mathfrak{J}_{ij} = \nu_{ij}\underset{\theta_j}{\mathscr{E}}, \quad \nu_{ij} \geqslant 0, \tag{39}$$

kus $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_{ij} = 1$.

$\mathrm{B_G}$. Maatriksi $\mathfrak{R}$ diagonaali elemendid $\mathfrak{R}_j$ on negatiivse sammuga nihkeoperaatorid:

$$\mathfrak{R}_j = \underset{-T_j}{\mathscr{E}}. \tag{40}$$

Eelduse ($\mathrm{A_G}$) järgi määrab investeerimistegevuse viivitusaja θ_j põhivahendite liik j. Kordaja ν_{ij} väljendab tootmisüksuse i akumulatsiooni erikaalu põhivahendite j investeeringutes. Eelduse ($\mathrm{B_G}$) järgi on põhivahendite liigiga j määratud ekspluatatsiooniaeg T_j, mille möödumisel põhivahendid uuendatakse [2]. Neil eeldustel kujutab mudel (38) konstantkordajatega esimest järku lineaarset homogeenset diferents-diferentsiaalvõrrandisüsteemi, mis sel juhul, kui vektorid $\bar{K}$, X ja I^+ on kahemõõtmelised, avaldub kujul

$$\begin{aligned}
&\nu_{11}\underset{\theta_1}{\mathscr{E}}(1 - \underset{-T_1}{\mathscr{E}})^{-1}\mathbf{D}(\varkappa_{11}X_1 + \varkappa_{12}X_2) + \\
&+ \nu_{12}\underset{\theta_2}{\mathscr{E}}(1 - \underset{-T_2}{\mathscr{E}})^{-1}\mathbf{D}(\varkappa_{21}X_1 + \varkappa_{22}X_2) = (a_1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 \\
&\nu_{21}\underset{\theta_1}{\mathscr{E}}(1 - \underset{-T_1}{\mathscr{E}})^{-1}\mathbf{D}(\varkappa_{11}X_1 + \varkappa_{12}X_2) + \\
&+ \nu_{22}\underset{\theta_2}{\mathscr{E}}(1 - \underset{-T_2}{\mathscr{E}})^{-1}\mathbf{D}(\varkappa_{21}X_1 + \varkappa_{22}X_2) = -a_{21}X_1 + (a_2 - a_{22})X_2.
\end{aligned} \tag{41}$$

Eeldustel ($\mathrm{A_G}$) ja ($\mathrm{B_G}$) on tootmise tasakaalumudelil (38) omakorda mitmeid erikujusid, millest mõnda mainime.

Kui põhivahendite kulumist ja investeerimistegevuse viivitusaega ei arvestata, s. t. iga j korral $T_j \to \infty$, $\theta_j = 0$, siis investeerimistegevus $\mathfrak{J} = \nu$, kus ν on kordajate ν_{ij} maatriks, ja asendamistegevus $\mathfrak{R} = 0$. Asendamistegevuse puudumise tõttu $\mathfrak{L} = (E - \mathfrak{R})^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{D}$, kus $\mathbf{D}$ on tuletisoperaatorite skalaarmaatriks. Tootmise dünaamiline tasakaalumudel (38) taandub Leontjevi dünaamiliseks mudeliks

$$B\dot{X} = (a - A)X, \tag{42}$$

milles investeerimisnormide maatriksi B määrab investeerimistegevus ja põhivahendite struktuur:

$$B = \nu\varkappa. \tag{43}$$

Kui vektorid K, X ja I^+ on kahemõõtmelised, siis on Leontjevi dünaamiline mudel (42) järgmine:

$$\begin{aligned} b_{11}\dot{X}_1 + b_{12}\dot{X}_2 &= (a_1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 \\ b_{21}\dot{X}_1 + b_{22}\dot{X}_2 &= -a_{21}X_1 + (a_2 - a_{22})X_2, \end{aligned} \tag{42'}$$

kus investeerimisnormid b_{ij} on määratud võrdustega

$$\begin{aligned} b_{11} &= \nu_{11}\varkappa_{11} + \nu_{12}\varkappa_{21} \qquad & b_{12} &= \nu_{11}\varkappa_{12} + \nu_{12}\varkappa_{22} \\ b_{21} &= \nu_{21}\varkappa_{11} + \nu_{22}\varkappa_{21} \qquad & b_{22} &= \nu_{21}\varkappa_{12} + \nu_{22}\varkappa_{22}. \end{aligned} \tag{43'}$$

Kui fondimahukusnormide maatriks on üheveeruline ja investeerimistegevus üherealine maatriks, s. t.

$$\varkappa = \left\| \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \\ \vdots \\ \varkappa_k \end{matrix} \right\|, \quad \mathfrak{J} = (\underset{\theta_1}{\mathcal{E}}\underset{\theta_2}{\mathcal{E}} \dots \underset{\theta_k}{\mathcal{E}}), \tag{44}$$

siis on otsekulunormide maatriks üheelemendiline ($A = a$) ja tootmise dünaamiline tasakaalumudel (38) taandub üheks võrrandiks

$$\sum_{i=1}^{k} \underset{\theta_j}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T_j}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D}\varkappa_j X = (\alpha - a)X. \tag{45}$$

Kui fondimahukusnormide maatriks on üherealine ja investeerimistegevus üheveeruline maatriks, s. t.

$$\varkappa = (\varkappa_1\varkappa_2 \dots \varkappa_m), \quad \mathfrak{J} = \left\| \begin{matrix} \nu_1 \underset{\theta}{\mathcal{E}} \\ \nu_2 \underset{\theta}{\mathcal{E}} \\ \vdots \\ \nu_m \underset{\theta}{\mathcal{E}} \end{matrix} \right\|, \tag{46}$$

siis taandub diagonaalmaatriks $\mathfrak{L}$ üheelemendiliseks maatriksiks

$$\mathfrak{L} = (1 - \mathfrak{R})^{-1}\mathrm{D} = (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D} \tag{47}$$

ja tootmise dünaamiline tasakaalumudel (38) avaldub järgmiselt:

$$\begin{aligned} \nu_1 \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= (\alpha_1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1m}X_m \\ \nu_2 \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= -a_{21}X_1 + (\alpha_2 - a_{22})X_2 - \dots - a_{2m}X_m \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \nu_m \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= -a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \dots + (\alpha_m - a_{mm})X_m. \end{aligned} \tag{48}$$

Piirdume sellega, et uurime lähemalt tootmise dünaamilise tasakaalumudeli (38) viimast erikuju. Eeldame, et iga i korral $\nu_i \neq 0$, ja korrutame võrrandisüsteemi (48) võrrandeid teguritega $1/\nu_i$. Tähistame

$$a_{ij}/\nu_i = \tilde{a}_{ij}, \quad \alpha_i/\nu_i = \tilde{\alpha}_i \tag{49}$$

ja leiame, et

$$\begin{aligned}
&\underset{\theta}{\mathcal{E}}(1-\underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D}\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i X_i=(\tilde{\alpha}_1-\tilde{a}_{11})X_1-\tilde{a}_{12}X_2-\ldots-\tilde{a}_{1m}X_m\\
&\underset{\theta}{\mathcal{E}}(1-\underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D}\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i X_i=-\tilde{a}_{21}X_1+(\tilde{\alpha}_2-\tilde{a}_{22})X_2-\ldots-\tilde{a}_{2m}X_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\underset{\theta}{\mathcal{E}}(1-\underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D}\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i X_i=-\tilde{a}_{m1}X_1-\tilde{a}_{m2}X_2-\ldots+(\tilde{\alpha}_m-\tilde{a}_{mm})X_m,
\end{aligned}\tag{48'}$$

milles kõigi võrrandite vasakud pooled on omavahel võrdsed.

Lahendame mudeli (48) järgi analüütilise planeerimisülesande [4, 6, 2, 3], leides investeerimis-, asendamis- ja tootmistegevusele ning hinnapoliitikale vastava tootmise kiirusvektori. Lahutanud võrrandisüsteemi (48′) iga võrrandi pooltest esimese võrrandi pooled, saame $m-1$ võrrandist koosneva võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\alpha}_2+\tilde{a}_{12}-\tilde{a}_{22})X_2+(\tilde{a}_{12}-\tilde{a}_{23})X_3+\ldots+(\tilde{a}_{1m}-\tilde{a}_{2m})X_m=\\
&\qquad=(\tilde{\alpha}_1-\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{21})X_1\\
&(\tilde{a}_{12}-\tilde{a}_{32})X_2+(\tilde{\alpha}_3+\tilde{a}_{13}-\tilde{a}_{33})X_3+\ldots+(\tilde{a}_{1m}-\tilde{a}_{3m})X_m=\\
&\qquad=(\tilde{\alpha}_1-\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{31})X_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\tilde{a}_{12}-\tilde{a}_{m2})X_2+(\tilde{a}_{13}-\tilde{a}_{m3})X_3+\ldots+(\tilde{\alpha}_m+\tilde{a}_{1m}-\tilde{a}_{mm})X_m=\\
&\qquad=(\tilde{\alpha}_1-\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{m1})X_1.
\end{aligned}\tag{50}$$

Võrrandisüsteem (50) võimaldab leida tootmise kiirusvektori X esimese koordinaadi X_1 kaudu kõik ülejäänud koordinaadid:

$$\begin{aligned}
X_2&=f_{21}X_1\\
X_3&=f_{31}X_1\\
&\ldots\ldots\\
X_m&=f_{m1}X_1,
\end{aligned}\tag{51}$$

kus võrdetegurid $f_{21}, f_{31},\ldots,f_{m1}$ on võrrandisüsteemi (50) kordajatega määratud avaldised. Asetame koordinaatide $X_2, X_3,\ldots,X_m$ avaldised võrdustest (51) võrrandisüsteemi (48′) esimesse võrrandisse ja saame tootmise kiirusvektori esimese koordinaadi arvutamiseks konstantkordajatega esimest järku diferents-diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\underset{\theta}{\mathcal{E}}(1-\underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1}\mathrm{D}\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i f_{i1}X_1=(\tilde{\alpha}_1-\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{1i}f_{i1})X_1\tag{52}$$

või

$$\dot{X}_1(t+\theta)=q[X_1(t)-X_1(t-T)],\tag{52'}$$

milles

$$q=\frac{\tilde{\alpha}_1-\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{a}_{1i}f_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\varkappa_i f_{i1}},\quad f_{11}=1.\tag{53}$$

Uurime kordaja q struktuuri. Võrrandisüsteemi (50) järgi $f_{i1}=\Delta_i/\Delta_1$, kus Δ_i on determinant, mis saadakse süsteemideterminandist Δ_1 tootmise kiirusvektori koordinaadi X_i kordajate veeru asendamisel esimese koordinaadi X_1 kordajate veeruga. Asendanud võrduses (53) võrdeteguri f_{i1} determinantide suhtega Δ_i/Δ_1, leiame, et

$$q = \frac{\tilde{a}_1\Delta_1 - \sum_{i=1}^{m} a_{1i}\Delta_i}{\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i\Delta_i}. \qquad (53')$$

Arvutame determinandi

$$(-1)^{m+1} \det\begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ \tilde{a} - \bar{A} & \bar{E}_m \end{pmatrix} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{a}_1 - \bar{a}_{11} & \dots & -\bar{a}_{1i} & \dots & -\bar{a}_{1m} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{i1} & \dots & \tilde{a}_i - \bar{a}_{ii} & \dots & -\bar{a}_{im} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{m1} & \dots & -\tilde{a}_{mi} & \dots & \tilde{a}_m - \bar{a}_{mm} & 1 \end{vmatrix}.$$

Lahutame determinandi kõigist järgmistest ridadest teise rea ja toome saadud determinandi esimesest veerust determinandi ette miinusmärgi. Vahetanud esimese ja i-nda veeru, näeme pärast järgu alandamist kahe võrra, et

$$(-1)^{m+1}\det\begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ \tilde{a} - \bar{A} & \bar{E}_m \end{pmatrix} = \Delta_i.$$

Arvutanud murru (53′) nimetaja, saame

$$\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i\Delta_i = (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \det\begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ \tilde{a} - \bar{A} & \bar{E}_m \end{pmatrix} = (-1)^{m+1} \det\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ \tilde{a} - \bar{A} & \bar{E}_m \end{pmatrix}.$$

Arvutanud samal viisil lugeja, võime veenduda, et viimane kujutab determinanti, mille esimene ja teine rida erinevad ainult viimase elemendi poolest. Lahutame esimesest reast teise rea ja alandame determinandi järku ühe võrra. Lugeja avaldub nüüd kujul

$$\tilde{a}_1\Delta_1 - \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{1i}\Delta_i = \det(\tilde{a} - \bar{A})$$

ja murd (53′) kujul

$$q = (-1)^{m+1} \frac{\det(\tilde{a} - \bar{A})}{\det\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ \tilde{a} - \bar{A} & \bar{E}_m \end{pmatrix}}. \qquad (53'')$$

Murru (53″) edasiseks lihtsustamiseks laiendame seda maatriksi $\operatorname{diag}\nu$ determinandiga. Korrutame peadiagonaali esimese elemendiga ν_1 lugeja esimest ja nimetaja teist rida, teise elemendiga ν_2 lugeja teist ja nimetaja kolmandat rida, jne. Peame silmas võrdusi (49) ja leiame, et murd (53″) laseb end kirjutada järgmisel kompaktsel kujul

$$q = (-1)^{m+1} \frac{\det(a - A)}{\det\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ a - A & \nu \end{pmatrix}}. \qquad (53''')$$

Arvutanud hinnapoliitika a väärtusele vastava q väärtuse, tuleb tootmise kiirusvektori leidmiseks lahendada võrrandi (52′) karakteristlik võrrand

$$\omega = q(e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}). \qquad (54)$$

Kuna planeerimise eesmärgiks on tootmise tsükliteta (kriisivaba) kasvu kavandamine, siis huvitab planeerijat eeskätt karakteristliku võrrandi positiivne reaallahend ω, mis võimaldaks tootmise arenemise piki kõverat

$$X_1 = X_{10}e^{\omega t}, \qquad (55)$$

kus X_{10} on arenemise algkiirus. Eeldame, et on täidetud positiivse reaallahendi olemasolu tingimus

$$qT > 1 \tag{56}$$

ja lahendame karakteristliku võrrandi (54). Võrrandi (54) positiivse reaallahendi lähisväärtuse arvutamiseks on töö teises osas [2] tuletatud valem

$$\omega = \frac{2(qT-1)}{T+2\theta} + \eta, \tag{57}$$

milles parandusliige η on määratud võrdustega

$$\eta = \frac{2\tilde{R}}{T+2\theta}$$

$$\tilde{R} = \hat{R} - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\omega}{2}(T+2\theta) - \hat{R} \right]^i \tag{58}$$

$$\hat{R} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{\omega^{k-1}}{T} [(T+\theta)^k - \theta^k].$$

Arvutanud valemiga (57) tootmiskiiruse kasvutempo lähisväärtuse ja leidnud võrduse (55) järgi tootmise kiirusvektori esimese koordinaadi X_1, saame võrduste (51) põhjal kõik ülejäänud koordinaadid. Analüütiline planeerimisülesanne on lahendatud.

Poliitilise planeerimisülesande [4, 6, 2, 3] lahendamiseks avaldame võrdusest (55) tootmiskiiruse kasvutempo ja karakteristlikust võrrandist (54) teguri q:

$$\omega = \frac{1}{t} \ln \frac{X_1}{X_{10}} \tag{59}$$

$$q = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}}. \tag{60}$$

Asetanud kasvutempo väärtuse võrdusest (59) võrdusse (60), saame

$$q = \frac{\frac{1}{t} \ln \frac{X_1}{X_{10}}}{\left(\frac{X_1}{X_{10}}\right)^{-\frac{\theta}{t}} - \left(\frac{X_1}{X_{10}}\right)^{-\frac{T+\theta}{t}}}. \tag{61}$$

Leidnud võrdustest (51) võrdetegurid

$$f_{i1} = X_i/X_1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{62}$$

ning asetanud võrdusse (53), tuletame hinnapoliitika diagonaalmaatriksi esimese elemendi arvutamiseks võrrandi

$$\frac{X_1\tilde{\alpha}_1 - \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{1i}X_i}{\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i} = q,$$

millest

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{X_1} \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{1i}X_i + q \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i \right), \tag{63}$$

kus q on määratud võrdusega (61). Hinnapoliitika diagonaalmaatriksi ülejäänud elementide avaldamiseks kasutame võrrandisüsteemi (50) võrrandeid, mille järgi leiame, et

$$\tilde{a}_j = \frac{1}{X_j}\left[\sum_{i=1}^{m} (\tilde{a}_{ji} - \tilde{a}_{1i}) X_i + X_1 \tilde{a}_1\right].$$

Asendanud saadud võrduses $\tilde{a}_1$ väärtuse võrdusest (63), näeme, et hinnapoliitika kõik elemendid avalduvad võrdusega (63) analoogilise avaldisega:

$$\tilde{a}_j = \frac{1}{X_j}\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ji} X_i + q \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i\right). \tag{64}$$

Peame silmas võrdusi (49) ja korrutame valemi (64) pooli teguriga ν_j. Valem (64) avaldub kujul

$$a_j = \frac{1}{X_j}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} X_i + \nu_j q \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i\right), \tag{64'}$$

kus $j = 1, 2, \ldots, m$. Valemi (64′) praktilise kasutamise hõlbustamiseks oletame, et on teada tootmise proportsioonid

$$X_i / X_1 = f_{i1}. \tag{51'}$$

Kavandame tootmise laienemise

$$X_i(t) / X_i(0) = g,$$

kus g on *kasvutegur*. Neil eeldustel

$$X_i(t) = g X_i(0) = g f_{i1} X_{10} \tag{65}$$

ja valem (64′) avaldub kujul

$$a_j = \frac{1}{f_{j1}}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} f_{i1} + \nu_j q \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}\right), \tag{64''}$$

milles võrduse (61) järgi

$$q = \frac{\frac{1}{t}\ln g}{g^{-\frac{\theta}{t}} - g^{-\frac{T+\theta}{t}}}. \tag{61'}$$

Eeldame, et tootmiskiirus on ühenimeline vektor koordinaatidega väärtusühikutes. Arvutame hinnapoliitikale a vastava akumulatsiooninormi σ. Lähtume rahvatulu jaotuse postulaatidest

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^- = F_1^+ + S \tag{A$_N$}$$

$$S = \sigma\left(S + \sum_{i=1}^{m} Y_i\right) \tag{B$_N$}$$

ja peame silmas võrdusi

$$Y_i = (1 - a_i) X_i \tag{66}$$

$$F_1^+ = \delta \bar{K} = \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i, \tag{67}$$

kus δ on amortisatsiooninorm. Postulaadi (B$_N$) ja võrduse (66) järgi

$$S = \frac{\sigma}{1-\sigma} \sum_{i=1}^{m} (1 - a_i) X_i. \tag{68}$$

Postulaadi (A$_N$) ning võrduste (67) ja (68) järgi

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^- = \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i + \frac{\sigma}{1-\sigma} \sum_{i=1}^{m} (1 - a_i) X_i. \tag{69}$$

Kuna võrrandisüsteemi (31′) teise võrrandi järgi

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_j, \tag{70}$$

siis

$$\delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i + \frac{\sigma}{1-\sigma} \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha_i) X_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_j,$$

millest

$$\sigma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i X_i - \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_j - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} X_i - \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_j - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i}. \tag{71}$$

Asendanud võrduses (71) X_i väärtuse avaldisega $gf_{i1}X_{10}$ võrdusest (65), saame

$$\sigma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_{i1} - \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_{i1} - \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}. \tag{72}$$

Tugineme võrdusele (64″), mille järgi

$$\alpha_i f_{i1} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} + q v_i \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j f_{j1},$$

ja liidame võrduste pooled:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_{i1} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} + q \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j f_{j1}. \tag{73}$$

Asetanud $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_{i1}$ väärtuse võrdusest (73) võrdusse (72) ja koondanud, leiame:

$$\sigma = \frac{q \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \sum\limits_{j=1}^{m} \varkappa_j f_{j1} - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_{i1} - \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}. \tag{74}$$

Arvestades tingimust $\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = 1$, leiame, et akumulatsiooninormi valem (74) avaldub kujul

$$\sigma = \frac{(q-\delta) \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_{i1} - \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} - \delta \sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}. \tag{75}$$

Poliitiline planeerimisülesanne on lahendatud.

4. Arvutame mudeliga (31) määratud tootmissüsteemi-omahinna, kui $\varkappa$, $\mathfrak{J}$ ja $\mathfrak{L}$ on defineeritud võrdustega (46) ja (47). Avaldugu tootmise esmastegurite kulu kiirusvektor järgmiselt:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

kus L on tootmise esmastegurite (näiteks tööjõu) kulu kiirusvektor tootmissektoris.

Arvutanud tootmissüsteemi sisekäibe

$$X_{22} = \mathfrak{A} \operatorname{diag} X =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & A & \mathfrak{J} \\ \mathfrak{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{K} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{diag} X & 0 \\ 0 & 0 & I^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \operatorname{diag} X & 0 \\ 0 & A \operatorname{diag} X & \mathfrak{J} I^+ \\ \mathfrak{L}\bar{K} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

leiame, et tootmissüsteemi-omahinna võrrand (**) avaldub kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa \operatorname{diag} X & 0 \\ 0 & A \operatorname{diag} X & \mathfrak{J} I^+ \\ \mathfrak{L}\bar{K} & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K} h_E \\ (\operatorname{diag} X) h \\ I^+ h_I \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Korrutades võrrandit (77) vasakult diagonaalmaatriksiga $(\operatorname{diag} X)^{-1}$, saame

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & A & \mathfrak{J} I^+/I^+ \\ \mathfrak{L}\bar{K}/\bar{K} & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{pmatrix}, \tag{78}$$

kus $l = (\operatorname{diag} X)^{-1} L$ on tootmise esmastegurite otsekulunormide vektor. Arvestame lihtsaimat diskonteerimishüpoteesi, mille järgi diskonteeritav suurus eeldatakse kasvavat konstantse tempoga ϱ, kus 100ϱ on diskontoprotsendi määr, ning arvutame võrduste (46) järgi suhte $\mathfrak{J} I^+/I^+$:

$$\frac{\mathfrak{J} I^+}{I^+} = \frac{\mathfrak{J} I_0^+ e^{\varrho t}}{I_0^+ e^{\varrho t}} = \frac{\nu \underset{\theta}{\mathfrak{E}} I_0^+ e^{\varrho t}}{I_0^+ e^{\varrho t}} = \nu e^{\varrho\theta}. \tag{79}$$

Suhte $\mathfrak{L}\bar{K}/\bar{K}$ arvutamisel peame silmas, et sõltuvuste (51) ja (55) järgi avaldub dünaamilise tasakaalumudeliga (31) dikteeritud tootmiskiirus võrdusega

$$X = X_0 e^{\omega t}, \tag{80}$$

kus X_0 on algkiiruste vektor, ja leiame:

$$\frac{\mathfrak{L}\bar{K}}{\bar{K}} = \frac{(1 - \underset{-T}{\mathfrak{E}})^{-1} \mathbf{D} \varkappa X}{\varkappa X} = \frac{\omega}{1 - e^{-\omega T}}. \tag{81}$$

Asetame avaldiste $\mathfrak{J} I^+/I^+$ ja $\mathfrak{L}\bar{K}/\bar{K}$ väärtused võrdustest (79) ja (81) hinnavõrrandisse (78). Võrrand (78) avaldub kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & A & \nu e^{\varrho\theta} \\ \frac{\omega}{1 - e^{-\omega T}} & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{pmatrix} \tag{82}$$

või kujul

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{1 - e^{-\omega T}} h_I \qquad & = h_E \\ \varkappa' h_E + A' h \qquad & + l = h \\ \nu' e^{\varrho\theta} h \qquad & = h_I. \end{aligned} \tag{82'}$$

Lahendanud võrrandisüsteemi (82′), leiame tootmissüsteemi-omahinna:

$$h_E = \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu' \left[\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right)^{-1}\right]' l$$

$$h = \left[\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right)^{-1}\right]' l \qquad (83)$$

$$h_l = e^{\varrho\theta} \nu' \left[\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right)^{-1}\right]' l.$$

Valemid (83) võimaldavad uurida tootmissüsteemi-omahinna sõltuvust tootmiskiiruse kasvutempost, diskontoprotsendi määrast, investeerimistegevuse viivitusajast ja põhivahendite ekspluatatsiooniajast.

Peame silmas võrdusi (80), (46) ja (47) ning avaldame võrrandist (32) lõpptarbimise, teisendades seda järgmiselt:

$$Y = X - AX - \mathfrak{Z}\mathfrak{L}\varkappa X = X - AX - \frac{\omega e^{\omega\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa X =$$

$$= \left(E - A - \frac{\omega e^{\omega\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right) X.$$

Viimase võrduse järgi arvutame lõpptoodangu maksumuse omahinnas:

$$h'Y = l' \left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right)^{-1} \left(E - A - \frac{\omega e^{\omega\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right) X. \qquad (84)$$

Olgu $\varrho = \omega$. Siis $\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right)^{-1} \left(E - A - \frac{\omega e^{\omega\theta}}{1-e^{-\omega T}} \nu\varkappa\right) = E$ ja võrdus (84) lihtsustub:

$$h'Y = l'X = \sum_{i=1}^{m} l_i X_i = \sum_{i=1}^{m} L_i. \qquad (85)$$

Tulemusest nähtub, et lõpptoodangu maksumus omahinnas on võrdne tootmise esmastegurite kuluga. Kui diskontoprotsendi määrab tootmiskiiruse kasvutempo ($\varrho = \omega$), siis rahuldavad võrdustega (83) antud hinnad hinnakriteeriumi ja kujutavad omahinda majandusteaduslikus mõttes.

Käsitleme hindade sõltuvust hinnapoliitikast. Karakteristliku võrrandi (54) suurima reaallahendi lähisväärtuse sõltuvus kordajast q ja kordaja q sõltuvus hinnapoliitikast on dikteeritud võrdustega (57) ja (53‴):

$$\omega = \frac{2(qT-1)}{T+2\theta} + \eta$$

$$q = (-1)^{m+1} \frac{\det(\alpha - A)}{\det\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ \alpha - A & \nu \end{pmatrix}}.$$

Võrdustest (57) ja (53‴) ning hinnavalemitest (83) nähtub, et hinnapoliitika määrab hinnad üheselt. Uurime hindade ja hinnapoliitika sõltuvust sel juhul, kui tootmissektori sisekäive puudub ($A = 0$). Võrrandisüsteemi (50) ja võrduste (51) järgi on siis

$$f_{i1} = \tilde{\alpha}_1 / \tilde{\alpha}_i \qquad (86)$$

ja võrdus (53) lihtsustub:

$$q = \frac{\tilde{a}_1}{\sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_i}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\varkappa_i}{\tilde{a}_i}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\nu_i \varkappa_i}{a_i}}. \tag{87}$$

Arvestame sisekäibe puudumist ja kirjutame hinnavalemid (83) kujul

$$h_E = \overline{q}\nu'[(E - \overline{q}\nu\varkappa)^{-1}]'l$$

$$h = [(E - \overline{q}\nu\varkappa)^{-1}]'l \tag{88}$$

$$h_I = e^{\varrho\theta}\nu'[(E - \overline{q}\nu\varkappa)^{-1}]'l,$$

kus

$$\overline{q} = \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1 - e^{-\omega T}}. \tag{89}$$

Kuna maatriksite ν ja $\varkappa$ erikuju tõttu

$$(E - \overline{q}\nu\varkappa)^{-1} =$$

$$= 1/(1 - \sum_{i=1}^{m} \nu_i\varkappa_i\overline{q}) \begin{Vmatrix} 1 - \sum\limits_{)1(} \nu_i\varkappa_i\overline{q} & \nu_1\varkappa_2\overline{q} & \ldots \nu_1\varkappa_m\overline{q} \\ \nu_2\varkappa_1\overline{q} & 1 - \sum\limits_{)2(} \nu_i\varkappa_i\overline{q} & \ldots \nu_2\varkappa_m\overline{q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_m\varkappa_1\overline{q} & \nu_m\varkappa_2\overline{q} & \ldots 1 - \sum\limits_{)m(} \nu_i\varkappa_i\overline{q} \end{Vmatrix}, \tag{90}$$

siis pole raske näidata, et tootmissektori-omahinna koordinaadid avalduvad järgmiste lihtsate valemitega:

$$h_1 = l_1 + \bar{q}\varkappa_1 \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i\nu_i}{1 - \bar{q}\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i\varkappa_i}$$

$$h_2 = l_2 + \bar{q}\varkappa_2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i\nu_i}{1 - \bar{q}\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i\varkappa_i} \tag{91}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_m = l_m + \bar{q}\varkappa_m \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i\nu_i}{1 - \bar{q}\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i\varkappa_i}.$$

Asetanud tootmissektori-omahinna koordinaadid valemirühma (88) esimesse valemisse, saame fondimaksu määra arvutamiseks järgmise avaldise

$$h_E = \frac{\bar{q}\sum\limits_{i=1}^{m} l_i\nu_i}{1 - \bar{q}\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i\varkappa_i}. \tag{92}$$

Hinnavalemitest (91) ja (92) tuleneb lihtne seos

$$h_k = l_k + \varkappa_k h_E,$$

milles $\varkappa_k h_E$ väljendab põhivahendite kasutamise maksumust. Sisekäibe puudumisel moodustab toote k omahinna tootmise esmastegurite otsekulunormi ja fondimaksu summa. Arvutanud valemitega (87), (57) ja (89) hinnapoliitikale α vastava $\bar{q}$ lähisväärtuse, võime valemite (91) ja (92) järgi leida hindade lähisväärtused. Huvitav on märkida, et hindade ja hinnapoliitika sõltuvus on eriti lihtne parajasti siis, kui hinnad (91) ja (92) kujutavad omahinda majandusteaduslikus mõttes. Kuna diskontoprotsendi määrab sel juhul tootmiskiiruse kasvutempo ($\varrho = \omega$), siis on võrduste (89), (60) ja (87) järgi

$$\bar{q} = \frac{\omega e^{\omega\theta}}{1 - e^{-\omega T}} = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}} = q = 1 / \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i \varkappa_i}{a_i}. \tag{93}$$

Tootmissektori sisekäive arvestamisel ($A \neq 0$) on hinnavalemite (83) praktilisel rakendamisel möödapääsematu elektronarvuti kasutamine.

5. Tootmise proportsioonide või hinnapoliitika õigeks määramiseks peavad planeerijal olema usaldusväärsed andmed selle kohta, kuidas mõjutab tarbimist elatustase ja elanikkonna tulu kasv. Teatava sotsiaalse rühma *elatustasemeks* $\bar{v}$ nimetatakse keskmist tulu inimese kohta:

$$\bar{Y} / \bar{P} = \bar{v}, \tag{94}$$

kus $\bar{Y}$ on tulu ja $\bar{P}$ inimeste arv. Saksa majandusteadlane Ernst Engel on uurinud kaupade tarbimise olenevust elanikkonna tulust, näidates, et mingi kauba i tarbimise ja tarbimisfondi teineteisele vastavate kasvude suhe on tulu mõnesugune funktsioon:

$$\Delta Y_i / \Delta \bar{Y} = \Gamma_i(\bar{Y}). \tag{95}$$

Kui suhe $\Delta Y_i / \Delta \bar{Y}$ on marginaalne, siis avaldub võrdus (95) kujul

$$\frac{dY_i}{d\bar{Y}} = \Gamma_i(\bar{Y}). \tag{96}$$

Kauba i tarbimise sõltuvus tarbimisfondist on seega integraal

$$Y_i = \int \Gamma_i(\bar{Y}) d\bar{Y}, \tag{97}$$

mille geomeetrilist vastet nimetatakse *Engeli kõveraks*. Statistilised vaatlused on näidanud, et sel juhul, kui elatustase palju ei muutu, võime enamiku kaupade Engeli kõveraid suurema veata aproksimeerida sirgetega, mis tähendab seda, et $\Gamma_i = \text{const}$. Eeldame, et tarbimine on väljendatud väärtusühikutes. Öeldust lähtudes postuleerime tarbimise ja tarbimisfondi sõltuvuse.

A_C. Elatustaseme varieerimisel teatavates piirides $\bar{v} \in [v_1, v_2]$ on kauba i marginaalne tarbimistendents jääv suurus:

$$\frac{dY_i}{d\bar{Y}} = \bar{\gamma}_i. \tag{98}$$

B_C. Tarbimine on võrdne tarbimisfondiga:

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = \bar{Y}. \tag{99}$$

Korrutanud võrduse (98) pooli diferentsiaaliga $d\bar{Y}$ ja integreerinud, saame kauba i tarbimisfunktsiooni kujul

$$Y_i = \overline{\gamma}_i \overline{Y} + Y_i^*, \tag{100}$$

kus integreerimiskonstant Y_i^* on sirge algordinaat [6]. Peame silmas hüpoteesi (B_C) ja liidame võrduste (100) pooled:

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = \overline{Y} \sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i^*,$$

millest

$$(1 - \sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}_i)\, \overline{Y} = \sum_{i=1}^{m} Y_i^*. \tag{101}$$

Võrdus (101) peab kehtima tulu iga väärtuse korral lõigul $[\overline{v}_1 \overline{P}, \overline{v}_2 \overline{P}]$. Viimane on võimalik ainult siis, kui

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} Y_i^* = 0. \tag{102}$$

Eeldame jällegi, et tootmiskiirus on ühenimeline vektor koordinaatidega väärtusühikutes, ja käsitleme tootmise dünaamilist tasakaalumudelit (31) sel juhul, kui lõpptarbimisvektori Y koordinaadid määrab tarbimisfunktsioon (100). Lähtume rahvatulu jaotuse postulaatidest

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^- = \sum_{i=1}^{m} F_{1i}^+ + S \tag{A_N}$$

$$S = \sigma(S + \overline{Y}), \tag{B_N}$$

milles $\overline{Y} = \sum_{i=1}^{m} Y_i$, ja leiame elanikkonna tulu sõltuvuse tootmiskiirusest. Postulaatide (A_N) ja (B_N) järgi

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^- = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k} \delta_l \varkappa_{li} X_i + \frac{\sigma}{1-\sigma} \overline{Y}, \tag{103}$$

milles δ_l on põhivahendite liigi l amortisatsiooninorm. Võrrandisüsteemi (31′) teine võrrand kujutab võrrandisüsteemi, mille võrrandite liitmisel leiame, et

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^- = \sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_j - \overline{Y}. \tag{104}$$

Võrduste (103) ja (104) järgi leiame nüüd tarbimisfondi sõltuvuse tootmiskiirusest:

$$\overline{Y} = (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k} \delta_l \varkappa_{li} X_i\right). \tag{105}$$

Tootmise dünaamilise tasakaalumudeli (32) järgi

$$\mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X = X - AX - Y, \tag{32′}$$

milles diagonaalmaatriks $\mathfrak{L}$ on määratud võrdusega (37). Asetame võrdustega (100) ja (105) määratud lõpptarbimisvektori mudelisse (32′) ja rühmitame paremas pooles liikmed tootmiskiiruse koordinaatide järgi. Märkides tarbimisfunktsiooni vabaliikmete Y_i^* vektori tähega Y^*, leiame, et mudel (32′) avaldub kujul

$$\mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X = CX - Y^*, \tag{106}$$

kus C on maatriks elementidega

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij} - \bar{\gamma}_i (1 - \sum_{l=1}^{m} a_{lj} - \sum_{l=1}^{k} \delta_l \varkappa_{lj}) (1 - \sigma) \tag{107}$$

(δ_{ij} on Kroneckeri sümbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j \\ 0, & \text{kui } i \neq j). \end{cases}$$

Investeerimis- ja asendamistegevuse eri hüpoteesidele vastavalt võib tootmise dünaamilisel tasakaalumudelil (106) olla mitmeid erikujusid. Kui $\varkappa$, $\mathfrak{J}$ ja $\mathfrak{L}$ on määratud näiteks võrdustega (46) ja (47), siis avaldub mudel (106) järgmiselt:

$$\begin{aligned} \nu_1 \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= \sum_{j=1}^{m} c_{1j} X_j - Y_1^* \\ \nu_2 \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= \sum_{j=1}^{m} c_{2j} X_j - Y_2^* \\ \cdots & \cdots \\ \nu_m \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= \sum_{j=1}^{m} c_{mj} X_j - Y_m^*. \end{aligned} \tag{108}$$

Piirdume sellega, et käsitleme tootmise dünaamilise tasakaalumudeli (106) viimast erikuju. Jagame võrrandid kordajatega $\nu_i \neq 0$, märkides

$$c_{ij}/\nu_i = \tilde{c}_{ij}, \quad Y_i^*/\nu_i = \tilde{Y}_i^*, \tag{109}$$

ja leiame, et

$$\begin{aligned} \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{1j} X_j - \tilde{Y}_1^* \\ \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{2j} X_j - \tilde{Y}_2^* \\ \cdots & \cdots \\ \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathrm{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i &= \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{mj} X_j - \tilde{Y}_m^*. \end{aligned} \tag{110}$$

Tähistame

$$\tilde{Y}_i^* - \tilde{Y}_1^* = \tilde{y}_i \tag{111}$$

ja lahutame võrrandisüsteemi (110) esimese võrrandi kõigist ülejäänud võrrandeist. Saame $m - 1$ võrrandiga algebralise võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{m} (\tilde{c}_{2j} - \tilde{c}_{1j}) X_j &= (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{21}) X_1 + \tilde{y}_2 \\ \sum_{j=2}^{m} (\tilde{c}_{3j} - \tilde{c}_{1j}) X_j &= (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{31}) X_1 + \tilde{y}_3 \\ \cdots & \cdots \\ \sum_{j=2}^{m} (\tilde{c}_{mj} - \tilde{c}_{1j}) X_j &= (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{m1}) X_1 + \tilde{y}_m, \end{aligned} \tag{112}$$

mis võimaldab tootmise kiirusvektori esimese koordinaadi kaudu avaldada ülejäänud koordinaadid. Lahendanud võrrandisüsteemi (112), leiame:

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \bar{f}_{21} X_1 + \bar{F}_{21} \\
X_3 &= \bar{f}_{31} X_1 + \bar{F}_{31} \\
&\cdots\cdots \\
X_m &= \bar{f}_{m1} X_1 + \bar{F}_{m1},
\end{aligned}
\tag{113}
$$

kus $\bar{f}_{i1}$ ja $\bar{F}_{i1}$ on tundmatute kordajatega ja vabaliikmetega määratud avaldised. Asetanud X_2, X_3, ... , X_m väärtused võrdustest (113) võrrandisüsteemi (110) esimesse võrrandisse, saame tootmise kiirusvektori esimese koordinaadi leidmiseks esimest järku diferents-diferentsiaalvõrrandi kujul

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i (\bar{f}_{i1} X_1 + \bar{F}_{i1}) &= \\
= \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{1j} (\bar{f}_{j1} X_1 + \bar{F}_{j1}) - \tilde{Y}_1{}^*
\end{aligned}
\tag{114}
$$

või kujul

$$
\dot{X}_1(t) = q[X_1(t - \vartheta) + X_1(t - T - \vartheta)], \tag{114'}
$$

kus

$$
q = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{c}_{1j} \bar{f}_{j1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \varkappa_i \bar{f}_{i1}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} c_{1j} \bar{f}_{j1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_1 \varkappa_i \bar{f}_{i1}}. \tag{115}
$$

Kui tootmissüsteemi parameetrid võimaldavad tootmise tsükliteta (kriisivaba) kasvu kujul

$$
X_1 = X_{10} e^{\omega t},
$$

siis peab võrrandi (114′) karakteristlikul võrrandil

$$
\omega = q (e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}) \tag{116}
$$

leiduma positiivne reaallahend, mille lähisväärtuse saame arvutada näiteks valemiga (57). Kriisivaba kasvu korral avaldub tootmise kiirusvektori iga koordinaat seega valemiga

$$
X_i = \bar{f}_{i1} X_{10} e^{\omega t} + \bar{F}_{i1}, \quad \bar{f}_{11} = 1, \quad \bar{F}_{11} = 0, \tag{117}
$$

kus $i = 1, 2, \ldots, m$. Nagu võrrandisüsteemi (50) puhul, nii võime ka nüüd tõestada, et

$$
\bar{f}_{i1} = \frac{(-1)^{m+1} \det \begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ \tilde{C} & \bar{E}_m \end{pmatrix}}{(-1)^{m+1} \det \begin{pmatrix} e'_1 & 0 \\ \tilde{C} & \bar{E}_m \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} e'_1 & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}} \tag{118}
$$

$$
\bar{F}_{i1} = \frac{(-1)^{m} \det \begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ \tilde{C}_1(\tilde{Y}^*) & \bar{E}_m \end{pmatrix}}{(-1)^{m+1} \det \begin{pmatrix} e'_1 & 0 \\ \tilde{C} & \bar{E}_m \end{pmatrix}} = -\frac{\det \begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ C_1(Y^*) & \nu \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} e'_1 & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}}, \tag{119}
$$

kus $C_1(Y^*)$ on maatriks C, mille esimene veerg on asendatud vektoriga Y^*. Peame silmas võrdust (118) ja arvutame võrduse (115) järgi teguri q:

$$q = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} c_{1j} \det \begin{pmatrix} e'_j & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_1 \varkappa_i \det \begin{pmatrix} e'_i & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}} = (-1)^{m+1} \frac{\det C}{\det \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}}. \tag{120}$$

Kui $\varkappa$ on defineeritud võrdustega (46), siis lihtsustub maatriksi C üldelemendi valem (107):

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij} - \bar{\gamma}_i (1 - \sum_{l=1}^{m} a_{lj} - \delta \varkappa_j)(1 - \sigma). \tag{107'}$$

Arvutanud valemiga (107′) maatriksi C elemendid ja võrduse (120) järgi teguri q, võime valemiga (57)

$$\omega = \frac{2(qT - 1)}{T + 2\theta} + \eta$$

uurida tootmiskiiruse kasvutempo lähisväärtuse sõltuvust akumulatsiooninormist.

Lahendame poliitilise planeerimisülesande, määrates akumulatsiooninormi niisuguse väärtuse, mis tagaks tootmiskiiruse soovitud kasvutempo ω. Avaldame karakteristlikust võrrandist (116) teguri q:

$$q = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}},$$

ja otsime võrrandi

$$(-1)^{m+1} \frac{\det C}{\det \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix}} = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}}, \tag{121}$$

lahendeid lõigul $\sigma \in [0,1]$. Võrrandi (121) lahendamine on eriti lihtne, kui tootmissektori sisekäivet ei arvestata ($A = 0$). Viimasel juhul on võrrandi (121) vasaku poole lugeja ja nimetaja akumulatsiooninormi lineaarsed avaldised:

$$\det C = 1 - \mathrm{K}(1 - \sigma) \tag{122}$$

$$(-1)^{m+1} \det \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ C & \nu \end{pmatrix} = \mathrm{N} + \mathrm{M}(1 - \sigma), \tag{123}$$

kus

$$\mathrm{K} = \sum_{l=1}^{m} \bar{\gamma}_l (1 - \delta \varkappa_l) \tag{124}$$

$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \nu_i \tag{125}$$

$$\mathrm{M} = \sum_{i,j=1}^{m} \varkappa_i \nu_j [\bar{\gamma}_i (1 - \delta \varkappa_j) - \delta_{ij} \sum_{l=1}^{m} \bar{\gamma}_l (1 - \delta \varkappa_l)], \tag{126}$$

ja võrrand (121) taandub akumulatsiooninormi σ suhtes lineaarvõrrandiks

$$\frac{1 - \mathrm{K}(1 - \sigma)}{\mathrm{N} + \mathrm{M}(1 - \sigma)} = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}}. \tag{127}$$

Avaldanud võrrandist (127) akumulatsiooninormi, leiame

$$\sigma = 1 - \frac{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)} - \omega \mathrm{N}}{[e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}]\mathrm{K} + \omega \mathrm{M}}. \tag{128}$$

Valem (128) võimaldab uurida akumulatsiooninormi sõltuvust tootmiskiiruse kasvutempost.

Peatume lühidalt poliitika kavandamise optimumülesandel, kui arendamise eesmärk on seotud tarbimisfondi maksimiseerimisega ja arendamispoliitika realiseerimisvahendiks on akumulatsiooninorm. Lähtume tarbimisfondi ja tootmiskiiruse sõltuvusest (105), mis sel juhul, kui $\varkappa$ määrab võrdus (46), avaldub kujul

$$\overline{Y} = (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij} X_j - \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i\right). \tag{105'}$$

Asendanud sõltuvuses (105′) tootmiskiiruse koordinaadid võrdustest (113), saame

$$\overline{Y}_t = (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{f}_{i1} - \sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}\overline{f}_{j1} - \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \overline{f}_{i1}\right) X_{10} e^{\omega t} +$$

$$+ (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{F}_{i1} - \sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}\overline{F}_{j1} - \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \overline{F}_{i1}\right). \tag{129}$$

Kui tootmissektori sisekäivet ei arvestata ($a_{ij} = 0$), siis osutuvad suluavaldised sõltuvuse (129) paremas pooles akumulatsiooninormi murdlineaarseteks avaldisteks ja tarbimisfondi sõltuvus akumulatsiooninormist avaldub järgmiselt:

$$\overline{Y}_t = (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{f}_{i1} - \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \overline{f}_{i1}\right) X_{10} e^{\omega t} +$$

$$+ (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{F}_{i1} - \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \overline{F}_{i1}\right) =$$

$$= (1-\sigma)\left[\frac{\mathrm{N}_1 + M_1(1-\sigma)}{\mathrm{N}_0 + M_0(1-\sigma)} X_{10} e^{\omega t} - \frac{\mathrm{N}_2 + M_2(1-\sigma)}{\mathrm{N}_0 + M_0(1-\sigma)}\right], \tag{130}$$

milles konstandid M_0, N_0, M_1, N_1, M_2, N_2 on määratud tootmissüsteemi parameetritega $\varkappa_i$, ν_i, γ_i, Y_i^* ja δ. Valides arendamise eesmärgiks tarbimisfondi maksimiseerimise ajal $\overline{T}$, tuleb optimaalse akumulatsiooninormi lähisväärtuse leidmiseks uurida lõigul $\sigma \in [0, 1]$ funktsiooni

$$\overline{Y}_{\overline{T}} = (1-\sigma)\left[\frac{\mathrm{N}_1 + M_1(1-\sigma)}{\mathrm{N}_0 + M_0(1-\sigma)} X_{10} e^{\omega\overline{T}} - \frac{\mathrm{N}_2 + M_2(1-\sigma)}{\mathrm{N}_0 + M_0(1-\sigma)}\right] \tag{131}$$

maksimumi, kui

$$\omega = \frac{2(qT-1)}{T+2\theta} + \eta, \quad q = \frac{1 - \mathrm{K}(1-\sigma)}{\mathrm{N} + M(1-\sigma)}. \tag{132}$$

Kui valime arendamise eesmärgiks tarbimisfondi maksimiseerimise ajavahemikus $[0, \overline{T}]$, tuleb optimaalse akumulatsiooninormi lähisväärtuse leidmiseks uurida samadel kõrvaltingimustel funktsiooni

$$\int_0^{\overline{T}} \overline{Y}_t\, dt = (1-\sigma)\left[\frac{\mathrm{N}_1 + M_1(1-\sigma)}{\mathrm{N}_0 + M_0(1-\sigma)} X_{10} \frac{e^{\omega\overline{T}} - 1}{\omega} - \frac{\mathrm{N}_2 + M_2(1-\sigma)}{\mathrm{N}_0 + M_0(1-\sigma)} \overline{T}\right] \tag{133}$$

maksimumi lõigul [0, 1]. Teinud kindlaks optimaalse akumulatsiooninormi lähisväärtuse, võime võrduste (132) järgi arvutada tootmiskiiruse optimaalse kasvutempo lähisväärtuse. Viimase järgi võime võrdustest (89), (91) ja (92) leida lõpuks optimaalsete hindade lähisväärtused.

KIRJANDUS

1. E. Leinemann, Tootmise tasakaal ja omahind. I. ENSV TA Toimetised, Ühiskonnateaduste Seeria, 2, 1966.
2. E. Leinemann, Tootmise tasakaal ja omahind. II. ENSV TA Toimetised, Ühiskonnateaduste Seeria, 3, 1966.
3. E. Leinemann, Tootmise tasakaal ja omahind. III. ENSV TA Toimetised, Ühiskonnateadused, 1, 1967.
4. J. Tinbergen, Economic Policy: Principles and Design. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1956.
5. J. Tinbergen, The Design of Development. Baltimore, The Johns Hopkins Press, 1958.
6. J. Tinbergen, H. C. Bos, Mathematical Models of Economic Growth. New York, McGraw-Hill, 1962.
7. H. B. Chenery, Development Policies and Programmes. Economic Bulletin for Latin America, 3, 1958.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
1. XI 1966

Õiendus

Artiklisse «Tootmise tasakaal ja omahind. III», mis ilmus selle ajakirja käesoleva aasta nr-s 1, on autoril sattunud eksimusi.

Lk-l 42 alt 15. real on trükitud $\frac{\partial X}{\partial t}$, peab olema $\frac{\partial X}{\partial t}dt$.

Lk-l 56 valemites (66′) on trükitud:

$$\overline{n}_1 = -[\overline{\lambda}_1(1+\gamma)\xi + \overline{\lambda}_2\varsigma]/\overline{\lambda}_2\gamma;$$

peab olema:

$$\overline{n}_1 = [\overline{\lambda}_1(1+\gamma)(\beta\pi - \xi) - \overline{\lambda}_2(1+\beta)\varsigma]/\overline{\lambda}_2(1+\beta)\gamma.$$

Lk-l 57 tuleb esimesed kolm rida lugeda järgmiselt:
Valemi (68′) rakendamisel arvestame, et

$$\beta = -\frac{1-\overline{\lambda}_1-\overline{\lambda}_2}{1-\overline{\lambda}_2}, \tag{69′}$$

mis tingimuse $\overline{\eta} = 1$ tõttu tuleneb võrdustest (33).

Lk-l 57 ülalt seitsmendal real on trükitud (69′), peab olema (68′), alt kümnendal real on trükitud (59′), peab olema (63′).

Lk-l 65 ülalt 14. real on trükitud $\overline{X}_i$, peab olema $\overline{X}_1$.

Э. ЛЕЙНЕМАНН

РАВНОВЕСИЕ И СЕБЕСТОИМОСТЬ ПРОИЗВОДСТВА. IV

Резюме

Рассмотренная во второй части работы теория воспроизводства обобщается на случай, когда основные фонды и производственный сектор неоднородны. Аналогично второй и третьей частям [2, 3] трактовка основывается на общих уравнениях равновесия производства (*) и (**), выведенных в первой части работы [1]. При исследовании проблем, связанных со спецификой основных фондов, разрабатывается метод для дифференцированного расчета платы за фонды по видам основных средств. Для четкости изложения изучаются только два вида основных средств с различными сроками эксплуатации и производства. Выводятся формулы (13), (20), (21), (24) и (25), позволяющие при таких предпосылках исчислить норму аккумуляции и плату за фонды, гарантирующую желаемый темп развития. В целях обобщения макродинамической модели равновесия, рассмотренной во второй части работы, технические и свободные параметры производственной системы принимаются в виде векторов и матриц с построением общей модели

$$\mathfrak{J}(E-\mathfrak{X})^{-1}\mathbf{D}\varkappa X=(\alpha-A)X, \tag{38}$$

применимой для многих различных случаев хозяйственной деятельности. Параметры модели (38) обозначают:

$\mathfrak{J}$ — инвестиционная деятельность;
$\mathfrak{X}$ — деятельность по возмещению;
X — вектор скорости производства;
$\varkappa$ — матрица норм фондоемкости;
A — матрица норм прямых затрат собственной продукции;
α — диагональная матрица политики цен;
E — единичная матрица;
$\mathbf{D}$ — оператор дифференцирования.

Исследуется одна из простейших разновидностей общей модели (38) для случая, когда $\varkappa$, $\mathfrak{J}$ и $(E-\mathfrak{X})^{-1}\mathbf{D}$ определены равенствами (46) и (47). Решаются аналитическая и политическая задачи планирования, уделяя особое внимание зависимости политики цен от роста и отраслевой структуры производства. При анализе себестоимости производственной системы показывается, что политика цен определяет цены однозначно, и изучается более подробно, при каком размере процента учета в производственной системе цены удовлетворяют критерию цен и представляют собой себестоимость в понимании экономической науки [1]. При рассмотрении влияния жизненного уровня и роста доходов населения на потребление постулируется зависимость последнего от фонда потребления. На основе этого исследуется зависимость темпа развития от норм аккумуляции. В конце статьи автор коротко останавливается на планировании оптимальной политики развития, исходя из предположения, что цель развития связана с максимизацией фонда потребления и средством реализации политики является норма аккумуляции.

При применении основных понятий теории воспроизводства, таких, как аналитическая и политическая задачи планирования, цель развития, средство реализации политики и др., автор опирался на труды Я. Тинбергена, Х. Боса и Х. Ченери [4, 5, 6, 7]. Некоторые основные понятия, например понятие политики цен и критерия цен, в этом значении вводятся впервые. Доказывается, что эти понятия целесообразны и оправдывают свое применение. Подтверждается плодотворность разработанного автором метода для исследования скорости и себестоимости развития по общим уравнениям равновесия производства.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/XI 1966

E. LEINEMANN

THE PRODUCTION EQUILIBRIUM AND COST PRICE. IV

Summary

This paper is devoted to the generalization of the theory of reproduction discussed in the second part of the work, for the case of heterogeneous capital goods and the production sector including many production units. The treatment is based on the equations of production equilibrium

$$X_{22}\bar{E}_m + Y = X \tag{*}$$

$$X'_{22}h + R = (\operatorname{diag} X)h \tag{**}$$

deduced in the first part of the work [1], where

X_{22} — internal turnover of production system,
X — development speed of production system,
Y — speed of final consumption,
R — speed of consumption of production primary factors,
h — production system cost price,
$\bar{E}_m$ — m-dimensional vector of unit coordinates.

Let us substitute in the equation (*) internal turnover by the expression

$$X_{22} = \mathfrak{A} \operatorname{diag} X$$

wherein matrix $\mathfrak{A}$ is *economic activity of production system*, and equation (*) takes the form of the Leontief model

$$\mathfrak{A}X + Y = X. \tag{***}$$

The equations of production equilibrium (**) and (***) will be applied to study the specificity of capital goods. For the clarity of exposition the treatment is confined to the assumption that there exist only two types of capital goods with separate lifetimes and gestation periods, called first- and second-order capital goods. The paper deals with a capital model involving first- and second-order capital goods, discussing the dependence of the savings rate on the rate of development. The savings rate σ needed to warrant the desired rate of development ω is calculated by formulas

$$\sigma = \frac{\alpha - a - \bar{\delta}\varkappa}{1 - a - \bar{\delta}\varkappa} \tag{21}$$

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_1\varkappa_2(1 - e^{-\omega T_1})\omega}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1\omega)(1 - e^{-\omega T_2})} + \delta_2 \tag{20}$$

$$\alpha = a + \frac{\varkappa\left[\frac{\varkappa_2}{\theta_1}\left(e^{\omega\theta_1} - 1\right) - \frac{\varkappa_1}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2} - 1\right)\right]\omega + \frac{\varkappa}{\theta_2}\left(e^{\omega\theta_2} - 1\right)\left(1 - e^{-\omega T_1}\right)}{(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1\omega)(1 - e^{-\omega T_2})} \tag{13}$$

where

a — production input coefficient,
$\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — capital-output ratios in the production of consumer goods, second-order capital goods, and first-order capital goods, respectively,
θ_1, θ_2 — gestation lags in production of second- and first-order capital goods,
T_1, T_2 — lifetimes of second- and first-order capital goods,
δ_1, δ_2 — depreciation rates of second- and first-order capital goods.

Applying the equation of the production system cost price (**) to the given capi-

tal model, it can be shown that prices for the use of second- and first-order capital goods, respectively, are

$$h_{E1} = \chi_1 \frac{\varphi_1 l + (1 - a - \varkappa\varphi_2\psi_2) l_{I1} + \varkappa\varphi_1\psi_2 l_{I2}}{1 - a - \varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2} \tag{24}$$

$$h_{E2} = \psi_2 \frac{(\varkappa_2\varphi_1\chi_1 + \varphi_2) l + \varkappa_2(1-a)\chi_1 l_{I1} + (1-a) l_{I2}}{1 - a - \varkappa\varkappa_2\varphi_1\psi_2\chi_1 - \varkappa\varphi_2\psi_2}$$

where

$$\varphi_1 = (e^{\varrho\theta_1} - 1)/\varrho\theta_1, \qquad \varphi_2 = (e^{\varrho\theta_2} - 1)/\varrho\theta_2$$

$$\psi_2 = \omega/(1 - e^{-\omega T_2}) \tag{25}$$

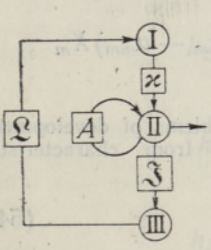
$$\chi_1 = \omega/(1 - e^{-\omega T_1} - \varkappa_1\omega)$$

and

l, l_{I1}, l_{I2} — labour input coefficients in the production of consumer goods, second-order capital goods, and first-order capital goods,

ϱ — discount rate.

The dynamic macromodel of production equilibrium discussed in the second part of the work can be generalized on the following lines. Consider a production system represented by the graph



where the economic meaning of Roman numerals I, II, III, and letters $\varkappa$, A, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{L}$ is as follows

I — equipment, the stock vector of which is $\overline{K}$,
II — production, the speed of which is X,
III — investment sector, the output of which is I^+,
$\varkappa$ — matrix of capital-output ratios,
A — matrix of production input coefficients or technology of production sector,
$\mathfrak{J}$ — matrix of investment activity,
$\mathfrak{L}$ — composite operator of replacement activity $\mathfrak{R}$, differential operator $\mathbf{D}$, and unit matrix E, defined by the formula

$$\mathfrak{L} = (E - \mathfrak{R})^{-1}\mathbf{D}. \tag{37}$$

Denote the vector of consumption speed by Y. Apply the Leontief model (***) to the given graph and obtain

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & A & \mathfrak{J} \\ \mathfrak{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{K} \\ X \\ I^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{K} \\ X \\ I^+ \end{pmatrix} \tag{31}$$

which yields the equation

$$AX + \mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X + Y = X. \tag{32}$$

Model (32) can be written in the form

$$\mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X = (a - A) X \tag{38}$$

where a is a diagonal matrix of price policy defined by equation

$$X - Y = aX. \tag{33}$$

According to the concrete shape of matrices $\varkappa$, $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{R}$ it will be seen that model (38) takes a multitude of separate forms applicable in many various situations of economic actuality. If, for instance, the stock of equipment or capital goods is homogeneous with lifetime of T and investment activity characterized by point input at the beginning of the gestation lag θ, followed by the point output at the end of the lag, then

$$\varkappa = (\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_m), \quad \mathfrak{I} = \left\| \begin{matrix} \nu_1 \underset{\theta}{\mathcal{E}} \\ \nu_2 \underset{\theta}{\mathcal{E}} \\ \vdots \\ \nu_m \underset{\theta}{\mathcal{E}} \end{matrix} \right\|, \quad \sum_{i=1}^{m} \nu_i = 1 \tag{46}$$

$$\mathfrak{L} = (1 - \mathfrak{R})^{-1} \mathbf{D} = (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{D} \tag{47}$$

where $\underset{\theta}{\mathcal{E}}$ and $\underset{-T}{\mathcal{E}}$ are shift operators with steps θ and $-T$. Under these assumptions model (38) will take the form

$$\begin{aligned} &\nu_1 \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i = (a_1 - a_{11}) X_1 - a_{12} X_2 - \ldots - a_{1m} X_m \\ &\nu_2 \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i = - a_{21} X_1 + (a_2 - a_{22}) X_2 - \ldots - a_{2m} X_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\nu_m \underset{\theta}{\mathcal{E}} (1 - \underset{-T}{\mathcal{E}})^{-1} \mathbf{D} \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i X_i = - a_{m1} X_1 - a_{m2} X_2 - \ldots + (a_m - a_{mm}) X_m \end{aligned} \tag{48}$$

Model (48) can be used to discuss analytical and political problems of development planning. The solution of an analytical problem is obtained from characteristic equation of system (48)

$$\omega = q (e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}) \tag{54}$$

which yields an approximation

$$\omega = \frac{2(qT - 1)}{T + 2\theta} + \eta \tag{57}$$

where the remainder η is determined by formulas (58) and

$$q = (-1)^{m+1} \frac{\det (a - A)}{\det \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ a - A & \nu \end{pmatrix}} . \tag{53'''}$$

Formulas (53‴) and (57) enable us to examine the dependence of the rate of development ω on price policy a. The political problem has been solved, provided the proportions of activities

$$X_i / X_1 = f_{i1} \tag{51'}$$

be given. It can be shown that the rate of savings warranting the desired expansion

$$X_i(t) / X_i(0) = g$$

is designed by formula

$$\sigma = \frac{(q - \delta) \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}}{\sum_{i=1}^{m} f_{i1} - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} f_{j1} - \delta \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i f_{i1}} \tag{75}$$

where

$$q = \frac{1}{t} \ln g / (e^{-\frac{\theta}{t}} - e^{-\frac{T+\theta}{t}}) \tag{61'}$$

and δ is the rate of depreciation.

Suppose the costs vector of production primary factors (e. g. labour) be given by

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

where L is the respective vector for production sector. Discuss the cost price of the production system given by model (31). Compute internal turnover and apply to it the cost price equation (**). Multiplying the equation from left by diagonal matrix $(\operatorname{diag} \boldsymbol{X})^{-1}$, obtain

$$\begin{Vmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & A & \nu e^{\varrho\theta} \\ \frac{\omega}{1 - e^{-\omega T}} & 0 & 0 \end{Vmatrix}' \begin{Vmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h_E \\ h \\ h_I \end{Vmatrix} \tag{82}$$

which yields the solution

$$h_E = \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1 - e^{-\omega T}} \nu' \left[\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1 - e^{-\omega T}} \nu \varkappa \right)^{-1} \right]' l$$

$$h = \left[\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\omega}}{1 - e^{-\omega T}} \nu \varkappa \right)^{-1} \right]' l \tag{83}$$

$$h_I = e^{\varrho\theta} \nu' \left[\left(E - A - \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1 - e^{-\omega T}} \nu \varkappa \right)^{-1} \right]' l$$

where

h_I, h_E — cost prices of investment goods and the use of equipment, respectively,

h — cost price of consumer goods,

$l = (\operatorname{diag} X)^{-1} L$ — input coefficient vector of production primary factors in the production sector.

Let the discount rate ϱ be so chosen that $\varrho = \omega$. It is easy to prove now that prices (83) will satisfy the price criterion

$$h'Y = \sum_{i=1}^{m} L_i \tag{85}$$

and represent the cost price in the sense of economics [1]. Formulas (57) and (53''') imply that prices (83) are uniquely determined by the price policy. If internal turnover of production sector is ignored ($A = 0$) and the discount rate is determined by the rate of development ($\varrho = \omega$), then the dependency of prices on the price policy takes a particularly simple form

$$h_E = \frac{\bar{q} \sum_{i=1}^{m} l_i \nu_i}{1 - \bar{q} \sum_{i=1}^{m} \nu_i \varkappa_i} \tag{92}$$

$$h_1 = l_1 + \overline{q}\varkappa_1 \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i v_i}{1 - \overline{q} \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \varkappa_i}$$

$$h_2 = l_2 + \overline{q}\varkappa_2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i v_i}{1 - \overline{q} \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \varkappa_i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{91}$$

$$h_m = l_m + \overline{q}\varkappa_m \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i v_i}{1 - \overline{q} \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \varkappa_i}$$

where

$$\overline{q} = \frac{\omega e^{\varrho\theta}}{1 - e^{-\omega T}} = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}} = q = 1/\sum_{i=1}^{m} \frac{v_i \varkappa_i}{a_i}. \tag{93}$$

The assignment of the motivated values to the price policy stipulates reliable information in order to estimate how the consumption of diverse goods will be influenced by the living standards and growth of income in particular social groups. Assume the consumption vector with coordinates in monetary units and postulate the dependence of consumption on the growth of income.

A_C. If the *per capita* income $\overline{v}$ varies within certain prescribed limits $\overline{v} \in [\overline{v}_1, \overline{v}_2]$, marginal propensity to consume $\overline{\gamma}_i$ of the good i with regard to the total income $\overline{Y}$ is a constant

$$\frac{dY_i}{d\overline{Y}} = \overline{\gamma}_i. \tag{98}$$

B_C. The sum total of consumption equals the total income

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = \overline{Y}. \tag{99}$$

Postulates (A_C) and (B_C) imply that

$$Y_i = \overline{\gamma}_i \overline{Y} + Y_i^* \tag{100}$$

where

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} Y_i^* = 0. \tag{102}$$

It follows from the postulates of distribution of national income

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^- = \sum_{i=1}^{m} F_{1i}^+ + S \tag{A_N}$$

$$S = \sigma(S + \overline{Y}) \tag{B_N}$$

where

I_i^- — i-th coordinate of investment input,
F_{1i}^+ — depreciation allowances in production unit i,
S — savings

and from model (31) that the dependence of total consumption on production speed is given by

$$\overline{Y} = (1-\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}X_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} \delta_l \varkappa_{li} X_i\right). \tag{105}$$

In virtue of (105) model (32) will take the form

$$\mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X = CX - Y^* \tag{106}$$

where Y^* is a vector with the coordinates of Y_i^* and C is a matrix with the elements of

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij} - \overline{\gamma}_i\left(1 - \sum_{l=1}^{m} a_{lj} - \sum_{l=1}^{k} \delta_l \varkappa_{lj}\right)(1-\sigma) \tag{107}$$

(δ_{ij} is the Kronecker delta and δ_l is the depreciation rate of capital good l). Model (106) will be discussed under the assumption of $\varkappa$, $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{L}$ given by (46) and (47). It can be shown that formula (57) applies as a solution of an analytical problem, whereby

$$q = (-1)^{m+1}\frac{\det C}{\det\begin{pmatrix}\varkappa & 0\\ C & \nu\end{pmatrix}} \tag{120}$$

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij} - \overline{\gamma}_i\left(1 - \sum_{l=1}^{m} a_{lj} - \delta\varkappa_j\right)(1-\sigma). \tag{107'}$$

The treatment of the political problem requires that under the same assumptions the solutions of the equation

$$(-1)^{m+1}\frac{\det C}{\det\begin{pmatrix}\varkappa & 0\\ C & \nu\end{pmatrix}} = \frac{\omega}{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}} \tag{121}$$

should be studied in unit segment. The solution of the equation (121) is eye-catching by its extraordinary simplicity when no internal turnover of production sector has been taken into account ($A = 0$). Then

$$\sigma = 1 - \frac{e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)} - \omega \mathrm{N}}{\left[e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)}\right]\mathrm{K} + \omega \mathrm{M}} \tag{128}$$

where

$$\mathrm{K} = \sum_{l=1}^{m} \overline{\gamma}_l(1 - \delta\varkappa_l) \tag{124}$$

$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \nu_i \tag{125}$$

$$\mathrm{M} = \sum_{i,j=1}^{m} \varkappa_i \nu_j\left[\overline{\gamma}_i(1-\delta\varkappa_j) - \delta_{ij}\sum_{l=1}^{m} \overline{\gamma}_l(1-\delta\varkappa_l)\right]. \tag{126}$$

In the concluding section of the paper, the optimum problem of policy planning is briefly dwelt upon, the aim of development being linked with maximum consumption and the rate of savings being the instrument of development policy.

Using the fundamental concepts of the theory of reproduction, e. g. the concepts of an analytical and political problem, aim and instrument of development policy, the author has proceeded from the works of J. Tinbergen, H. C. Bos and H. B. Chenery [4, 5, 6, 7]. Some fundamental concepts, such as the price policy and price criterion have been introduced in this work and in this meaning for the very first time. The work demonstrates these concepts to be productive and justifies their introduction. The research has confirmed the applicability of the method proposed by the author for an inquiry into the production speed and cost price using the general equations of production equilibrium.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
Nov. 1, 1966