EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÕIDE
ÜHISKONNATEADUSTE SEERIA. 1966, Nr. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК. 1966, № 3

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1966.3.01

E. LEINEMANN

TOOTMISE TASAKAAL JA OMAHIND. II

Töö teine osa käsitleb tootmissüsteemi makrodünaamika aluseid. Nagu esimene osa [1], nii on ka see rajatud tootmisüksuse mõistele, mille alla peale tootmissektori kuuluvad investeeringud ja põhifondid. Artiklis defineeritakse tootmisdünaamika põhimõiste — investeerimise mõiste — ning käsitletakse investeerimissektori omahinda ja tagasisidet tootmisega. Investeerimissektori tagasiside uurimisel eristatakse põhivahendeid ja põhifonde, mille tasakaalu käsitlemine on seotud tootmisüksuse varu mõistega: *tootmisüksuse varu* kasv on sisend- ja väljundvoo vahe. Töö esimeses osas vaatlesime tootmisüksuse sisendvoo ja tootmiskiiruse mõnda funktsionaalset sõltuvust, mis iseloomustab tootmisüksuse majandustegevust. Käesolevas artiklis antakse majandustegevuse mõistele järgmine üldistus: *tootmisüksuse majandustegevus* on operaator, mis seab tootmisüksuse väljundvooga vastavusse sisendvoo või vastupidi. Majandustegevuse mõiste konkretiseerimiseks püstitatakse artiklis rida hüpoteese, mis dikteerivad majandustegevuse kui operaatori ühe või teise erikuju. Nagu staatilisel planeerimisel, nii on ka dünaamilise tasakaalumudeli käsitlemisel rakendatud Leontjevi mudelit

$$\mathfrak{A}X + Y = X, \tag{*}$$

kus $\mathfrak{A}$ on maatriks, mille elementide hulgas antud juhul leidub operaatoreid. Artiklis konstrueeritakse tootmise determineeritud lineaarne dünaamiline tasakaalumudel, mis arvestab investeerimis-, asendamis- ja amortiseerimistegevust, ning uuritakse nende majandustegevuste koostoimet tootmisele ja hinnapoliitikale. Artikli lõpuosas käsitletakse tootmissüsteemi majandustegevusele vastava optimaalse hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi kavandamist.

1. Majandusüksuse mõiste käsitlemisel defineerime investeeringu i kui mittenegatiivse ruutmaatriksi, mille i-s veerg on ainuke nullist erinev veerg ja mille i-s rida on null [1]. Investeeringu niisuguses definitsioonis, mis on otstarbekohane staatilisel planeerimisel, väljendub investeerimistegevuse üks külg — investeerimine kui akumulatsioon —, jääb aga varjatuks teine külg — investeerimise tagasiside tootmisega. Investeerimistegevuse eesmärk on tootmise laiendamine. Dünaamilisel planeerimisel on seetõttu otstarbekohane investeeringute all mõista mitte lõpptoodanguüksust, vaid tootmisüksust — investeerimissektorit. Investeerimissektor on seotud ühelt poolt tootmissektori väljundvoo investeeritava osaga ja teiselt poolt tootmissüsteemi põhifondidega.

D e f i n i t s i o o n 1. *Investeerimissektor I* on tootmisüksus, mille sisendvoog I^- on võrdne tootmissektori väljundvoo investeeritava osaga ja mille väljundvoogu I^+ nimetatakse uuteks põhivahenditeks.*

---

* Nii siin kui ka edaspidi mõistame tootmisüksuse sisend- ja väljundvoo all tema sisend- ja väljundvektori nullist erinevaid koordinaate.

Investeerimistegevuse käsitlemisel tuleb silmas pidada, et investeerimissektori sisend- ja väljundvoog võivad kuuluda eri perioodidesse, mida eraldab viivitusaeg. *Investeeringute viivitusaeg* θ on investeerimistegevuse alguse t ja investeerimistegevusega loodud uute põhifondide tegevusseastumise perioodi $t+\theta$ vaheline ajavahemik. Investeeringute viivitusaeg θ sõltub peamiselt sektorist, kuhu investeeritakse, sest eri sektorid vajavad erinevaid kapitaalehitisi, mille ehitamise aeg on erinev. Viivitusaeg võib peale selle oleneda veel seadmete liigist, mida investeeritakse, ja investeerimisprojektist, mille järgi investeeritakse. Nii näiteks on eri masinatel erinevad monteerimisajad. Igas sektoris võidakse rakendada erinevaid investeerimisprojekte, milles tööde liigid, maksumus ja ajaline järjestus võivad olla erinevad.

Defineerime investeerimistegevuse kui abstraktse kvantitatiivse mõiste.

Definitsioon 2. *Investeerimistegevus* on niisugune operaator $\mathfrak{J}$, mis seab investeerimissektori väljundvooga I^+ vastavusse sisendvoo I^-:

$$I^- = \mathfrak{J}(I^+). \tag{1}$$

Investeerimistegevuse kohta võime püstitada mitmesuguseid hüpoteese, millest olenevalt investeerimisoperaatoril võib olla kord üks, kord teine konkreetne kuju. Investeerimistegevuse hüpoteesidest on kõige lihtsamad näiteks järgmised kolm [2].

A$_\text{I}$. Investeerimissektori sisendvoole I^- vastav väljundvoog I^+ on sisendiga võrdne, kuid hilineb θ perioodi võrra.

$$I^-(t) = I^+(t+\theta). \tag{2}$$

Hüpoteesi (A$_\text{I}$) järgi on investeerimissektoril *punkt-sisend*, mis tähendab seda, et sisend ei ole ajavahemikus $[t, t+\theta]$ perioodide järgi komponentideks jaotatud, vaid on tervikuna koondatud ajavahemiku alguspunkti t. Punkt-sisendile vastab ajavahemiku lõpul $t+\theta$ *punkt-väljund* $I^+(t+\theta)$.

Võrdusest (2) nähtub, et investeerimisoperaator on nihkeoperaator sammuga θ:

$$\mathfrak{J} = \underset{\theta}{\mathcal{E}}. \tag{3}$$

Kui viivitusaeg $\theta = 0$, siis investeerimisoperaator taandub ühikoperaatoriks:

$$\mathfrak{J} = 1. \tag{4}$$

Sel juhul vastab investeerimissektori sisendvoole võrdne ja samaaegne väljundvoog:

$$I^-(t) = I^+(t). \tag{5}$$

B$_\text{I}$. Investeerimissektori väljundvoole $I^+(t+\theta)$ vastaval sisendvool on ajavahemikus $[t, t+\theta]$ diskreetne jaotus

$$\begin{gathered} I_\tau^-(t+\tau) = \nu_\tau I^+(t+\theta) \\ \sum_{\tau=0}^{\theta-1} \nu_\tau = 1, \end{gathered} \tag{6}$$

kus kordajad ν_τ, $\tau = 0, 1, \ldots, \theta-1$ on mittenegatiivsed arvud.

Rakendame operaatortähistust ja kirjutame võrduste (6) esimese võrduse kujul

$$\underset{\tau}{\mathcal{E}} I_\tau^-(t) = \nu_\tau \underset{\theta}{\mathcal{E}} I^+(t),$$

millest leiame τ perioodi tagasi alustatud investeerimistegevuse osasisendi perioodil t:

$$I_\tau^-(t) = \nu_\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}} I^+(t). \tag{6'}$$

Investeerimissektori kogusisend $I^-(t)$ perioodil t on $0, 1, \ldots, \theta-1$ perioodi tagasi alustatud investeerimistegevuse osasisendite $I_\tau^-(t)$ summa:

$$I^-(t) = \sum_{\tau=0}^{\theta-1} I_\tau^-(t) = \sum_{\tau=0}^{\theta-1} \nu_\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}} I^+(t). \tag{7}$$

Võrdusest (7) nähtub, et antud juhul on investeerimistegevus muutuva sammuga nihkeoperaatorite lineaarne kombinatsioon:

$$\mathfrak{J} = \sum_{\tau=0}^{\theta-1} \nu_\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}}. \tag{8}$$

C_I. Investeerimissektori väljundvoole $I^+(t+\theta)$ vastaval sisendvool on ajavahemikus $[t, t+\theta]$ pidev jaotus tihedusega

$$\begin{gathered} I_\tau^-(t+\tau) = \nu_\tau I^+(t+\theta) \\ \int_0^\theta \nu_\tau d\tau = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Läheme võrduste (9) esimeses võrduses üle operaatortähistusele ja avaldame osatiheduse $I_\tau^-(t)$:

$$I_\tau^-(t) = \nu_\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}} I^+(t). \tag{10}$$

Investeerimissektori sisendvoo kogutihedus $I^-(t)$ on osatiheduse integraal:

$$I^-(t) = \int_0^\theta \nu_\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}} I^+(t) d\tau. \tag{11}$$

Võrdusest (11) nähtub, et hüpoteesi (C_I) järgi on investeerimistegevus integraaloperaator kujul

$$\mathfrak{J} = \int_0^\theta d\tau \nu_\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}}. \tag{12}$$

Kui sisendvoo jaotus on ühtlane, s. o. $\nu_\tau = \text{const}$, siis võrduste (9) järgi $\nu_\tau = \frac{1}{\theta}$ ja investeerimistegevus (12) taandub keskväärtuse integraaloperaatoriks kujul

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta d\tau \underset{\theta-\tau}{\mathcal{E}}. \tag{13}$$

Vaatleme investeerimissektorit, mida iseloomustab investeerimistegevus $\mathfrak{J}$. Lähtume tootmisüksuse-omahinna definitsioonist [1] ja arvutame investeerimissektori omahinna. Käsitleme algul juhtumit, mil investeerimistegevus on niisugune, et investeerimissektori teineteisele vastav sisend- ja väljundvoog on samas perioodis. Olgu investeerimissektori sisendvoog I^- antud väärtuseühikutes. Sel juhul sisendihind $\underline{h} = 1$ ja investeerimissektori-omahinna võrrand avaldub kujul

$$I^- = I^+ h.$$

Asendame omahinna võrrandis sisendvoo võrdusest $I^- = \mathfrak{J}(I^+)$ ja avaldame investeerimissektori omahinna:

$$h = \frac{\mathfrak{J}(I^+)}{I^+}.$$

Investeerimissektori sisend- ja väljundvoo lineaarse sõltuvuse korral näiteks

$$\mathfrak{J}(I^+) = aI^+ + b$$

ja

$$h = a + \frac{b}{I^+};$$

ruutsõltuvuse korral

$$\mathfrak{I}(I^+) = \mu(I^+)^2 + aI^+ + b$$

ja

$$h = \mu I^+ + a + \frac{b}{I^+}.$$

Esimesel juhul on omahind väljundi kahanev funktsioon. Teisel juhul, kui väljundi väärtus $I^+ = \sqrt{\frac{b}{\mu}}$, on omahinnal väikseim väärtus $h_{\min} = a + 2\sqrt{\mu b}$.

Käsitleme praktika seisukohalt olulisemat juhtumit, mil investeerimistegevus $\mathfrak{I}$ on niisugune, et investeerimissektori sisend- ja väljundvoog kuuluvad eri perioodidesse. Eri perioodidesse kuuluvate väärtuste võrdlemiseks kantakse nad üle ühte perioodi, milleks valitakse tavaliselt varaseim [3]. Võtku tootmisprotsessist osa väärtus, mille suurus eri perioodidel t ja t' olgu vastavalt S ja S'. Defineerime diskonteerimise mõiste.

Definitsioon 3. *Diskonteerimiseks oodusajaga* θ nimetatakse operaatorit $\underset{\theta}{\mathfrak{D}}$, mis teisendab perioodi t' kuuluva väärtuse S' perioodi t kuuluvaks väärtuseks S:

$$S = \underset{\theta}{\mathfrak{D}} S', \tag{14}$$

kus θ on perioode t ja t' eraldav ajavahemik $(\theta = t' - t)$.

Diskonteerimishüpoteesidest lihtsaim on konstantse kasvutempo hüpotees. Olgu vaadeldava väärtuse kasvutempo jääv suurus. Siis

$$S' = Se^{\varrho\theta}$$

ja

$$S = S'e^{-\varrho\theta}. \tag{15}$$

Võrdustest (14) ja (15) järeldame, et

$$\underset{\theta}{\mathfrak{D}} = e^{-\varrho\theta}. \tag{16}$$

Diskonteerimisoperaatorit kujul (16) nimetatakse *diskonteerimiskordajaks*, kusjuures 100ϱ on *diskontoprotsendi määr*. Kui diskontoprotsendi määr $100\varrho = 0$, siis diskonteerimisoperaator taandub ühikoperaatoriks

$$\underset{\theta}{\mathfrak{D}} = 1.$$

Diskonteerimist rakendame investeerimissektori omahinna arvutamisel. Olgu investeerimistegevusega $\mathfrak{I}$ dikteeritud investeerimissektori väljundvoole vastava sisendvoo diskreetne või pidev jaotus I_τ^- ajavahemikus $[t, t+\theta]$. Diskonteerime investeerimistegevuse alguses sisend- ja väljundvoo. Kui sisendvoo jaotus on diskreetne, siis avaldub investeerimissektori-omahinna võrrand kujul

$$\sum_{\tau=0}^{\theta-1} I_\tau^- e^{-\varrho\tau} = I^+ e^{-\varrho\theta} h$$

või kujul

$$\sum_{\tau=0}^{\theta-1} I_\tau^- e^{\varrho(\theta-\tau)} = I^+ h. \tag{17}$$

Sisendvoo pideva jaotuse korral avaldub omahinna võrrand kujul

$$\int_0^\theta I_\tau^- e^{-\varrho\tau} d\tau = I^+ e^{-\varrho\theta} h$$

või

$$\int_0^{\theta} I_\tau^- e^{\varrho(\theta-\tau)} d\tau = I^+ h, \tag{18}$$

kus I_τ^- on sisendi jaotuse tihedus perioodil $t+\tau \in [t, t+\theta]$. Tugineme investeerimistegevuse eeltoodud hüpoteesidele ja arvutame investeerimissektori-omahinna.

Kehtigu investeerimistegevuse hüpotees (A_I), mille järgi investeerimissektori teineteisele vasťav sisend- ja väljundvoog on koondatud ajavahemiku $[t, t+\theta]$ algusse ja lõppu. Sisendvoo diskreetne jaotus on antud võrdusega

$$I_\tau^- = \begin{cases} I^+, & \text{kui } \tau = 0 \\ 0, & \text{kui } \tau \neq 0. \end{cases}$$

Investeerimissektori omahinna võrrand (17) lihtsustub ja avaldub kujul

$$I^+ e^{\varrho\theta} = I^+ h$$

või

$$h = e^{\varrho\theta}. \tag{19}$$

Kehtigu investeerimistegevuse hüpotees (B_I), mille järgi sisendvoo diskreetne jaotus on antud võrdusega

$$I_\tau^- = \nu_\tau I^+.$$

Investeerimissektori-omahinna võrrand (17) lihtsustub, avaldudes kujul

$$\sum_{\tau=0}^{\theta-1} \nu_\tau I^+ e^{\varrho(\theta-\tau)} = I^+ h$$

või

$$h = \sum_{\tau=0}^{\theta-1} \nu_\tau e^{\varrho(\theta-\tau)}. \tag{20}$$

Kehtigu lõppeks investeerimistegevuse hüpotees (C_I), mille järgi sisendvoo pidev jaotus on antud võrdusega

$$I_\tau^- = \nu_\tau I^+.$$

Investeerimissektori-omahinna võrrand (18) avaldub kujul

$$\int_0^{\theta} \nu_\tau I^+ e^{\varrho(\theta-\tau)} d\tau = I^+ h,$$

millest

$$h = \int_0^{\theta} \nu_\tau e^{\varrho(\theta-\tau)} d\tau. \tag{21}$$

2. Investeerimistegevuse uurimisel jäi käsitlemata investeerimissektori tagasiside põhifondidega ja põhifondide kaudu tootmisega, mida vaatleme töö käesolevas osas. Põhifondide mõiste käsitlemisel on otstarbekohane eristada põhivahendite mõistet, mida peetakse tavaliselt esimese sünonüümiks. Põhivahendite mõistega on seotud asendamise mõiste. Kui põhifondide täienemist ja väljalangemist ei toimu, siis on põhivahendite varu konstantne; amortiseerumise tõttu on põhifondide varu aga aja kahanev funktsioon.

Defineerime põhifondide mõiste.

Definitsioon 4. *Põhifondid F* on tootmisüksus, mille sisendvoog F^- on võrdne investeerimissektori väljundvooga I^+ ja mille väljundvoo F^+ koordinaate F_1^+ ja F_2^+ nimetatakse vastavalt *amortisatsiooniks* ja *väljalangemiseks.** Põhifondide sisendvoo ja amortisatsiooni vahe on *põhifondide varu* $\bar{F}$ kasv:

* Vt. märkust investeerimissektori definitsiooni juures.

$$I^+ - F_1^+ = \mathrm{D}\overline{F}. \tag{22}$$

Põhifondide sisendvoo ja väljalangemise vahet nimetatakse *põhivahendite varu* $\overline{K}$ kasvuks:

$$I^+ - F_2^+ = \mathrm{D}\overline{K}. \tag{23}$$

Eeldame, et kõik füüsilise või moraalse kulumise tagajärjel väljalangenud põhivahendid asendatakse uute põhivahenditega. Sel juhul on väljalangevate põhivahendite hulk ühtlasi asendatavate põhivahendite hulk. Defineerime amortiseerimis- ja asendamistegevuse kui abstraktsed kvantitatiivsed mõisted.

Definitsioon 5. *Põhifondide majandustegevus* on diagonaalmaatriks, mis põhifondide väljundvoo seab vastavusse põhivahendite varuga $\overline{K}$ ja põhifondide sisendvooga $F^- = I^+$:

$$F^+ = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & 0 \\ 0 & \mathfrak{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{K} \\ I^+ \end{pmatrix}. \tag{**}$$

Diagonaalmaatriksi elemendid $\mathfrak{D}$ ja $\mathfrak{R}$ on operaatorid, mida nimetatakse vastavalt amortiseerimis- ja asendamistegevuseks. Võrduses (**) koordinaatidele üle minnes saame

$$F_1^+ = \mathfrak{D}(\overline{K}), \tag{24}$$

$$F_2^+ = \mathfrak{R}(I^+). \tag{25}$$

Amortiseerimistegevus on operaator, mis põhivahendite varuga seab vastavusse põhifondide väljundvoo esimese koordinaadi — amortisatsiooni. *Asendamistegevus* on operaator, mis põhifondide sisendvooga seab vastavusse põhifondide väljundvoo teise koordinaadi — väljalangevad ja asendatavad põhivahendid.

Asendamistegevuse mõiste konkretiseerimiseks kordame investeerimistegevuse käsitlemisel kasutatud lähenemisviisi. Nagu investeerimistegevuse puhul, nii võime ka asendamistegevuse kohta püstitada hüpoteese, millest olenevalt asendamisoperaatoril võib olla kord üks, kord teine konkreetne kuju. Asendamistegevuse hüpoteesidest lihtsamad on näiteks järgmised.

$\mathrm{A_R}$. Põhivahenditel on konstantne ekspluatatsiooniaeg T. Investeerimistegevusest perioodil $t-T$ väljunud põhivahendid tuleb ajavahemiku T möödumisel uutega asendada:

$$F_2^+(t) = I^+(t-T). \tag{26}$$

Hüpoteesi ($\mathrm{A_R}$) järgi on asendamistegevus konstantse sammuga nihkeoperaator

$$\mathfrak{R} = \underset{-T}{\mathcal{E}}. \tag{27}$$

$\mathrm{B_R}$. Põhivahenditel on diskreetselt jaotatud ekspluatatsiooniaeg. Perioodil $t-T+$ $+\tau$, $\tau = 0, 1, \ldots, T-1$ investeerimistegevusest väljunud uutest põhivahenditest tuleb perioodil t teatav osa $\mu_\tau I^+(t-T+\tau)$ asendada. Kogu asendamine perioodil t on summa:

$$F_2^+(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau I^+(t-T+\tau). \tag{28}$$

Hüpoteesi ($\mathrm{B_R}$) järgi on asendamistegevus muutuva sammuga nihkeoperaatorite lineaarne kombinatsioon:

$$\mathfrak{R} = \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau \underset{-T+\tau}{\mathcal{E}}. \tag{29}$$

C_R. Põhivahenditel on pidevalt jaotatud ekspluatatsiooniaeg. Perioodil $t-\tau$ investeerimistegevusest väljunud põhivahenditest tuleb perioodil t teatav osa $\mu_\tau I^+(t-\tau)$ asendada. Kogu asendamine perioodil t on integraal:

$$F_2^+(t) = \int_0^T \mu_\tau I^+(t-\tau)\,d\tau. \tag{30}$$

Hüpoteesi (C_R) järgi on asendamistegevusel kuju

$$\mathfrak{R} = \int_0^T d\tau \mu_\tau \underset{-\tau}{\mathcal{E}}. \tag{31}$$

Amortiseerimistegevuse käsitlemisel peame silmas, et viimase eesmärk on asendamistegevust tagava amortisatsioonifondi loomine. Seetõttu pole amortiseerimistegevuse hüpoteesid iseseisvad, vaid olenevad asendamistegevuse hüpoteesidest. Asendamistegevuse hüpoteesidele (A_R), (B_R) ja (C_R) vastavalt püstitame järgmised kolm amortiseerimistegevuse hüpoteesi.

A_D. Põhivahenditel on konstantne ekspluatatsiooniaeg T. Põhivahendite amortisatsiooni F_1^+ diskonteeritud väärtuse integraali ja põhivahendite jääkväärtuse $\overline{R}$ diskonteeritud väärtuse summa on võrdne põhivahendite varuga $\overline{K}$ [4]:

$$\int_0^T F_1^+ e^{-\varrho\tau} d\tau + \overline{R}e^{-\varrho T} = \overline{K}, \tag{32}$$

kus 100ϱ on diskontoprotsendi määr.

Avaldame võrrandist (32) amortisatsiooni F_1^+. Integreerime ja saame, et amortisatsioon perioodil t arvutatakse avaldisega

$$F_1^+ = \frac{\varrho(\overline{K}e^{\varrho T} - \overline{R})}{e^{\varrho T} - 1}. \tag{33}$$

Kui jääkväärtus $\overline{R} = 0$, siis avaldub valem kujul

$$F_1^+ = \frac{\varrho \overline{K} e^{\varrho T}}{e^{\varrho T} - 1}, \tag{34}$$

millele vastavat amortiseerimistegevust nimetatakse *amortisatsiooninormiks*:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varrho e^{\varrho T}}{e^{\varrho T} - 1}. \tag{35}$$

Kui ekspluatatsiooniaeg on pikk, s. o. $T \rightarrow \infty$, siis

$$F_1^+ = \varrho \overline{K}, \tag{36}$$

millele vastav amortisatsiooninorm avaldub diskontoprotsendi määra kaudu võrdusega

$$\mathfrak{D} = \varrho. \tag{37}$$

Kui diskontoprotsent on väike, s. o. $\varrho \rightarrow 0$, siis lihtsustub valem (33), avaldudes kujul

$$F_1^+ = \frac{1}{T}(\overline{K} - \overline{R}). \tag{38}$$

Kui valemis (38) jääkväärtus $\overline{R} = 0$, siis

$$F_1^+ = \frac{\overline{K}}{T}, \tag{39}$$

millele vastab amortiseerimistegevus

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{T}. \tag{40}$$

B_D. Põhivahenditel on diskreetselt jaotatud ekspluatatsiooniaeg $T-k$, $k=0,1,\ldots$ $\ldots, T-1$, millele vastab põhivahendite varu jaotus osadeks $\lambda_k\overline{K}$, $\sum_{k=0}^{T-1}\lambda_k=1$. Osaamortisatsiooni $F_1^+(k)$ diskonteeritud väärtuse integraali ja vastava jääkväärtuse $\overline{R}_k$ diskonteeritud väärtuse summa on võrdne põhivahendite varu osaga $\lambda_k\overline{K}$:

$$\int_0^{T-k} F_1^+(k)e^{-\varrho\tau}d\tau+\overline{R}_k e^{-\varrho(T-k)}=\lambda_k\overline{K}, \tag{41}$$

kus 100ϱ on diskontoprotsendi määr. Põhivahendite amortisatsioon on osaamortisatsioonide summa:

$$F_1^+=\sum_{k=0}^{T-1}F_1^+(k). \tag{42}$$

Arvutame võrrandist (41) osaamortisatsiooni $F_1^+(k)$ väärtuse ja asetame võrdusse (42). Võrdus (42) avaldub kujul

$$F_1^+=\varrho\sum_{k=0}^{T-1}\frac{\lambda_k\overline{K}e^{\varrho(T-k)}-\overline{R}_k}{e^{\varrho(T-k)}-1}. \tag{43}$$

Kui iga k korral vastav jääkväärtus $\overline{R}_k=0$, siis lihtsustub võrdus (43):

$$F_1^+=\varrho\sum_{k=0}^{T-1}\frac{\lambda_k\overline{K}e^{\varrho(T-k)}}{e^{\varrho(T-k)}-1}, \tag{44}$$

millele vastab amortisatsiooninorm

$$\mathfrak{D}=\varrho\sum_{k=0}^{T-1}\frac{\lambda_k e^{\varrho(T-k)}}{e^{\varrho(T-k)}-1}. \tag{45}$$

Olgu diskontoprotsent väike. Rakendame valemis (43) piirprotsessi $\varrho\to 0$ ja leiame, et

$$F_1^+=\sum_{k=0}^{T-1}\frac{\lambda_k\overline{K}-\overline{R}_k}{T-k}. \tag{46}$$

Kui iga k korral vastav jääkväärtus $\overline{R}_k=0$, siis

$$F_1^+=\sum_{k=0}^{T-1}\frac{\lambda_k\overline{K}}{T-k}, \tag{47}$$

millele vastab amortisatsiooninorm

$$\mathfrak{D}=\sum_{k=0}^{T-1}\frac{\lambda_k}{T-k}. \tag{48}$$

C_D. Põhivahenditel on ajavahemikus $[t, t+T]$ pidevalt jaotatud ekspluatatsiooniaeg $T-k$, $k\in[0,T]$, millele vastab põhivahendite varu tihedus $\lambda_k\overline{K}$, $\int_0^T\lambda_k dk=1$. Amortisatsioonitiheduse $F_1^+(k)$ diskonteeritud väärtuse integraali ja vastava jääkväärtuse $\overline{R}_k$ diskonteeritud väärtuse summa on võrdne põhivahendite varu tihedusega $\lambda_k\overline{K}$:

$$\int_0^{T-k} F_1^+(k)e^{-\varrho\tau}d\tau + \overline{R}_k e^{-\varrho(T-k)} = \lambda_k\overline{K}, \tag{49}$$

kus 100ϱ on diskontoprotsendi määr. Põhifondide amortisatsioon on võrdne amortisatsioonitiheduse integraaliga:

$$F_1^+ = \int_0^T F_1^+(k)\,dk. \tag{50}$$

Arvutame võrrandist (49) amortisatsioonitiheduse ja asetame võrdusse (50). Võrdus (50) avaldub kujul

$$F_1^+ = \varrho\int_0^T \frac{\lambda_k\overline{K}e^{\varrho(T-k)} - \overline{R}_k}{e^{\varrho(T-k)} - 1}\,dk. \tag{51}$$

Kui $t+k \in [t, t+T]$ korral jääkväärtus $\overline{R}_k = 0$, siis

$$F_1^+ = \varrho\int_0^T \frac{\lambda_k\overline{K}e^{\varrho(T-k)}}{e^{\varrho(T-k)} - 1}\,dk, \tag{52}$$

millele vastab amortisatsiooninorm

$$\mathfrak{D} = \int_0^T \frac{\lambda_k e^{\varrho(T-k)}}{e^{\varrho(T-k)} - 1}\,dk. \tag{53}$$

Olgu diskontoprotsent väike. Rakendame võrduses (51) piirprotsessi $\varrho \to 0$ ja leiame, et

$$F_1^+ = \int_0^T \frac{\lambda_k\overline{K} - \overline{R}_k}{T-k}\,dk. \tag{54}$$

Kui $t+k \in [t, t+T]$ korral jääkväärtus $\overline{R}_k = 0$, siis

$$F_1^+ = \int_0^T \frac{\lambda_k\overline{K}\,dk}{T-k}, \tag{55}$$

millele vastab amortisatsiooninorm

$$\mathfrak{D} = \int_0^T \frac{\lambda_k\,dk}{T-k}. \tag{56}$$

Aproksimeerigu põhivahendite varu $\overline{K}$ eritihedust ekspluatatsiooniaja järgi näiteks sõltuvus

$$\lambda_k = \frac{n(T^2-k^2)}{1+k^2}.$$

Leiame amortisatsiooni, kui diskontoprotsenti ja põhivahendite jääkväärtust ei arvestata.

Tingimusest $\int_0^T \lambda_k\,dk = 1$ leiame, et

$$n = \frac{1}{\int_0^T \frac{T^2-k^2}{1+k^2}\,dk} = \frac{1}{(1+T^2)\arctan T - T}.$$

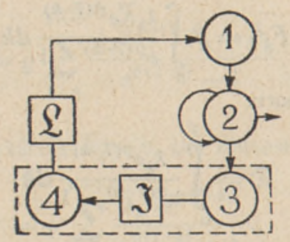
Amortisatsiooni arvutame valemi (55) järgi:

$$F_1^+ = n\bar{K}\int_0^T \frac{(T+k)\,dk}{1+k^2} = \frac{T\arctan T + \ln\sqrt{1+T^2}}{(1+T^2)\arctan T - T}\,\bar{K}.$$

3. Käsitleme tootmise dünaamilist tasakaalumudelit, mis arvestab investeerimis-, asendamis- ja amortiseerumistegevuse eeltoodud hüpoteese. Anname naturaalarvudele 1, 2, 3 ja 4 järgmise majandusteadusliku interpretatsiooni:

1 — põhivahendid, mille varu on $\bar{K}$;
2 — tootmine, mille kiirus on X;
3 — investeerimissektori sisendvoog I^-;
4 — investeerimissektori väljundvoog I^+.

Illustreerigu tootmissüsteemi graaf



kus $\mathfrak{J}$ on investeerimistegevus ja $\mathfrak{L}$ operaator, mis dikteerib investeeringute väljundvoo sõltuvuse põhivahendite varust. Ülejäänud tootmisüksuste sisendvood olgu vastavate tootmiskiirustega võrdelised. Graafile vastab Leontjevi mudel (*) kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J} \\ \mathfrak{L} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{K} \\ X \\ I^- \\ I^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K} \\ X \\ I^- \\ I^+ \end{pmatrix} \tag{57}$$

või

$$\begin{array}{llll} & \varkappa X & & = \bar{K} \\ & aX + I^- & + Y & = X \\ & & \mathfrak{J}(I^+) & = I^- \\ \mathfrak{L}(\bar{K}) & & & = I^+. \end{array} \tag{57'}$$

Maatriksi $\mathfrak{A}$ element a on tootmissektori omatoodangu, näiteks materjalide otsekulunorm; $\varkappa$ on fondimahukusnorm. Võrrandisüsteemi (57′) esimese ja kahe viimase võrrandi järgi

$$I^- = \mathfrak{J}(I^+) = \mathfrak{J}[\mathfrak{L}(\bar{K})] = \mathfrak{J}[\mathfrak{L}(\varkappa X)].$$

Asendame võrrandisüsteemi (57′) teises võrrandis I^- väärtuse avaldisega $\mathfrak{J}[\mathfrak{L}(\varkappa X)]$ ja toome võrdusega

$$X - Y = \alpha X \tag{58}$$

mudelisse (57) *hinnapoliitika* α [1]. Mudel avaldub kujul

$$aX + \mathfrak{J}[\mathfrak{L}(\varkappa X)] = \alpha X$$

või

$$\mathfrak{J}[\mathfrak{L}(\varkappa X)] = (\alpha - a)X. \tag{59}$$

Operaatori $\mathfrak{L}$ avaldamiseks lähtume põhivahendite varu definitsioonist (23) ja asendamistegevuse definitsioonist (25):

$$I^{+} - F_2^{+} = \mathrm{D}\overline{K}, \quad F_2^{+} = \mathfrak{R}(I^{+}),$$

millest

$$\mathrm{D}\overline{K} = (1 - \mathfrak{R})I^{+}$$

ja

$$I^{+} = (1 - \mathfrak{R})^{-1}\,\mathrm{D}\overline{K}. \tag{60}$$

Võrdusest (60) nähtub, et

$$\mathfrak{L} = (1 - \mathfrak{R})^{-1}\mathrm{D}. \tag{61}$$

Peame silmas võrdust (61) ning asendame mudelis (59) operaatori $\mathfrak{L}$. Mudel avaldub kujul

$$\mathfrak{I}(1 - \mathfrak{R})^{-1}\mathrm{D}\varkappa X = (\alpha - a)X. \tag{62}$$

Olgu investeerimis- ja asendamisoperaator lineaarsed ja kommuteeruvad. Rakendame võrduse (62) pooltele operaatorit $1 - \mathfrak{R}$ ja leiame pärast fondimahukusnormiga jagamist, et

$$\mathfrak{I}\mathrm{D}X = \frac{\alpha - a}{\varkappa}(X - \mathfrak{R}X). \tag{63}$$

Peale operaatorite $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{R}$ ja D sisaldab tootmise tasakaalumudel (63) veel tootmissüsteemiga antud tehnilised parameetrid a ja $\varkappa$ ning teineteisest sõltuvad *vabaparameetrid*, milleks on tootmiskiirus X_t ja hinnapoliitika α; viimast nimetatakse tootmissüsteemi *juhtimisparameetriks*. Hinnapoliitika abil toimub tootmissüsteemi juhtimine mööda tootmiskiiruse trajektoori X_t. Olenevalt sellest, kumb vabaparameeter on antud ja kumba otsitakse, jagunevad planeerimisülesanded analüütilisteks ja poliitilisteks [2]. *Analüütiliseks* nimetatakse planeerimisülesannet, milles uuritakse tootmiskiiruse sõltuvust hinnapoliitikast, *poliitiliseks* — niisugust planeerimisülesannet, milles uuritakse hinnapoliitika sõltuvust tootmisplaanist (t, X_t). Poliitiline planeerimisülesanne on tootmissüsteemi juhtimisülesanne. Analüütiline ja poliitiline planeerimisülesanne on teineteise pöördülesanded.

Lähtume investeerimis- ja asendamistegevuse eri hüpoteesidest ning lahendame dünaamilise tasakaalumudeli (63).

Kehtigu investeerimis- ja asendamistegevuse hüpoteesid (A_I) ja (A_R). Sel juhul võrduste (3) ja (27) järgi $\mathfrak{I} = \underset{\theta}{\mathcal{E}}$ ja $\mathfrak{R} = \underset{-T}{\mathcal{E}}$ ning tasakaalumudel (63) avaldub kujul

$$\underset{\theta}{\mathcal{E}}\mathrm{D}X = \frac{\alpha - a}{\varkappa}(X - \underset{-T}{\mathcal{E}}X) \tag{64}$$

või

$$\dot{X}_{t+\theta} = \frac{\alpha - a}{\varkappa}(X_t - X_{t-T}). \tag{65}$$

Võrrand (65) on lineaarne konstantkordajatega esimest järku homogeenne diferentsdiferentsiaalvõrrand, mille karakteristlik võrrand on

$$\omega e^{\omega\theta} = \frac{\alpha - a}{\varkappa}(1 - e^{-\omega T}). \tag{66}$$

Karakteristlik võrrand (66) sisaldab hinnapoliitika α kui juhtimisparameetri, millele võime anda mitmesuguseid väärtusi. Analüütilise planeerimisülesande korral lahendame ω suhtes võrrandi (66), leides mitmesugustele hinnapoliitikatele vastavad karakteristlikud väärtused. Kui investeerimis- ja asendamistegevus ning hinnapoliitika on niisugused, et on garanteeritud tootmise tsükliteta kasv, siis peab võrrandil (66) leiduma positiivseid reaallahendeid, millest suurima märgime tähega $\overline{\omega}$. Sel juhul on tootmiskiirus aja kasvav eksponentfunktsioon kujul

$$X_t = X_0 e^{\overline{\omega} t}, \tag{67}$$

kus X_0 on tootmise algkiirus.

Poliitilise planeerimisülesande korral avaldame sõltuvusest (67) suurima kasvutempo ja karakteristlikust võrrandist (66) hinnapoliitika:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{t} \ln \frac{X_t}{X_0}, \tag{68}$$

$$\alpha = a + \frac{\varkappa \omega e^{\omega(T+\Theta)}}{e^{\omega T} - 1}. \tag{69}$$

Asetame kasvutempo suurima väärtuse $\bar{\omega}$ võrdusest (68) võrdusse (69). Antud investeerimis- ja asendamistegevusele ning tootmisplaanile (t, X_t) vastav hinnapoliitika avaldub valemiga

$$\alpha = a + \frac{\frac{\varkappa}{t} \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{T+\Theta}{t}} \ln \frac{X_t}{X_0}}{\left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{T}{t}} - 1}. \tag{70}$$

Kehtigu nüüd investeerimis- ja asendamistegevuse hüpoteesid (B_I) ja (B_R). Sel juhul võrduste (8) ja (29) järgi

$$\mathfrak{J} = \sum_{\tau=0}^{\Theta-1} \nu_\tau \underset{\Theta-\tau}{\mathcal{E}}, \quad \mathfrak{R} = \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau \underset{-T+\tau}{\mathcal{E}}$$

ning tasakaalumudel (63) avaldub kujul

$$\sum_{\tau=0}^{\Theta-1} \nu_\tau \underset{\Theta-\tau}{\mathcal{E}} DX_t = \frac{\alpha - a}{\varkappa} (X_t - \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau \underset{-T+\tau}{\mathcal{E}} X_t) \tag{71}$$

või

$$\sum_{\tau=0}^{\Theta-1} \nu_\tau \dot{X}_{t+\Theta-\tau} = \frac{\alpha - a}{\varkappa} (X_t - \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau X_{t-T+\tau}). \tag{72}$$

Võrrand (74) on lineaarne konstantkordajatega esimest järku homogeenne diferents-diferentsiaalvõrrand, mille karakteristlik võrrand on

$$\omega \sum_{\tau=0}^{\Theta-1} \nu_\tau e^{\omega(\Theta-\tau)} = \frac{\alpha - a}{\varkappa} (1 - \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau e^{-\omega(T-\tau)}). \tag{73}$$

Kui investeerimis- ja asendamistegevus ning hinnapoliitika dikteerivad tootmise tsükliteta kasvu, siis peab võrrandil (73) leiduma positiivseid reaallahendeid, millest suurim olgu $\bar{\omega}$. Tootmiskiirus on sel juhul jällegi võrdusega (67) antud eksponentfunktsioon:

$$X_t = X_0 e^{\bar{\omega} t}.$$

Poliitilise planeerimisülesande korral avaldame karakteristlikust võrrandist (73) hinnapoliitika ning asendame saadud võrrandis tootmiskiiruse kasvutempo tema maksimaalväärtusega. Antud investeerimis- ja asendamistegevusele ning tootmisplaanile (t, X_t) vastava hinnapoliitika kavandamiseks saame valemi kujul

$$\alpha = a + \frac{\frac{\varkappa}{t} \sum_{\tau=0}^{\Theta-1} \nu_\tau \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{T+\Theta-\tau}{t}} \ln \frac{X_t}{X_0}}{\left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{T}{t}} - \sum_{\tau=0}^{T-1} \mu_\tau \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{\tau}{t}}}. \tag{74}$$

Kehtigu lõppeks investeerimis- ja asendamistegevuse hüpoteesid (C_I) ja (C_R). Võrduste (12) ja (31) järgi

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\Theta} d\tau \nu_\tau \underset{\Theta-\tau}{\mathfrak{S}}, \quad \mathfrak{R} = \int_0^{T} d\tau \mu_\tau \underset{-\tau}{\mathfrak{S}}.$$

Dünaamiline tasakaalumudel (63) avaldub kujul

$$\int_0^{\Theta} d\tau \nu_\tau \underset{\Theta-\tau}{\mathfrak{S}} \mathrm{D}X = \frac{a - \alpha}{\varkappa} (X - \int_0^{T} d\tau \mu_\tau \underset{-\tau}{\mathfrak{S}} X) \tag{75}$$

või

$$\int_0^{\Theta} \nu_\tau \dot{X}_{t+\Theta-\tau} d\tau = \frac{a - \alpha}{\varkappa} (X_t - \int_0^{T} \mu_\tau X_{t-\tau} d\tau). \tag{76}$$

Võrrand (76) on lineaarne konstantkordajatega esimest järku homogeenne integraal-diferentsiaalvõrrand, mille karakteristlik võrrand on

$$\omega \int_0^{\Theta} \nu_\tau e^{\omega(\Theta-\tau)} d\tau = \frac{a - \alpha}{\varkappa} (1 - \int_0^{T} \mu_\tau e^{-\omega\tau} d\tau). \tag{77}$$

Poliitilise planeerimisülesande korral avaldame karakteristlikust võrrandist (77) hinnapoliitika ning asendame võrduse (68) järgi tootmise kasvutempo tema maksimaalväärtusega. Antud investeerimis- ja asendamistegevusele ning tootmisplaanile (t, X_t) vastav hinnapoliitika avaldub valemiga

$$a = \alpha + \frac{\frac{\varkappa}{t} \int_0^{\Theta} \nu_\tau \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{\Theta-\tau}{t}} d\tau \ln \frac{X_t}{X_0}}{1 - \int_0^{T} \mu_\tau \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{-\frac{\tau}{t}} d\tau}. \tag{78}$$

Interpreteerime hinnapoliitika mõistet rahvatulu jaotuse teooria terminites. Püstitame järgmised kaks postulaati.

$\mathrm{A_N}$. Investeerimissektori sisendvoog I^- on amortisatsiooni F_1^+ ja rahvatulu säästetava osa S summa:

$$I^- = F_1^+ + S. \tag{79}$$

$\mathrm{B_N}$. Rahvatulu säästetav osa on rahvatuluga $S + Y$ võrdeline:

$$S = \sigma(S + Y), \tag{80}$$

kus võrdetegur σ on *säästmistendents* ehk *akumulatsiooninorm.*

Kui amortisatsiooninorm on δ, s. t. $\mathfrak{D} = \delta$, siis võrduste (24) ja võrrandisüsteemi (57′) esimese võrrandi järgi

$$F_1^+ = \mathfrak{D}\bar{K} = \delta\varkappa X. \tag{81}$$

Kuna võrduste (58) ja (80) järgi

$$S = \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma} X, \tag{82}$$

siis võrduse (79) järgi

$$I^- = \left[\delta\varkappa + \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma}\right] X \tag{83}$$

ja võrrandisüsteemi (57′) teine võrrand avaldub kujul

$$aX + \left[\delta\varkappa + \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma}\right] X = \alpha X$$

või

$$a + \delta\varkappa + \frac{\sigma(1 - a)}{1 - \sigma} = \alpha.$$

Avaldame hinnapoliitika ja leiame, et

$$a=\sigma+(a+\delta\varkappa)(1-\sigma). \tag{84}$$

Vahet $1-\sigma$ nimetatakse *tarbimistendentsiks*. Korrutis $\delta\varkappa$ on *põhifondide otsekulunorm*. Võrdusest (84) nähtub, et hinnapoliitika võrdub säästmistendentsiga, millele on liidetud tarbimistendentsi korrutis materjalide ja põhifondide otsekulunormi summaga.

Avaldame valemist (84) säästmistendentsi σ ja leiame, et

$$\sigma=\frac{\alpha-a-\delta\varkappa}{1-a-\delta\varkappa}. \tag{85}$$

Määranud valemitega (70), (74) või (78) eri investeerimis- ja asendamistegevustele ning tootmisplaanile (t, X_t) vastava hinnapoliitika, võime võrduse (85) järgi leida amortiseerimistegevusele ja hinnapoliitikale vastava säästmistendentsi ehk akumulatsiooninormi.

Avaldame valemist (84) amortisatsiooninormi:

$$\delta=\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\alpha-\sigma}{1-\sigma}-a\right). \tag{85'}$$

Kui akumulatsiooninorm σ on *eksogeenne*, s. t. tootmissüsteemile dikteeritud väljastpoolt, siis võime valemi (85′) järgi leida eri hinnapoliitikatele vastava amortisatsiooninormi, mille järgi omakorda võime leida diskontoprotsendi määra, jne.

Esitatud näited osutavad sellele, et poliitiliste planeerimisülesannete lahendamisel on hinnapoliitika valemitel (70), (74) ja (78) keskne tähtsus.

Võrduse (84) järgi

$$\begin{aligned}1-\alpha&=1-\sigma-(a+\delta\varkappa)(1-\sigma)=\\&=(1-\sigma)(1-a-\delta\varkappa).\end{aligned}$$

Rahvatulu säästetav osa, elanikkonna tarbimine ja väljavedu ning investeeringud avalduvad võrduste (82), (58) ja (83) põhjal valemitega

$$S=\sigma(1-a-\delta\varkappa)X \tag{86}$$

$$Y=(1-\sigma)(1-a-\delta\varkappa)X \tag{87}$$

$$I^{-}=[\delta\varkappa+\sigma(1-a-\delta\varkappa)]X. \tag{88}$$

Käsitleme analüütilise planeerimisülesande lahendamist. Kehtigu investeerimis-, asendamis- ja amortiseerimistegevuse hüpoteesid (A_I), (A_R) ja (A_D). Tootmiskiiruse kasvutempo ω sõltuvust parameetritest α, a, $\varkappa$, T ja θ esitab sel juhul karakteristlik võrrand (66). Jagame võrrandi (66) pooli avaldisega $e^{\omega\theta}$ ja leiame, et

$$\omega=q(e^{-\omega\theta}-e^{-\omega(T+\theta)}), \tag{66'}$$

kus

$$q=\frac{\alpha-a}{\varkappa}. \tag{89}$$

Uurime karakteristliku võrrandi positiivse reaallahendi olemasolu. Võrrandi (66′) parem pool

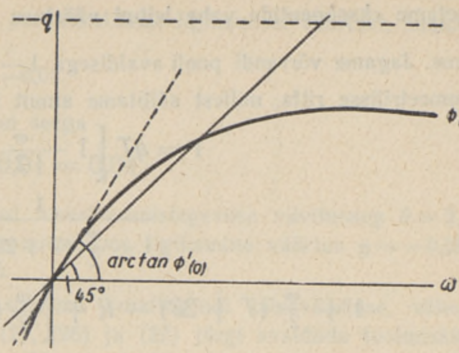
$$\Phi(\omega)=q(e^{-\omega\theta}-e^{-\omega(T+\theta)})$$

kujutab kõverat, mis läbib koordinaatide algust ja mille ülemtõkkeks on punkti q läbiv horisontaalsirge. Võrrandi (66′) vasak pool kujutab koordinaatide algust 45°-se nurga all läbivat sirget. Et sirge ω lõikaks koordinaattasandi esimeses veerandis kõverat $\Phi(\omega)$, selleks peab koordinaatide alguses kõvera $\Phi(\omega)$ puutuja tõusunurk olema suurem kui 45° (joon.):

$$\arctan \Phi'(0) > 45^\circ$$

või

$$\Phi'(0) > 1.$$



Arvutame punktis $\omega = 0$ funktsiooni $\Phi(\omega)$ tuletise ja leiame, et

$$\Phi'(0) = q[-\theta e^{-\omega\theta} + (T+\theta)e^{-\omega(T+\theta)}]_{\omega=0} = qT.$$

Karakteristliku võrrandi (66′) positiivse reaallahendi olemasolu tingimus avaldub seega kujul

$$qT > 1$$

või kujul

$$\frac{\alpha - a}{\varkappa} T > 1. \tag{89′}$$

Kui tootmissüsteemi parameetrid alluvad tingimusele (89′), siis ütleme, et on võimalik *tootmise tsükliteta (kriisivaba) kasv.*

Võrduse (84) järgi $\alpha - a = (1-a)\sigma + (1-\sigma)\delta\varkappa$. Asetanud $\alpha - a$ väärtuse võrratusse (89′) ja avaldanud amortisatsiooninormi δ, saame tingimuse, mida peab kriisivaba arenemise korral täitma amortisatsiooninorm:

$$\delta > \frac{\varkappa - (1-a)\sigma T}{(1-\sigma)T\varkappa}. \tag{89″}$$

Kui diskonteerimist ei arvestata, s. t. $\varrho = 0$, siis võrduse (40) järgi $\delta = \frac{1}{T}$ ja võrratus (89″) avaldub kujul

$$\frac{1}{T} > \frac{\varkappa - (1-a)\sigma T}{(1-\sigma)T\varkappa},$$

millest

$$T > \frac{\varkappa}{1-a}. \tag{89‴}$$

Eeldame tootmise kriisivaba kasvu. Sel juhul kehtib tingimus (89′), mille järgi karakteristlikul võrrandil peab leiduma positiivne reaallahend. Võrrandi (66′) suurima reaallahendi lähisväärtuse leidmiseks arendame eksponentide vahe Maclaurini ritta:

$$e^{-\omega\theta} - e^{-\omega(T+\theta)} = 1 - \omega\vartheta + \frac{1}{2}\omega^2\vartheta^2 - \frac{1}{6}\omega^3\vartheta^3 + \ldots -$$

$$-\left[1 - \omega(T+\vartheta) + \frac{1}{2}\omega^2(T+\vartheta)^2 - \frac{1}{6}\omega^3(T+\theta)^3 + \ldots\right] =$$

$$= \omega T - \frac{1}{2}\omega^2[(T+\vartheta)^2 - \theta^2] + \frac{1}{6}\omega^3[(T+\vartheta)^3 - \theta^3] - \ldots =$$

$$= \omega T - \frac{\omega^2}{2}(T + 2\vartheta)T + \omega T\hat{R},$$

kus

$$\hat{R} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{\omega^{k-1}}{T}[(T+\vartheta)^k - \theta^k]. \tag{90}$$

Asetame eksponentide vahe leitud väärtuse karakteristlikku võrrandisse (66′) ja taandame. Jagame võrrandi pooli avaldisega $1-\frac{\omega}{2}(T+2\theta)+\hat{R}$ ja arendame vasaku poole geomeetrilisse ritta, millest säilitame ainult lineaarosa:

$$1=qT\left[1-\frac{\omega}{2}(T+2\theta)+\hat{R}\right]$$

$$\frac{1}{1-\frac{\omega}{2}(T+2\theta)+\hat{R}}=qT$$

$$1+\frac{\omega}{2}(T+2\theta)-\hat{R}+\left[\frac{\omega}{2}(T+2\theta)-\hat{R}\right]^2+\ldots=qT$$

$$1+\frac{\omega}{2}(T+2\theta)-\tilde{R}=qT,$$

milles

$$\tilde{R}=\hat{R}-\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\omega}{2}(T+2\theta)-\hat{R}\right]^i. \tag{90′}$$

Avaldame saadud võrrandist ω ja leiame:

$$\omega=\frac{2(qT-1)}{T+2\theta}+\eta, \tag{91}$$

kus parandusliige η avaldub valemiga

$$\eta=\frac{2\tilde{R}}{T+2\theta}. \tag{90″}$$

Asetanud teguri q väärtuse võrdusest (89) võrdusse (91), saame tootmiskiiruse kasvutempo ligikaudse sõltuvuse hinnapoliitikast α, omatoodangu otsekulunormist a, fondimahukusnormist $\varkappa$, põhivahendite ekspluatatsiooniajast T ja investeerimistegevuse viivitusajast θ:

$$\omega=\frac{2[(\alpha-a)T-\varkappa]}{(T+2\theta)\varkappa}+\eta. \tag{91′}$$

Asetanud hinnapoliitika α väärtuse võrdusest (84) võrdusse (91′), saame valemi

$$\omega=\frac{2[\sigma(1-a-\varkappa\delta)T+\varkappa(\delta T-1)]}{(T+2\theta)\varkappa}+\eta, \tag{91″}$$

mille järgi võib uurida tootmiskiiruse kasvutempo ligikaudset sõltuvust akumulatsiooninormist.

Arvutame tootmiskiiruse kasvutempo lähisväärtuse ja hindame parandusliiget η, kui põhivahendite ekspluatatsiooniaeg $T=20$ aastat, investeerimistegevuse viivitusaeg $\theta=5$ aastat, fondimahukusnorm $\varkappa=3$ aastat, omatoodangu otsekulunorm $a=0{,}6$, akumulatsiooninorm $\sigma=0{,}25$ ja diskontoprotsendi määr $100\varrho=4$.

Valemi (35) järgi arvutame amortisatsiooninormi:

$$\delta=\frac{\varrho}{1-e^{-\varrho T}}=\frac{0{,}04}{1-e^{-0{,}8}}\approx 0{,}07.$$

Valemi (84) järgi arvutame hinnapoliitika:

$$\alpha=\sigma+(a+\delta\varkappa)(1-\sigma)\approx$$
$$\approx 0{,}25+(0{,}6+0{,}07\cdot 3)\cdot 0{,}75\approx 0{,}86.$$

Valemi (91′) järgi arvutame tootmiskiiruse kasvutempo lähisväärtuse:

$$\omega=\frac{2[(\alpha-a)T-\varkappa]}{(T+2\theta)\varkappa}+\eta\approx\frac{2[(0{,}86-0{,}6)\cdot 20-3]}{(20+2\cdot 5)\cdot 3}+\eta\approx 0{,}05+\eta.$$

Hinnanud valemite (90), (90′) ja (90″) järgi parandusliikme ligikaudset väärtust, leiame, et

$$\eta \approx -0{,}01.$$

Tootmiskiiruse kasvutempo täpsem väärtus on seega

$$\omega \approx 0{,}05 - 0{,}01 = 0{,}04.$$

Lahendades sama ülesande sel juhul, kui investeerimistegevuse viivitusaeg $\theta = 2{,}5$ aastat, leiaksime, et $\omega \approx 0{,}06 + \eta$, milles parandusliikme ligikaudne väärtus $\eta \approx -0{,}01$. Tootmiskiiruse kasvutempo on seega $\omega \approx 0{,}05$.

Leidnud karakteristliku võrrandi (66) suurima reaallahendi lähisväärtuse, võime võrduste (67), (57′), (81), (87), (86), (88), (2), (26) ja (22) järgi avaldada tootmiskiiruse, põhivahendite varu, amortisatsiooni, elanikkonna tarbimise ja väljaveo, rahvatulu säästetava osa, investeerimissektori sisend- ja väljundvoo, asendatavate põhifondide ja põhifondide varu ligikaudse funktsionaalse sõltuvuse ajast:

$$\begin{aligned} X &= X_0 e^{\omega t} \\ \overline{K} &= \varkappa X_0 e^{\omega t} \\ F_1{}^{+} &= \delta\varkappa X_0 e^{\omega t} \\ Y &= (1-\sigma)(1-a-\delta\varkappa) X_0 e^{\omega t} \\ S &= \sigma(1-a-\delta\varkappa) X_0 e^{\omega t} \\ I^{-} &= [\delta\varkappa + \sigma(1-a-\delta\varkappa)] X_0 e^{\omega t} \\ I^{+} &= [\delta\varkappa + \sigma(1-a-\delta\varkappa)] X_0 e^{\omega(t-\theta)} \\ F_2{}^{+} &= [\delta\varkappa + \sigma(1-a-\delta\varkappa)] X_0 e^{\omega(t-\theta-T)} \end{aligned} \tag{92}$$

$$\overline{F} = \mathrm{D}^{-1}(I^{+} - F_1{}^{+}) = \{[\delta\varkappa + \sigma(1-a-\delta\varkappa)]e^{-\omega\theta} - \delta\varkappa\} \frac{X_0}{\omega} e^{\omega t}.$$

Võrdustest (92) nähtub, et majandustegevuse kõigi näitajate suhted on antud juhul konstantsed. See tootmissüsteemi tehniliste ja vabaparameetrite konstantsusest tingitud omadus ei tarvitse paika pidada keerukamate mudelite korral.

Arvutame mudeli (57) järgi tootmissüsteemi-omahinna. Töö esimeses osas [1] tuletasime omahinna üldvõrrandi kujul

$$\boldsymbol{X}_{22}'\boldsymbol{h} + \boldsymbol{R} = (\operatorname{diag} \boldsymbol{X})\boldsymbol{h}, \tag{***}$$

kus tähtedel $\boldsymbol{X}_{22}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{R}$ ja $\boldsymbol{h}$ on järgmine majandusteaduslik tähendus:

$\boldsymbol{X}_{22}$ — tootmissüsteemi sisekäibemaatriks,
$\boldsymbol{X}$ — tootmissüsteemi tootmiskiirus,
$\boldsymbol{R}$ — tootmise esmastegurite kulu kiirusvektor väärtusühikutes,
$\boldsymbol{h}$ — tootmissüsteemi-omahind.

Eeldame, et tootmisel leiab kasutamist esmastegur — töö. $\boldsymbol{R}$ on seega vektor, mille ainsaks nullist erinevaks koordinaadiks on sisendihinnas väljendatud tööjõu kulu L. Tootmise dünaamilisest tasakaalumudelist (57) nähtub, et omahinna üldvõrrandil (***) on järgmine konkreetne kuju

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{K} & 0 & 0 \\ 0 & aX & I^{-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^{-} \\ I^{+} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_{I^-} \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{K}h_E \\ Xh \\ I^{-}h_{I^-} \\ I^{+}h_I \end{pmatrix},$$

mille korrutamisel vasakult diagonaalmaatriksiga $(\operatorname{diag} \boldsymbol{X})^{-1}$ leiame, et

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\overline{K}}{X} & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I^-}{I^+} \\ \frac{I^+}{\overline{K}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_{I^-} \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{X} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_{I^-} \\ h_I \end{pmatrix}.$$

Kehtigu investeerimis- ja asendamistegevuse hüpoteesid (A_I) ja (A_R), mis garanteerigu majanduse tsükliteta arengu. Sel juhul võrduse (67) järgi $X_t = X_0 e^{\omega t}$. Arvestame diskonteerimistegevust ja arvutame suhted $\frac{\overline{K}}{X}$, $\frac{I^-}{I^+}$, $\frac{I^+}{\overline{K}}$:

$$\frac{\overline{K}_t}{X_t} = \varkappa, \qquad \frac{I_t^-}{I^+_{t+\Theta} e^{-\varrho\Theta}} = e^{\varrho\Theta},$$

$$\frac{I^+}{\overline{K}} = \frac{(1-\mathfrak{R})^{-1} \mathrm{D}\overline{K}}{\overline{K}} = \frac{(1-\mathcal{E}_{-T})^{-1} \mathrm{D}(\varkappa X)}{\varkappa X} = \frac{(1+\mathcal{E}_{-T}+\mathcal{E}_{-2T}+\ldots)\mathrm{D} X_0 e^{\omega t}}{X_0 e^{\omega t}} =$$

$$= \omega(1+e^{-\omega T}+e^{-2\omega T}+\ldots) = \frac{\omega}{1-e^{-\omega T}}.$$

Tähistame töö otsekulunormi $\frac{L}{X} = l$. Omahinna võrrand avaldub kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\varrho\Theta} \\ \omega(1-e^{-\omega T})^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_{I^-} \\ h_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_E \\ h \\ h_{I^-} \\ h_I \end{pmatrix} \tag{93}$$

või

$$\begin{aligned} \omega(1-e^{-\omega T})^{-1} h_I &= h_E \\ \varkappa h_E + ah \qquad\qquad + l &= h \\ h &= h_{I^-} \\ e^{\varrho\Theta} h_{I^-} &= h_I\,. \end{aligned} \tag{93'}$$

Lahendame võrrandisüsteemi (93′) ja saame, et

$$\begin{aligned} h_E &= \frac{l\omega e^{\varrho\Theta}}{(1-a)(1-e^{-\omega T}) - \varkappa\omega e^{\varrho\Theta}} \\ h = h_{I^-} &= \frac{l(1-e^{-\omega T})}{(1-a)(1-e^{-\omega T}) - \varkappa\omega e^{\varrho\Theta}} \\ h_I &= \frac{l(1-e^{-\omega T})e^{\varrho\Theta}}{(1-a)(1-e^{-\omega T}) - \varkappa\omega e^{\varrho\Theta}}\,. \end{aligned} \tag{94}$$

Valemid (94) võimaldavad uurida tootmissüsteemi-omahinna sõltuvust tootmiskiiruse kasvutempost, investeerimistegevuse viivitusajast, põhivahendite ekspluatatsiooniajast ja diskontoprotsendi määrast.

Lahendame omahinna valemite (94) järgi poliitilise planeerimisülesande, leides tootmisplaanile (t, X_t) vastava fondimaksu määra. Asetame kasvutempo maksimaalväärtuse võrdusest (68) põhivahendite omahinna valemisse ning saame fondimaksu määra arvutamiseks valemi kujul

$$h_E = \frac{\frac{le^{\varrho\theta}}{t} \ln \frac{X_t}{X_0}}{(1-a)\left[1 - \left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{-\frac{T}{t}}\right] - \frac{\varkappa e^{\varrho\theta}}{t} \ln \frac{X_t}{X_0}}. \quad (94')$$

Käsitleme hindade sõltuvust hinnapoliitikast. Karakteristlik võrrand (66) määrab tootmiskiiruse kasvutempo mõnesuguse sõltuvuse hinnapoliitikast

$$\omega = f(\alpha).$$

Kui $\omega(T+\theta)$ on väike, siis sõltuvust $f(\alpha)$ aproksimeerib rahuldavalt näiteks lineaarne sõltuvus

$$\omega \approx \frac{2[(\alpha - a)T - \varkappa]}{(T + 2\theta)\varkappa}.$$

Asendanud omahinna valemites (94) kasvutempo ω avaldisega $f(\alpha)$, leiame, et antud investeerimis-, asendamis- ja diskonteerimistegevuse korral on hinnad üheselt määratud hinnapoliitikaga. Hindade sõltuvus hinnapoliitikast avaldub eriti lihtsalt sel juhul, kui investeerimistegevuse viivitusaega ja põhivahendite kulumist ei arvestata. Eeldame, et tootmiskiiruse kasvutempo $\omega \geqslant 0$ ja läheme karakteristlikus võrrandis (66) piirile $T \to \infty$, $\theta = 0$. Karakteristlik võrrand lihtsustub, taandudes tootmiskiiruse kasvutempo ja hinnapoliitika lineaarseks sõltuvuseks

$$\omega = \frac{\alpha - a}{\varkappa},$$

ning hinnad (94) avalduvad kujul

$$h_E = \frac{l(\alpha - a)}{\varkappa(1-\alpha)}$$
$$h = h_{I^-} = h_I = \frac{l}{1-\alpha}. \quad (94'')$$

Kui $\alpha = a$, siis on investeerimissektori sisendvoog null ja tootmissüsteemi-omahind ilmselt madalaim. Arvutanud lõpptoodangu maksumuse omahinnas

$$Yh = (1-a) X \frac{l}{1-\alpha} = Xl = L,$$

näeme, et viimane on võrdne tööjõu kuluga.

4. Tootmise planeerimisel nõuame, et tootmissüsteemi mõne juhtimisparameetri, näiteks hinnapoliitika või akumulatsiooninormi väärtuse sobiv valik tagaks mingis mõttes optimaalse tootmiskiiruse, mis antud tehniliste parameetrite juures on võimalik [5]. Niisuguseid planeerimisülesandeid nimetatakse *poliitilise planeerimise optimumülesanneteks.* Poliitilise planeerimise optimumülesandega on seotud arendamise eesmärgi ja arendamispoliitika realiseerimisvahendi mõiste. *Tootmise arendamise eesmärgiks* nimetatakse tootmisele seatud nõudeid, mille täitmist on võimalik tagada tootmissüsteemi mõne juhtimisparameetri väärtuse või muutumisrežiimi sobiva valikuga. See juhtimisparameeter on *arendamispoliitika realiseerimisvahend* ehk *tööriist.* Sama juhtimisparameetri väärtuse või muutumisrežiimi sobiva valiku eeskiri on *optimaalne arendamispoliitika* [7]. Tootmise optimaalse arendamispoliitika kavandamisel tuleb jälgida, et

1) tootmise arendamise eesmärk oleks sõnastatud täpselt;

2) poliitika realiseerimisvahend ehk tööriist oleks valitud õigesti.

Arendamise eesmärgi sõnastuse täpsuse tagamiseks tuleb silmas pidada, et see ei sisaldaks vastuolulisi, ebamääraseid ja propagandistlikke fraase, mis planeerimise kui teaduse seisukohalt on mõttetud. Ebamääraste ja vastuoluliste tingimuste sissetoomise kõrval kaldutakse teinekord tootmise arendamise eesmärgi formulatsioonist välja jätma mõnda endastmõistetavana tunduvat tingimust, mis võib aga optimaalse arendamispoliitika kujunemist oluliselt mõjutada. Eesmärgi täpne sõnastus kergendab arendamispoliitika realiseerimisvahendi õiget valikut, määrates selle lihtsate mudelite korral isegi üheselt. Praktilisel planeerimisel võib esineda juhtumeid, kus tootmise arendamise eesmärk (näiteks rasketööstuse eelisarendamine) tuleneb mingist põhieesmärgist (näiteks tarbimise maksimiseerimisest). Sel juhul on nõutav, et oleks tõestatud tulenemise seose olemasolu * ja antaks arendamise eesmärgi interpretatsioon põhieesmärgi terminites.

Olgu tootmise arendamise eesmärk seotud elanikkonna tarbimisega. Valime arendamispoliitika realiseerimisvahendiks hinnapoliitika ja käsitleme tootmise arendamise eesmärgile vastava optimaalse hinnapoliitika kavandamist, kui tootmise dünaamiline tasakaalumudel on antud võrrandiga (63):

$$\mathfrak{J}\mathbf{D}X = \frac{a - a}{\varkappa}(X - \mathfrak{R}X).$$

a) Olgu tootmise arendamise eesmärk maksimaalne tarbimine ajal $\overline{T}$:

$$Y_{\overline{T}} = \max. \tag{95}$$

Leiame hinnapoliitika α niisuguse väärtuse, mille korral tingimus (95) on täidetud. Eeldame lihtsuse mõttes, et investeerimistegevuse viivitusaeg $\theta = 0$ ja põhivahendite asendamist ei toimu. Sel juhul $\mathfrak{J} = 1$ ja $\mathfrak{R} = 0$. Tootmise dünaamiline tasakaalumudel (63) lihtsustub, avaldudes kujul

$$\mathbf{D}X = \frac{a - a}{\varkappa} X, \tag{63'}$$

mille integreerimisel leiame, et

$$X_t = X_0 e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa} t}. \tag{96}$$

Avaldame tarbimise Y_t hinnapoliitika α kaudu. Võrduste (58) ja (96) järgi leiame, et

$$Y_t = (1 - \alpha) X_t = (1 - \alpha) X_0 e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa} t}. \tag{97}$$

Tingimuse (95) täitmiseks on tarvilik, et $(Y_{\overline{T}})_\alpha' = 0$. Diferentseerides ajal $t = \overline{T}$ võrduse (97) pooli, saame võrrandi

$$(Y_{\overline{T}})_\alpha' = (1 - \alpha) X_0 \frac{\overline{T}}{\varkappa} e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} - X_0 e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} = \left(\frac{1 - \alpha}{\varkappa}\overline{T} - 1\right) X_0 e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} = 0,$$

millest

$$\alpha = 1 - \frac{\varkappa}{\overline{T}}. \tag{98}$$

Arvutades teist järku tuletise, võime veenduda, et α väärtusel $1 - \frac{\varkappa}{\overline{T}}$ on $(Y_{\overline{T}})_\alpha'' < 0$, s. t. hinnapoliitika leitud väärtusel on tarbimine $Y_{\overline{T}}$ maksimaalne.

Asetame hinnapoliitika optimaalse väärtuse kasvutempo avaldisse

$$\omega = \frac{\alpha - a}{\varkappa}$$

ja omahinna valemitesse (94″) ning leiame tootmiskiiruse optimaalse kasvutempo ja optimaalsed hinnad:

---

* Arendamise põhieesmärgist tuleneva eesmärgi olemasolu tõestamist käsitleme töö kolmandas osas.

$$\omega = \frac{1-a}{\varkappa} - \frac{1}{\overline{T}},$$

$$h_E = \frac{\overline{T}}{\varkappa}\left(\frac{1-a}{\varkappa} - \frac{1}{\overline{T}}\right)l$$

$$h = h_{l^-} = h_l = \frac{\overline{T}l}{\varkappa}.$$

Peame silmas võrdust (85) ja arvutame võrdusega (98) antud optimaalsele hinnapoliitikale vastava optimaalse akumulatsiooninormi. Kui asendamist ei toimu, siis amortisatsiooninorm $\delta = \varrho$, kus 100ϱ on diskontoprotsendi määr, ja võrdus (85) avaldub kujul

$$\sigma = \frac{a - a - \varrho\varkappa}{1 - a - \varrho\varkappa} = 1 - \frac{\varkappa}{(1 - a - \varrho\varkappa)\overline{T}}. \tag{99}$$

Kui akumulatsiooninorm on eksogeenne, võime valemi (85') järgi arvutada optimaalse diskontoprotsendi määra:

$$\varrho = \frac{1}{\varkappa}\left(1 - a - \frac{\varkappa}{(1-\sigma)\overline{T}}\right). \tag{99'}$$

Arvutame lõppeks optimaalsele hinnapoliitikale vastava maksimaalse tarbimise. Võrduste (97) ja (98) järgi leiame, et

$$Y_{\overline{T}} = (1-a)X_0 e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} = \frac{\varkappa}{\overline{T}} X_0 e^{\frac{1-a}{\varkappa}\overline{T} - 1}. \tag{100}$$

Kui $\overline{T} \to \infty$, siis ilmselt $Y_{\overline{T}} \to \infty$. Tulemusest võime järeldada, et mida kaugem on aeg $\overline{T}$, seda täielikumalt oleme tol ajal võimelised tarbimist rahuldama, kuid ühtlasi seda rohkem oleme enne tolle aja saabumist sunnitud kokku hoidma (vt. võrdus (99)). Eeltoodud ülesannet võime käsitada kui näidet puudulikult sõnastatud arendamiseesmärgiga poliitilise planeerimise optimumülesande kohta: ainult tulevaste põlvkondade maksimaalset heaolu arvestavast tootmise arendamise eesmärgist tuleneb optimaalne arendamispoliitika, mille järgi praegune põlvkond peab kannatama puudust.

b) Tootmise arendamise eesmärk olgu maksimaalne tarbimine ajavahemikus $[0, \overline{T}]$:

$$\int_0^{\overline{T}} Y_t\, dt = \max. \tag{101}$$

Asendame tingimuses (101) Y_t väärtuse võrdusest (97) ja integreerime:

$$\int_0^{\overline{T}} (1-a)X_0 e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}t}\, dt = \varkappa X_0 \frac{1-a}{\alpha - a}\left(e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} - 1\right).$$

Diferentseerime saadud avaldist a järgi ja saame optimaalse hinnapoliitika määramiseks võrrandi kujul

$$\varkappa X_0\left[\frac{\overline{T}}{\varkappa}\frac{1-a}{\alpha - a} - \frac{1-\alpha}{(\alpha - a)^2}\left(1 - e^{-\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}}\right)\right] e^{\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} = 0$$

või

$$1 - e^{-\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}} = \frac{\overline{T}(1-a)(\alpha - a)}{\varkappa(1-\alpha)}. \tag{102}$$

Arendades võrrandis (102) eksponendi $e^{-\frac{\alpha - a}{\varkappa}\overline{T}}$ astmeritta, saame hinnapoliitika optimaalse väärtuse lähisväärtuse arvutamiseks ruutvõrrandi, mille lahendamisel leiame, et

$$a \approx a + \frac{2\varkappa}{\overline{T}}\left(1 - \sqrt{\frac{6\varkappa}{(1-a)\overline{T}} - 2}\right). \tag{102'}$$

Kui näiteks $a = 0$, $\overline{T} = 7{,}2$ aastat, $\varrho = 0$ ja $\varkappa = 3$ aastat, siis valemite (84) ja (102') järgi optimaalse hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi lähisväärtus $\alpha = \sigma \approx 0{,}24$. Hinnates α leitud väärtusel integraali (101) teist tuletist, veendume, et $\frac{d^2}{d\alpha^2}\int\limits_0^{\overline{T}} Y_t\,dt < 0$. Hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi leitud ühisel väärtusel on tarbimine ajavahemikus $[0,\overline{T}]$ seega maksimaalne. Arvutame valemite (94'') järgi hinnapoliitika optimaalsele lähisväärtusele vastavate optimaalsete hindade lähisväärtused ja leiame, et

$$h_E \approx \frac{2l}{19}$$

$$h = h_l \approx \frac{25l}{19}.$$

Uurime hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi asümptootilist käitumist. Jagame võrduse (102) pooli ajaga $\overline{T}$ ja läheme piirile $\overline{T} \to \infty$, $\alpha \neq a$. Siis ilmselt $\frac{(1-a)(\alpha-a)}{\varkappa(1-a)} \to 0$ ja optimaalne hinnapoliitika $\alpha \to 1$. Võrdusest (85) nähtub, et sel juhul läheneb 1-le ka optimaalne akumulatsiooninorm: $\sigma \to 1$. Mida pikem on ajavahemik $[0,\overline{T}]$, seda suurema akumulatsiooninormi dikteerib selles ajavahemikus maksimaalne tarbimine. Kõrgest akumulatsiooninormist tingitud range kokkuhoiurežiim annab eriti tugevasti tunda ajavahemiku $[0,\overline{T}]$ alguses. Tulemusest järeldame, et tootmise arendamise ülalkäsitletud eesmärk ei sobi ilmselt sel juhul, kui ajavahemik $[0,\overline{T}]$ on pikk.

Käsitletud poliitilise planeerimise optimumülesannetes ei olnud arvestatud toodangu tarbimisväärtuse sõltuvust tarbimise tasemest, millele rajaneb tarbimise sotsiaalse kasulikkuse mõiste. Defineerime tarbimise sotsiaalse kasulikkuse kui abstraktse kvantitatiivse mõiste.

Definitsioon 6. *Tarbimise sotsiaalseks kasulikkuseks* nimetatakse tarbimise vajaduste rahuldamise võimet, millel on järgmised kaks omadust [6]:

1° tarbimise kasvamisel suureneb tarbimise sotsiaalne kasulikkus ja vastupidi;

2° samale tarbimise kasvule vastav sotsiaalse kasulikkuse suurenemine on seda väiksem, mida kõrgem on tarbimise tase ja vastupidi.

Mõlema omaduse kehtivust kinnitab sotsiaalne tegelikkus.

Tähistame tarbimise Y sotsiaalse kasulikkuse tähega U. Sotsiaalse kasulikkuse kui kvantitatiivse mõistega opereerimiseks eeldame, et U on teatavas piirkonnas tarbimise Y pidev ja kaks korda diferentseeruv funktsioon. Omaduse (1°) järgi tarbimise kasvu keskmine kasulikkusetootlus $\frac{\Delta U}{\Delta Y} > 0$, omaduse (2°) järgi on suhe $\frac{\Delta U}{\Delta Y}$ tarbimise taseme Y kahanev funktsioon. Kasulikkusfunktsiooni diferentseeruvus tagab piirväärtuse olemasolu

$$\lim_{\Delta Y \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta Y} = u,$$

mida nimetatakse tarbimise *piir-* ehk *marginaalseks kasulikkuseks.* Kuna piirkasulikkus on tarbimise kahanev funktsioon, siis

$$\frac{du}{dY} < 0. \tag{103}$$

Tarbimise piirkasulikkuse mõiste konkretiseerimiseks püstitame järgmised kolm hüpoteesi.

A_U. Piirkasulikkus on tarbimise liitfunktsioon:

$$u = u\,[f(Y)]. \tag{104}$$

B_U. Piirkasulikkuse elastsustegur vahemuutuja f suhtes on mittenegatiivne konstant:

$$\frac{f}{u}\,\frac{\partial u}{\partial f} = v. \tag{105}$$

C_U. Vahemuutuja f on vahemikus $(\underline{Y}, \underline{Y} + \overline{Y})$ monotoonselt kahanev, pidev ja diferentseeruv tarbimise funktsioon, mis rahuldab tingimusi:

kui $Y \to \underline{Y}$, siis $f(Y) \to \infty$, kus $\underline{Y}$ on *elatusmiinimum*;

kui $Y = \underline{Y} + \frac{1}{2}\overline{Y}$, siis $f(Y) = 1$;

kui $Y \to \underline{Y} + \overline{Y}$, siis $f(Y) \to 0$, kus $\underline{Y} + \overline{Y}$ on *külluse piir*.

Valime funktsiooniks $f(Y)$ mingi lihtsa kolme struktuuriparameetrit sisaldava monotoonselt kahaneva funktsiooni, näiteks sõltuvuse kujul

$$f(Y) = \frac{a_0}{Y + a_1} + a_2. \tag{106}$$

Määrame tingimuste (C_U) järgi parameetrite väärtused $a_0 = \overline{Y}$, $a_1 = -\underline{Y}$, $a_2 = -1$ ja leiame, et vahemuutujal f on järgmine konkreetne kuju:

$$f(Y) = \frac{\overline{Y}}{Y - \underline{Y}} - 1. \tag{107}$$

Hüpoteesi (B_U) järgi leiame, et u on vahemuutuja f kasvav funktsioon kujul

$$u = f^v, \tag{108}$$

kui integreerimiskonstant on null. Hüpoteesi (A_U) järgi leiame nüüd tarbimise marginaalse kasulikkusfunktsiooni [2]:

$$u = \left(\frac{\overline{Y}}{Y - \underline{Y}} - 1\right)^v. \tag{109}$$

Käsitleme poliitilise planeerimise optimumülesannet, milles arendamise eesmärk on seotud tarbimise piirkasulikkusega.

c) Tootmise arendamise eesmärk olgu kogu tuleviku tarbimise maksimaalne piirkasulikkus:

$$\int_0^\infty u_t\,dt = \max. \tag{110}$$

Võrrandisüsteemi (57′) esimese kolme võrrandi ning võrduse (60) järgi leiame, et

$$Y = (1 - a)X - \mathfrak{I}(1 - \mathfrak{R})^{-1}\mathrm{D}\varkappa X. \tag{111}$$

Eeldame nagu ennegi, et investeerimistegevuse viivitusaeg $\theta = 0$ ja põhivahendite asendamist ei toimu, s. t. $\mathfrak{I} = 1$ ja $\mathfrak{R} = 0$. Võrdus (111) lihtsustub ning avaldub kujul

$$Y = (1 - a)X - \varkappa\,\mathrm{D}X = (1 - a)X - \varkappa\dot{X}. \tag{111′}$$

Peame silmas, et $u_t = u(Y_t)$, ja kirjutame võrduse (111′) järgi funktsionaali (110) kujul

$$\int_0^\infty u\,[(1 - a)X - \varkappa\dot{X}]\,dt = \max, \tag{110′}$$

mis ilmselt ei sisalda argumenti t. Maksimumi tarvilikku tingimust esitab sel juhul Lagrange'i võrrandi intermediaan:

$$u - \frac{\partial u}{\partial \dot{X}} \dot{X} = \text{const.} \tag{112}$$

Kuna võrduse (111′) järgi $\frac{\partial Y}{\partial \dot{X}} = -\varkappa$ ja $\frac{\partial Y}{\partial X} = 1 - a$, siis võrrandi (112) vasak pool laseb end järgmiselt teisendada:

$$u - \frac{\partial u}{\partial \dot{X}} \dot{X} = u - \frac{du}{dY} \frac{\partial Y}{\partial \dot{X}} \dot{X} = u + \varkappa \frac{du}{dY} \dot{X} =$$

$$= u + \frac{\varkappa}{1-a} \frac{du}{dY} \frac{\partial Y}{\partial X} \dot{X} = u + \frac{\varkappa}{1-a} \frac{du}{dt}.$$

Võrrand (112) taandub harilikuks konstantkordajatega lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks kujul

$$u + \frac{\varkappa}{1-a} \frac{du}{dt} = \text{const}$$

või

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{c} - \frac{1-a}{\varkappa} u, \tag{113}$$

kus $\mathrm{c} = \frac{1-a}{\varkappa}$ const. Konstandi c väärtuse määramiseks peame silmas ääretingimust: kui $t \to \infty$, siis $Y \to \underline{Y} + \overline{Y}$ ja $u = \frac{du}{dt} = 0$, millest nähtub, et $\mathrm{c} = 0$. Võrrand (113) on homogeenne:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1-a}{\varkappa} u. \tag{114}$$

Tarbimise ekstremaali leidmiseks elimineerime võrrandist (114) marginaalse kasulikkusfunktsiooni u. Tähistame $Y - \underline{Y} = y$. Võrduse (109) järgi

$$u = \left(\frac{\overline{Y}}{y} - 1\right)^{v},$$

$$\frac{du}{dt} = v\left(\frac{\overline{Y}}{y} - 1\right)^{v-1} \left(-\frac{\overline{Y}}{y^2}\right) \dot{y} = -\frac{v\overline{Y}}{y^2}\left(\frac{\overline{Y}}{y} - 1\right)^{v-1} \dot{y}$$

ja võrrand (114) teisendub võrrandiks

$$\frac{\overline{Y}\,dy}{y(\overline{Y} - y)} = \frac{1-a}{\varkappa v} dt. \tag{115}$$

Lahutame võrrandi vasaku poole osamurdude summaks ja integreerime:

$$\ln y - \ln(\overline{Y} - y) = \frac{1-a}{\varkappa v} t + \mathrm{C}.$$

Potentseerime ja leiame, et

$$\frac{y}{\overline{Y} - y} = e^{\frac{1-a}{\varkappa v} t + \mathrm{C}},$$

millest

$$y = \frac{\overline{Y} e^{\frac{1-a}{\varkappa v} t + \mathrm{C}}}{1 + e^{\frac{1-a}{\varkappa v} t + \mathrm{C}}}. \tag{116}$$

Ajal $t = t_0$ olgu $y = \frac{1}{2}\overline{Y}$, kus aega t_0 nimetame *poolestusajaks*. Siis ilmselt $\frac{1-a}{\varkappa v} t_0 + \mathrm{C} = 0$ ja $\mathrm{C} = -\frac{1-a}{\varkappa v} t_0$. Tähistame $e^{-\mathrm{C}} = e^{\frac{1-a}{\varkappa v} t_0} = \mathrm{B}$ ja kirjutame tarbimise ekstremaali (116) kujul

$$y = \frac{\overline{Y}}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}}$$

või

$$Y = \underline{Y} + \frac{\overline{Y}}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}}. \tag{117}$$

Kui võrrandis (117) $t \to \infty$, siis $Y \to \underline{Y} + \overline{Y}$, s. t. et tarbimise ekstremaali asümptoot on külluse piir.

Leidnud tarbimise, võime kõrvaltingimuse (111′) järgi arvutada vastava tootmiskiiruse. Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$(1-a)X - \varkappa\dot{X} = \underline{Y} + \frac{\overline{Y}}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}} \tag{118}$$

lahendamiseks tähistame

$$x = (1-a)X - \underline{Y} \tag{119}$$

ning saame, et

$$x - \frac{\varkappa}{1-a}\dot{x} = \frac{\overline{Y}}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}}. \tag{120}$$

Korrutame võrrandi (120) pooli integreeriva teguriga $e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t}$ ja integreerime:

$$\int \left(x - \frac{\varkappa}{1-a}\dot{x}\right) e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} dt = \overline{Y} \int \frac{e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} dt}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}}. \tag{121}$$

Ositi integreerimisel võrrandi (121) vasak pool lihtsustub ja avaldub kujul

$$-\frac{\varkappa}{1-a} x e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} = \overline{Y} \int \frac{e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} dt}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}},$$

millest

$$x = -\frac{(1-a)\overline{Y}}{\varkappa} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} \int \frac{e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} dt}{1 + B e^{-\frac{1-a}{\varkappa v}t}}. \tag{122}$$

Võrduse (122) parem pool on elementaarfunktsioonides integreeruv, kui $\frac{1}{v}$ on täisarv. Kui näiteks $v = 0{,}5$, siis $\frac{1}{v} = 2$ ja integraal (122) on arvutatav asendusega

$$\sqrt{B}\, e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} = z$$

$$-\frac{\varkappa}{1-a} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} \frac{dz}{\sqrt{B}} = dt,$$

mille järgi leiame, et

$$x = \frac{\bar{Y}}{\sqrt{B}} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\bar{Y}}{\sqrt{B}} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} (\arctan z + \bar{C}) =$$

$$= \frac{\bar{Y}}{\sqrt{B}} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} [\arctan(\sqrt{B}\, e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t}) + \bar{C}]. \qquad (123)$$

Konstandi $\bar{C}$ väärtuse määramiseks jagame võrduse (123) pooli eksponendiga $e^{\frac{1-a}{\varkappa}t}$ ja peame silmas ääretingimust: kui $t \to \infty$, siis võrduse (111′) järgi tootmiskiirus $X \to \frac{Y}{1-a} \to \frac{Y+\bar{Y}}{1-a}$ ja võrduse (119) järgi $x \to \bar{Y}$. Tõepoolest, külluse piiril puuduks tarvidus akumuleerimiseks, sest puudub tarvidus selle piiri ületamiseks. Külluse piirile jõudmisel saabuks majanduse arenemise loomulik lõpp [2]. Kuna $t \to \infty$ korral $e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t} \to 0$, siis külluse piiril võrdus (123) lihtsustub:

$$0 = \frac{\bar{Y}}{\sqrt{B}} (0 + \bar{C}),$$

millest nähtub, et

$$\bar{C} = 0. \qquad (124)$$

Võrduste (119), (123) ja (124) järgi leiame nüüd, et tootmiskiirus avaldub kujul

$$X = \frac{1}{1-a}(\underline{Y} + x) = \frac{1}{1-a}\left[\underline{Y} + \frac{\bar{Y}}{\sqrt{B}} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} \arctan(\sqrt{B}\, e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t})\right]. \quad (125)$$

Kui $t = 0$, siis tootmiskiirus

$$X_0 = \frac{1}{1-a}\left(\underline{Y} + \frac{\bar{Y}}{\sqrt{B}} \arctan \sqrt{B}\right), \qquad (126)$$

kus

$$B = e^{\frac{2(1-a)}{\varkappa}t_0}. \qquad (127)$$

Võrdustest (126) ja (127) nähtub, et arenemise alguses peab tootmiskiirus ületama elatusmiinimumi suuruse võrra, mis sõltub poolestusajast t_0. Kui tootmise algkiirus X_0 on antud, võime võrrandist (126) leida B, ja B järgi poolestusaja t_0.

Arvutame lõppeks optimaalse hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi. Võrduste (58), (117) ja (125) järgi leiame, et optimaalne hinnapoliitika

$$a = 1 - \frac{Y}{X} = 1 - \frac{(1-a)\left(1 + \dfrac{A}{1 + B e^{-\frac{2(1-a)}{\varkappa}t}}\right)}{1 + \dfrac{A}{\sqrt{B}} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} \arctan(\sqrt{B}\, e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t})}, \qquad (128)$$

kus $A = \frac{\bar{Y}}{\underline{Y}}$. Võrduse (85) järgi leiame säästmistendentsi ehk akumulatsiooninormi:

$$\sigma = \frac{a-a}{1-a} = 1 - \frac{1 + \dfrac{A}{1 + B e^{-\frac{2(1-a)}{\varkappa}t}}}{1 + \dfrac{A}{\sqrt{B}} e^{\frac{1-a}{\varkappa}t} \arctan(\sqrt{B}\, e^{-\frac{1-a}{\varkappa}t})}. \qquad (129)$$

Kui valemites (128) ja (129) $t = 0$, siis saame optimaalse hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi arenemise alguses:

$$\alpha_0 = 1 - \frac{(1-a)\left(1+\frac{A}{1+B}\right)}{1+\frac{A}{\sqrt{B}}\arctan\sqrt{B}}, \tag{130}$$

$$\sigma_0 = 1 - \frac{1+\frac{A}{1+B}}{1+\frac{A}{\sqrt{B}}\arctan\sqrt{B}}. \tag{131}$$

Arvutades eeskirjade (128) ja (129) järgi hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi numbrilisi väärtusi, võime veenduda, et need tulevad vastavatest statistilistest näitajatest suuremad. Kui näiteks $A = 10$, $\varkappa = 3$ aastat, $t_0 = 12$ aastat ja $a = 0{,}6$, siis arenemise alguses akumulatsiooninorm $\sigma_0 \approx 0{,}63$. Selle nähtuse põhjusi on analüüsinud J. Tinbergen [2], kes märgib, et tarbimise sotsiaalse kasulikkuse kontseptsioon ignoreerib mõningaid akumulatsiooninormi kasvu piiravaid tegureid, mis oma olemuselt on sotsiaalpsühholoogilised. Sotsiaalse kasulikkuse käsitletud kontseptsioon ei arvesta näiteks seda, et indiviidid diskonteerivad tuleviku tarbimist. Valemitega (130) ja (131) dikteeritud ranget kokkuhoiurežiimi tulevaste põlvkondade heaolu nimel ei peaks praegune põlvkond õiglaseks. Täiendades sotsiaalse kasulikkuse mõistet nimetatud sotsiaalpsühholoogiliste tegurite sissetoomisega, võiksime saada optimaalseid hinnapoliitikaid ja akumulatsiooninorme, mis on eeltoodust madalamad. Kui samade lähteandmete korral arvestaksime akumulatsiooninormi arvutamisel näiteks diskonteerimist diskontoprotsendi määraga $100\varrho = 7$, saaksime valemi (85) järgi palju madalama akumulatsiooninormi $\sigma_0 \approx 0{,}22$. Teooria ja tegelikkuse lahkuminekute põhjuseks on ka tootmise dünaamilise tasakaalumudeli lihtsustamine — investeerimistegevuse viivitusaja, asendamis- ja amortiseerimistegevuse mittearvestamine —, mis oli tehtud selleks, et käsitletud poliitilise planeerimise optimumülesanne oleks elementaarfunktsioonides lahenduv.

Sotsiaalse kasulikkuse kontseptsiooni ja tootmise dünaamilise tasakaalumudeli lihtsustamise tõttu ei suuda lahendatud poliitilise planeerimise optimumülesanne anda hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi põhjendatud hinnangut. Veelgi vähem on seda suutelised andma need primitiivsed mudelid, mida kasutab planeerimise senine praktika. Maksimaalselt kasuliku hinnapoliitika ja akumulatsiooninormi määramise kui tänapäeva majandusteaduse ühe keerukama probleemi sügavam läbitöötamine seisab seetõttu alles ees.

KIRJANDUS

1. E. Leinemann, Tootmise tasakaal ja omahind. I. ENSV TA Toimetised, Ühiskonnateaduste Seeria, 2, 1966.
2. J. Tinbergen, H. C. Bos, Mathematical Models of Economic Growth. New York, McGraw-Hill, 1962.
3. C. W. Churchman, R. L. Ackoff, E. L. Arnoff, Introduction to Operations Research. New York, Wiley, 1959.
4. B. V. Dean, Replacement Theory, Progress in Operations Research. Vol. I, Ed. by R. L. Ackoff, New York, Wiley, 1961.
5. E. Linnaks ja E. Leinemann, Majanduspiirkonna tootmisplaani koostamise probleeme. TRÜ toimetised, v. 169, Tartu, 1965.
6. J. G. Kemeny, J. L. Snell, Mathematical Models in the Social Sciences. Boston, Ginn, 1962.
7. J. Tinbergen, Economic Policy: Principles and Design. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1956.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
1. III 1966

Э. ЛЕЙНЕМАНН

РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОДСТВА И СЕБЕСТОИМОСТЬ. II

Резюме

В статье рассматриваются основы макродинамики производственной системы. Как и в первой части работы [1], анализ основан на понятии производственной единицы, включающей сектор производства, инвестиции и основные фонды. Понятию «хозяйственная деятельность» дается следующее обобщение: хозяйственная деятельность производственной единицы — это оператор, устанавливающий соответствие между входным и выходным потоками производственной единицы.

Статья дает определения сектора инвестиций и инвестиционной деятельности, рассматривает гипотезы, определяющие различные виды инвестиционной деятельности как операторы. При рассмотрении себестоимости инвестиций учитывается дисконтирование, выводится уравнение себестоимости сектора инвестиций.

Рассматривается понятие запаса производственной единицы: рост запаса производственной единицы представляет собой разность между входным и выходным потоками производственной единицы. Далее дается определение запасов основных средств и основных фондов. В целях исследования макродинамики основных фондов хозяйственная деятельность последних определяется как диагональная матрица, элементами которой являются операторы — амортизационная деятельность и деятельность по возмещению. Понятия амортизационной деятельности и деятельности по возмещению конкретизируются путем постановки ряда гипотез. Изучается зависимость нормы амортизации от процента дисконтирования и срока эксплуатации основных средств.

Найденные в первой части работы [1] уравнения равновесия производства применяются в третьей части статьи. Выводится динамическая модель равновесия производства в виде

$$\mathfrak{J}\mathrm{D}X = \frac{\alpha - a}{\varkappa}(X - \mathfrak{R}X), \tag{63}$$

где: $\mathfrak{J}$ — инвестиционная деятельность;
$\mathfrak{R}$ — деятельность по возмещению;
X — скорость производства;
α — политика цен;
a — коэффициент прямых затрат собственной продукции;
$\varkappa$ — норма фондоемкости (по основным фондам);
D — оператор дифференцирования.

При классификации параметров производственной системы, представленных в уравнении (63), определяются понятия аналитической и политической задач планирования [2] и рассматривается решение политической задачи планирования — нахождение соответствующей заданному плану производства (t, X_t) политики цен при различных гипотезах инвестиционной деятельности и деятельности по возмещению. При интерпретации политики цен в понятиях теории распределения национального дохода выводится зависимость нормы аккумуляции от политики цен. При решении аналитической задачи планирования по модели (63) находится приближенная функциональная зависимость темпа роста скорости производства от нормы аккумуляции, нормы фондоемкости и срока эксплуатации основных средств. Третья часть статьи рассматривает исчисление себестоимости производственной системы, представленной моделью (63), и показывает, что цены определяются политикой цен однозначно.

В заключительной части статьи рассматривается политическая задача оптимального планирования, причем автор останавливается на понятиях цели развития, средств реализации политики, конечной и производной целей и приводит простейшие примеры решения политической задачи оптимального планирования. Даются определения социальной полезности потребления и предельной полезности [6] и, с учетом соответствующих гипотез, выводится функция предельной полезности. Решается политическая задача оптимального планирования, в которой цель развития увязана с данной функцией предельной полезности; анализируются и критикуются решения.

Выводы статьи применимы в практике планирования.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/III 1966

E. LEINEMANN

THE PRODUCTION EQUILIBRIUM AND COST PRICE. II

Summary

This paper deals with the fundamentals of macrodynamics of a production system. The treatment is based on the concept of production unit *, its input and output. Inventory of production unit is defined by its growth: the growth of production unit inventory is the difference between input and output. Economic activity of production unit is defined by means of an operator: production unit economic activity is an operator establishing the interrelation of input and output.

The paper presents definitions of investment sector and investment activity. Separate hypotheses have been set up to determine different types of investment activity by using respective operators. Discount was taken into consideration when evaluating investment costs by cost price equation, applicable for the hypotheses of investment activity.

The treatment continues by defining the stock of equipment or capital goods, and the stock of capital. Economic activity of capital is expressed as an operator-diagonal matrix, where the diagonal elements are operators, respectively identified as depreciation and replacement activities. Depreciation and replacement activities are made concrete by setting a series of hypotheses. An examination is made of the dependence of the depreciation rate in respect to the discount percentage and useful life of equipment.

The defined concepts find their application in the construction of an equilibrium model of production macrodynamics given by equation

$$\mathfrak{J}\mathbf{D}X = \frac{\alpha - a}{\varkappa}\,(X - \mathfrak{R}X) \tag{63}$$

where the economic and mathematical meaning of letters $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$, X, a, $\varkappa$, α, and $\mathbf{D}$ is as follows:

$\mathfrak{J}$ — investment activity,
$\mathfrak{R}$ — replacement activity,
X — production speed,
a — production input coefficient,
$\varkappa$ — capital-output ratio,
α — price policy,
$\mathbf{D}$ — differential operator.

The concepts of the analytical and the political problem of development planning have been determined by the classification of the parameters given in model (63) [2, 7]. The political problem has been solved to design the price policy devices for separate investment and replacement activities, according to the given production plan (t, X_t).

The postulates showing the distribution of national income have been set up to interpret the concept of price policy in terms of national income. It follows from these hypotheses that the dependence of price policy on the savings rate σ is given by identity

$$\alpha = \sigma + (a + \delta\varkappa)(1 - \sigma) \tag{84}$$

where δ is the depreciation rate. Model (63) has been employed to solve an analytical problem, the result of which gives an approximation

$$\omega \approx \frac{2[(\alpha - a)T - \varkappa]}{(T + 2\theta)\varkappa} \tag{91'}$$

showing the dependency of the growth rate ω of production speed on price policy α, production input coefficient a, capital-output ratio $\varkappa$, useful life of equipment T, and gestation lag of investment θ. It can be shown that the general equation of production system cost price (***) deduced in the first part of the work [1], permits a good interpretation in terms of the data of model (63). The coordinates of the vector of production system cost price obtained by using the general equation (***) and model (63), are

---

* From the point of view of descriptive economics the concept of production unit introduced by the author in the first part of the work [1], appears to be too inclusive; apart from the production sector, it includes investments and capital as well. However, from the mathematical point of view this new concept is restrictive enough for us to deduce a transparent theory of reproduction.

$$h_E = \frac{l\omega e^{\varrho\Theta}}{(1-a)(1-e^{-\omega T}) - \varkappa\omega e^{\varrho\Theta}}$$

$$h = \frac{l(1-e^{-\omega T})}{(1-a)(1-e^{-\omega T}) - \varkappa\omega e^{\varrho\Theta}} \tag{94}$$

$$h_I = \frac{l(1-e^{-\omega T})e^{\varrho\Theta}}{(1-a)(1-e^{-\omega T}) - \varkappa\omega e^{\varrho\Theta}}$$

where

h_E — equipment cost price or cost price of capital goods,
h — production cost price,
h_I — investment cost price,
l — input coefficient of production primary factors (e. g. labour),
100ϱ — discount percentage.

The treatment of the production system cost price concludes by the verification of the fact that prices are determined by price policy.

The final section of the paper describes the treatment of the optimum problem of policy planning, wherein the author dwells on the separate aspects of the problem, e. g. the role of aims and tools or instruments in the design of development policy, the relation of ultimate and derived aims, etc. Simplified examples for solving the problem of optimum policy planning are given in the paper for the case where the instrument considered is price policy and the aim of development is linked with consumption. The paper defines the concepts of social and marginal utility of consumption [6]. Proceeding from the proposed utility hypotheses, a concrete function of marginal utility has been deduced. An optimum problem of the policy planning, with the aim of the development linked with the marginal utility function stated above, has been solved to find an optimal price policy and savings rate. In conclusion, the author makes critical notes of the derived optimum program which has the tendency to recommend austerity in order to enable the fastest approach of the saturation level.

The obtained results can be applied in the practice of development planning.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Economics

Received
March 1, 1966

Õienduseks

Uurimuse esimesse ossa (Tootmise tasakaal ja omahind. I. «Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised — Ühiskonnateaduste Seeria» 1966, nr. 2) on sattunud trükivigu.

Lk. 151 (valem 5) on trükitud: $m_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ji}\mathfrak{x}_{ij} = h_i \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_{ij}$;

peab olema: $m_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ji}\mathfrak{x}_{ij} - h_i \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_{ij}$,

lk. 153 (2. rida ülalt) on trükitud: $\mathfrak{X}_i \cap (\mathfrak{X}_j \cap \mathfrak{X}_k) - (\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j) \cap \mathfrak{X}_k$,

peab olema: $\mathfrak{X}_i \cap (\mathfrak{X}_j \cap \mathfrak{X}_k) = (\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j) \cap \mathfrak{X}_k$;

lk. 156 (11. rida ülalt) on trükitud: $\Delta X, \Delta^2 X, \ldots, \Delta^p x$,

peab olema: $\Delta X, \Delta^2 X, \ldots, \Delta^p X$.