EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSTE SEERIA. 1966, Nr. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК. 1966, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1966.2.01

E. LEINEMANN

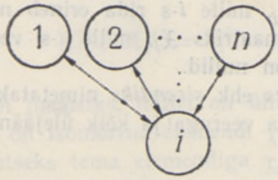
# TOOTMISE TASAKAAL JA OMAHIND. I

Omahinda kui majandusteaduslikku kategooriat on võimalik uurida mitmesuguste matemaatiliste mudelitega. Tema kujunemise täpne imiteerimine võimaldab õigesti hinnata tootmissüsteemi kasumit, mis on tootmistegevuse tähtsamaid näitajaid. Käesolevas artiklis esitatakse tootmissüsteemi kui abstraktse kvantitatiivse mõiste definitsioon ning sellele tuginedes ehitatakse tootmise ja omahinna determineeritud tasakaalumudelid. Tootmisüksuse ja tootmissüsteemi mõiste käsitlemisel on silmas peetud M. Mesarovići seisukohti artiklist «On Self-Organizational Systems» [1], milles abstraktne isereguleeriv süsteem defineeritakse tema elementide seoste kaudu ümbrusega. Tootmise ja omahinna tasakaalumudelite uurimisel peatutakse sisendi ja tootmiskiiruse funktsionaalse sõltuvuse hüpoteesidel, millest lähtudes leitakse tootmise ja omahinna tasakaalumudelite mõned konkreetsed erijuhud. Artikli lõpus rakendatakse saadud tulemusi ja antakse hinnang mõnele praktikas kasutatavale omahinnaeeskirjale.

*

1. Järgneva käsitluse aluseks on tootmisüksuse mõiste. Kirjeldav majandusteadus käsitab tootmisüksust kui ükskõik missugust tootmisorganisatsiooni või selle mingit osa (ettevõtte tsehh, farm, ettevõte, tööstusharu, majanduspiirkond), mida iseloomustab tema toodang. Iga tootmisüksus on samal ajal ka tarbimisüksus, mis kasutab teiste tootmisüksuste toodangut. Tootmisüksuses ühe ajaühiku jooksul tarbitud elav- ja asjastatud tööd nimetatakse tootmisüksuse sisendvooks ehk sisendiks. Tootmisüksuses ühe ajaühiku jooksul toodetud toodangut aga — tootmisüksuse väljundvooks ehk väljundiks, mis jaguneb kolmeks: väljundi üks osa tarbitakse samas tootmisüksuses, teine osa tarbitakse teistes tootmisüksustes, osa väljundist aga neeldub, s. o. läheb lõpptarbimisse. Tootmisüksuse sisend- ja väljundvoo ühist osa nimetatakse tootmisüksuse sisekäibeks. Sisekäive on väljundvoo see osa, mis tarbitakse ühe ajaühiku vältel samas tootmisüksuses.

Tootmisüksuse mõiste kvantitatiivseks piiritlemiseks märgime tootmisüksused naturaalarvudega $i$ ja $j$ ($i, j=1, 2, \ldots, n$). Olgu $\mathfrak{x}_{ij}$ tootmisüksuse $i$ toodangu tarbimiskiirus tootmisüksuses $j$. Suurus $\mathfrak{x}_{ij}$ on tootmisüksuse $i$ suhtes väljund ja tootmisüksuse $j$ suhtes sisend. Tootmisüksuse $i$ vahekorda teiste tootmisüksustega iseloomustab toodangu kahesuunaliste voogude graaf [2]




(*)

millele vastab $n$-järku ruutmaatriks

Defineerime tootmisüksuse ümbruse. Kui maatriks $H$ on lahutatav kahe mittelõikuva maatriksi $F$ ja $G$ summaks kujul

$$F \cup G = H,$$

kus

$$F \cap G = \Theta,$$

siis ütleme, et maatriks $G$ on maatriksi $F$ täiend maatriksis $H$ ja kirjutame

$$\overline{F} = G.$$

Maatriksi täiendi leidmist võime käsitada kui teatavat unaarset arvutusoperatsiooni — täiendtehet, mis allub järgmistele arvutamise eeskirjadele:

$$\overline{\overline{F}} = F, \quad \overline{H} = \Theta, \quad \overline{\Theta} = H$$

$$\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$$

$$\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}.$$

Tootmisüksuse sisekäibe täiendit $\overline{\mathfrak{X}}_i^0$ nimetatakse *tootmisüksuse ümbruseks*. Tootmisüksus on oma sisekäibe ja ümbruse ühend:

$$\mathfrak{X}_i^0 \cup \overline{\mathfrak{X}}_i^0 = \mathfrak{X}_i.$$

Avaldame ümbruse tootmisüksuse sisend- ja väljundvoo kaudu ning leiame, et

$$\overline{\mathfrak{X}}_i^0 = (\mathfrak{X}_i^- \cup \mathfrak{X}_i^+) \setminus (\mathfrak{X}_i^- \cap \mathfrak{X}_i^+).$$

Tootmisüksuse ümbrus on sisend- ja väljundvoo sümmeetriline vahe.

Defineerime järgmised uued mõisted. Vektorit nimetatakse *ühenimeliseks*, kui tema koordinaadid on sama dimensiooniga suurused, ja *erinimeliseks*, kui tema koordinaadid ei ole sama dimensiooniga suurused. Erinimelise vektori *hind* on niisugune positiivne vektor, mille koordinaatide korrutamisel antud vektori vastavate koordinaatidega saame ühenimelise vektori. Vektori *väärtus* mingis hinnas on vektori ja hinnavektori skalaarkorrutis.

Olgu tootmisüksuse sisend- ja väljundvoog $\mathfrak{X}_i^-$ ja $\mathfrak{X}_i^+$ erinimelised. Tootmisüksuse sisendvektori mingit hinda $\underline{h}_{i\cdot}$ nimetatakse *sisendihinnaks* ja väljundvektori mingit hinda $\overline{h}_{\cdot i}$ — *väljundihinnaks*. Defineerime tootmisüksuse tasakaalu.

D e f i n i t s i o o n 2. Erinimelise sisendi ja väljundiga tootmisüksus on *tasakaalus*, kui vastavalt igale etteantud sisendihinnale $\underline{h}_{i\cdot}$ leidub niisugune väljundihind $\overline{h}_{\cdot i}$, mille puhul kehtib võrdus

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{h}_{ij}\mathfrak{x}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \overline{h}_{ji}\mathfrak{x}_{ij}. \qquad (2)$$

Võrdus (2) on tootmisüksuse tasakaalu tingimus.

Ahendame tootmisüksuse mõiste mahtu. Eeldame, et

1° tootmisüksus toodab üheliigilist toodangut ja

2° tootmisüksuse sisekäibe sisendihind on võrdne sisekäibe väljundihinnaga.

Esimese tingimuse järgi on tootmisüksuse väljund ühenimeline vektor, teise järgi on tootmisüksuse sisendihinna $i$-s koordinaat võrdne väljundihinna vastava koordinaadiga, s. o. $\underline{h}_{ii} = \overline{h}_{ii}$. Tugineme antud eeldustele ja defineerime tootmisüksuse-omahinna.

D e f i n i t s i o o n 3. *Tootmisüksuse-omahind* on niisugune võrdsete koordinaatidega väljundihind, mille korral tootmisüksus on tasakaalus:

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\mathfrak{x}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} h_i\mathfrak{x}_{ij}. \tag{3}$$

Arvutame võrduse (3) järgi tootmisüksuse-omahinna. Eraldame võrduse (3) vasakus pooles sisekäibe $\mathfrak{x}_{ii}$, mille tarbimine toimub omahinnaga $h_i$. Tähistagu summa $\sum_{j \neq i} h_{ij}\mathfrak{x}_{ji}$ liitmist $j$ järgi 1-st $n$-ni, välja arvatud väärtus $j = i$ [4]. Võrdus (3) avaldub kujul

$$\sum_{j \neq i} h_{ij}\mathfrak{x}_{ji} + h_i\mathfrak{x}_{ii} = h_i \sum_{j} \mathfrak{x}_{ij}. \tag{3'}$$

Väljundvoo koordinaatide summat $\sum_{j} \mathfrak{x}_{ij}$ nimetatakse tootmisüksuse $i$ *tootmiskiiruseks* ja märgitakse tähega $X_i$:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_{ij} = X_i.$$

Avaldame võrdusest (3′) omahinna $h_i$ ja leiame, et

$$h_i = \frac{\sum_{j \neq i} h_{ij}\mathfrak{x}_{ji}}{X_i - \mathfrak{x}_{ii}} = \frac{\sum_{j \neq i} h_{ij}\mathfrak{x}_{ji}}{\sum_{j \neq i} \mathfrak{x}_{ij}}. \tag{4}$$

Olgu väljundihind $\bar{h}_{\cdot i}$ niisugune, et $\sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ji}\mathfrak{x}_{ij} > h_i \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_{ij}$. Positiivset vahet

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ji}\mathfrak{x}_{ij} = h_i \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_{ij} \tag{5}$$

nimetatakse *tootmisüksuse kasumiks*. Eeldame, et tootmisüksuse väljundihinna koordinaadid on omavahel võrdsed, välja arvatud $i$-s koordinaat, mis on võrdne omahinnaga:

$$\bar{h}_{ji} = \begin{cases} \bar{h}_i, & j \neq i \\ h_i, & j = i. \end{cases}$$

Arvutame tootmisüksuse kasumi ja leiame, et

$$m_i = (\bar{h}_i - h_i)(X_i - \mathfrak{x}_{ii}) = (\bar{h}_i - h_i) \sum_{j \neq i} \mathfrak{x}_{ij}. \tag{6}$$

2. Tähistame naturaalarvudega 1, 2, ..., $n$ majandusüksused, mille hulga märgime tähega $N$. Jagunegu hulk $N$ kolme paarikaupa mittelõikuva osahulga $\bar{M}_1$, $M$ ja $\bar{M}_2$ summaks

$$N = \bar{M}_1 \cup M \cup \bar{M}_2,$$

kus osahulgad $\bar{M}_1$, $M$ ja $\bar{M}_2$ tähendavad vastavalt tootmise esmastegureid, tootmisüksusi ja lõpptoodangut. Defineerime tootmissüsteemi kui abstraktse kvantitatiivse mõiste.

D e f i n i t s i o o n 4. *Tootmissüsteemiks* nimetatakse majandusüksuste $\mathfrak{X}_i$, $i \in N$ ühendit

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in N} \mathfrak{X}_i = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_{11} & \mathfrak{x}_{12} & \cdots & \mathfrak{x}_{1n} \\ \mathfrak{x}_{21} & \mathfrak{x}_{22} & \cdots & \mathfrak{x}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{x}_{n1} & \mathfrak{x}_{n2} & \cdots & \mathfrak{x}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ettevõte kui tootmissüsteem võib olla näiteks tsehhide ühend, majanduspiirkond kui tootmissüsteem on tootmisharude ühend jne.

Kui tootmise esmastegurite ja lõpptoodangu üksuste hulgad $\overline{M}_1$ ja $\overline{M}_2$ on tühjad, s. o. $\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = 0$, siis nimetatakse tootmissüsteemi *kinniseks*. Kinnise tootmissüsteemi korral on kõik $n$ majandusüksust tootmisüksused ($N = M$). Kui tootmise esmastegurite ja lõpptoodangu üksuste hulgad ei ole tühjad, s. o. $\overline{M}_1 \neq 0$, $\overline{M}_2 \neq 0$, siis nimetatakse tootmissüsteemi *lahtiseks* [5]. Lahtise tootmissüsteemi tootmisüksuste sisendvoogude ühend $\mathfrak{X}^-$ on *tootmissüsteemi sisendvoog*:

$$\mathfrak{X}^- = \bigcup_{i \in M} \mathfrak{X}_i^-.$$

Lahtise tootmissüsteemi tootmisüksuste väljundvoogude ühend $\mathfrak{X}^+$ on *tootmissüsteemi väljundvoog*:

$$\mathfrak{X}^+ = \bigcup_{i \in M} \mathfrak{X}_i^+.$$

Arvutame tootmissüsteemi sisendvoo täiendi:

$$\overline{\mathfrak{X}^-} = \bigcup_{)M(} \mathfrak{X}_i^- = \Big(\bigcup_{i \in \overline{M}_1} \mathfrak{X}_i^-\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in \overline{M}_2} \mathfrak{X}_i^-\Big) = \bigcup_{i \in \overline{M}_2} \mathfrak{X}_i^-.$$

Tootmissüsteemi sisendvoo täiend on lõpptoodangu sisendvoog. Analoogiliselt leiame, et

$$\overline{\mathfrak{X}^+} = \bigcup_{i \in \overline{M}_1} \mathfrak{X}_i^+.$$

Tootmissüsteemi väljundvoo täiend on tootmise esmastegurite väljundvoog.

Eeldame, et tootmise esmastegurite väljundvoog lõpptoodangusse on null. Sel juhul tootmissüsteemi sisend- ja väljundvoo täiendid ei lõiku:

$$\overline{\mathfrak{X}^-} \cap \overline{\mathfrak{X}^+} = \Theta.$$

Rakendame võrduse pooltele täiendtehet. Täiendi distributiivsuse seadust liitmise suhtes silmas pidades saame

$$\mathfrak{X}^- \cup \mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}.$$

Tootmissüsteem on oma sisend- ja väljundvoo ühend.

Tootmissüsteemi sisend- ja väljundvoo ühisosa nimetatakse *tootmissüsteemi sisekäibeks* ja tähistatakse:

$$\mathfrak{X}^- \cap \mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}^0.$$

Tootmissüsteemi sisekäibe täiendit $\overline{\mathfrak{X}^0}$ nimetatakse *tootmissüsteemi ümbruseks*. Järelikult on tootmissüsteem oma sisekäibe ja ümbruse ühend:

$$\mathfrak{X}^0 \cup \overline{\mathfrak{X}^0} = \mathfrak{X}.$$

Avaldame ümbruse tootmissüsteemi sisend- ja väljundvoo kaudu:

$$\overline{\mathfrak{X}^0} = (\mathfrak{X}^- \cup \mathfrak{X}^+) \setminus (\mathfrak{X}^- \cap \mathfrak{X}^+).$$

Tootmissüsteemi ümbrus on sisend- ja väljundvoo sümmeetriline vahe. Kui tootmissüsteem on kinnine, siis $\mathfrak{X}^- \cup \mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}^- \cap \mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}$ ja $\overline{\mathfrak{X}^0} = \Theta$. Kinnise tootmissüsteemi ümbrus on null.

Kirjeldavas majandusteaduses öeldakse, et majandusüksused määravad tootmissüsteemi struktuuri. Vaatleme mingit kolme majandusüksust $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_j$, $\mathfrak{X}_k$. Struktuuriaksioomide

$$\mathfrak{X}_i \cup \mathfrak{X}_j = \mathfrak{X}_j \cup \mathfrak{X}_i \qquad \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j = \mathfrak{X}_j \cap \mathfrak{X}_i$$

$$\mathfrak{X}_i \cup (\mathfrak{X}_j \cup \mathfrak{X}_k) = (\mathfrak{X}_i \cup \mathfrak{X}_j) \cup \mathfrak{X}_k \qquad \mathfrak{X}_i \cap (\mathfrak{X}_j \cap \mathfrak{X}_k) = (\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j) \cap \mathfrak{X}_k$$

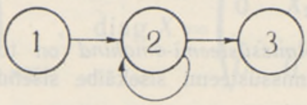
$$\mathfrak{X}_i \cup (\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j) = \mathfrak{X}_i \qquad \mathfrak{X}_i \cap (\mathfrak{X}_i \cup \mathfrak{X}_j) = \mathfrak{X}_i$$

kehtima jäämisest järeldame, et öeldu jääb jõusse ka struktuuri mõiste matemaatilises tähenduses: majandusüksused moodustavad hulgateoreetilise liitmise ja korrutamise suhtes tootmissüsteemi kui struktuuri.

Olgu hulga $N$ osahulkade $\overline{M}_1$, $M$ ja $\overline{M}_2$ elementide arvud vastavalt $k$, $m$ ja $l$ $(k + m + l = n)$. Järjestame tootmissüsteemi $\mathfrak{X}$ majandusüksused niiviisi, et esimesel kohal oleksid $k$ tootmise esmastegurit, edasi järgneksid $m$ tootmisüksust ja lõpuks tuleksid $l$ lõpptoodangu üksust. Anname naturaalarvudele 1, 2 ja 3 järgmise majandusteadusliku interpretatsiooni:

1 — $k$ tootmise esmastegurit,
2 — $m$ tootmisüksust,
3 — $l$ lõpptoodangu üksust.

Tootmissüsteemi ja tema ümbruse vahekorda iseloomustab tootmise esmastegurite ja toodangu voogude graaf:




Graafile vastab tootmissüsteemi maatriks

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \theta & X_{12} & \theta \\ \theta & X_{22} & X_{23} \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix}, \tag{8}$$

mille veerud ja read tähendavad tootmise esmastegurite, tootmisüksuste ja lõpptoodangu sisend- ja väljundvooge. Arvutanud tootmissüsteemi sisekäibe, saame

$$\mathfrak{X}^0 = \begin{pmatrix} \theta & X_{12} & \theta \\ \theta & X_{22} & \theta \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & X_{22} & X_{23} \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & X_{22} & \theta \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Tootmissüsteemi sisekäive on maatriks, millel on ülimalt $m^2$ nullist erinevat elementi. Kuna maatriksite $\mathfrak{X}^0$ hulk on liitmise, skalaariga korrutamise ja korrutamise suhtes isomorfne maatriksite $X_{22}$ hulgaga, siis võime lugeda maatriksi $\mathfrak{X}^0$ ekvivalentseks tema kastiga $X_{22}$ ja mõista sisekäibe all maatriksi $\mathfrak{X}^0$ kasti $X_{22}$.

Arvutanud tootmissüsteemi ümbruse

$$\overline{\mathfrak{X}}^0 = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}^0 = \begin{pmatrix} \theta & X_{12} & \theta \\ \theta & \theta & X_{23} \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix},$$

näeme, et selle moodustavad tootmise esmastegurid ja lõpptoodang. Ettevõtte kui tootmissüsteemi ümbruse moodustavad ühelt poolt näiteks tootmise esmastegurid — põhifondid, tooraine ja tööjõud — ning teiselt poolt kaubatoodang. Majanduspiirkonna kui tootmissüsteemi ümbruse moodustavad ühelt poolt tootmise esmastegurid — põhifondid, tööjõud ja import — ning teiselt poolt lõpptoodang — elanikkonna tarbimine, investeeringud ja eksport.

Tähistame maatriksi $\mathfrak{X}$ kastide $X_{12}$, $X_{22}$, $X_{23}$ üldelemendid tähtedega $z_{ij}$, $x_{ij}$ ja $y_{ij}$. Maatriksi $\mathfrak{X}$ nullist erinevad kastid moodustavad tabeli

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} & & & & \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ z_{k1} & z_{k2} & \dots & z_{km} & & & & \\ \hline x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} & y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{ml} \end{array}\right|, \tag{9}$$

mille veerud ja read on tootmisüksuste sisend- ja väljundvood. Defineerime tootmissüsteemi tasakaalu.

Definitsioon 5. Tootmissüsteem on *tasakaalus*, kui tootmissüsteemi iga tootmisüksus on tasakaalus.

Uurime tootmissüsteemi tasakaalu erinimeliste sisend- ja väljundvektorite korral. Nagu tootmisüksuse, nii eeldame ka tootmissüsteemi puhul, et iga tootmisüksus annab üheliigilist toodangut. Tootmisüksuse-omahinna käsitlemisel eeldasime, et tootmisüksuse sisekäive toimub omahinnaga. Üldistame seda postulaati ja eeldame, et kogu tootmissüsteemi sisekäive toimub tootmisüksuste omahindadega. Defineerime tootmissüsteemi-omahinna.

Definitsioon 6. *Tootmissüsteemi-omahind* on tootmisüksuste niisugune omahinnavektor, mille korral tootmissüsteemi sisekäibe sisendihind on võrdne tootmissüsteemi-omahinnaga.

Tähistame sisendvoo elemendi $z_{ij}$ hinna tähega $h_i$ ja tootmisüksuse $j$ omahinna tähega $\bar{h}_j$ ning arvutame tootmissüsteemi-omahinna. Tootmissüsteemi-omahinna definitsiooni järgi kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} h_i z_{i1} + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{i1} &= h_1 \Big(\sum_{i=1}^{m} x_{1i} + \sum_{i=1}^{l} y_{1i}\Big) \\ \sum_{i=1}^{k} h_i z_{i2} + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{i2} &= h_2 \Big(\sum_{i=1}^{m} x_{2i} + \sum_{i=1}^{l} y_{2i}\Big) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} h_i z_{im} + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{im} &= h_m \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{mi} + \sum_{i=1}^{l} y_{mi}\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

Tähistame

$$\sum_{i=1}^{k} h_i z_{ij} = R_j, \quad \sum_{i=1}^{l} y_{ji} = Y_j. \tag{11}$$

Võrdused (10) avalduvad kujul

$$\begin{aligned} R_1 + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{i1} &= h_1 X_1 \\ R_2 + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{i2} &= h_2 X_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ R_m + \sum_{i=1}^{m} h_i x_{im} &= h_m X_m, \end{aligned} \tag{12}$$

kus

$$X_1 = \sum_{i=1}^{m} x_{1i} + Y_1$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^{m} x_{2i} + Y_2$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad (13)$$

$$X_m = \sum_{i=1}^{m} x_{mi} + Y_m$$

on tootmisüksuste 1, 2, ..., $m$ tootmiskiirused. Võrrandisüsteeme (13) ja (12) nimetatakse *tootmise* ja *omahinna tasakaalumudeliteks*. Kirjutame võrrandisüsteemi (12) ja (13) vektor-maatrikstähistuses, mis võimaldab tootmise ja omahinna tasakaalumudelitele anda eriti lihtsa kuju. Olgu:

$R$ — tootmise esmastegurite kulu kiirusvektor rahas;
$X$ — tootmise kiirusvektor;
$Y$ — lõpptoodangu kiirusvektor;
$h$ — tootmissüsteemi-omahinna vektor.

Defineerime $m$-dimensioonilise vektori, mille iga element on 1, ja vektori $X$ diagonaalmaatriksi võrdustega

$$\overline{E}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{m\times 1}, \quad \operatorname{diag} X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_m \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Vektoreid $X$ ja $\overline{E}_m$ ning diagonaalmaatriksit diag $X$ seob võrdus

$$(\operatorname{diag} X)\overline{E}_m = X. \qquad (14')$$

Võrrandisüsteemi (12) kordajate maatriks on sisekäibemaatriksi $X_{22} = (x_{ji})_{m\times m}$ transponeeritud maatriks $X'_{22}$. Kuna vektor $\overline{E}_m$ deformeerib $m$ veeruga maatriksi $X_{22}$ üheveeruliseks, siis avalduvad omahinna ja tootmise tasakaalumudelid (12) ja (13) kujul

$$R + X'_{22}h = (\operatorname{diag} X)h \qquad (12')$$

$$X - X_{22}\overline{E}_m = Y, \qquad (13')$$

kus

$$R = X'_{12}h, \qquad Y = X_{23}\overline{E}_l. \qquad (11')$$

Lahendame võrrandi (12′) ja leiame tootmissüsteemi-omahinna kujul

$$h = [(\operatorname{diag} X - X_{22})^{-1}]'R. \qquad (15)$$

Uurime tootmissüsteemi-omahinna mõistet lähemalt. Peame silmas võrdusi (13′) ja (14), ning arvutame lõpptoodangu maksumuse omahinnas:

$$h'Y = \{[(\operatorname{diag} X - X_{22})^{-1}]'R\}'(X - X_{22}\overline{E}_m) =$$

$$= R'(\operatorname{diag} X - X_{22})^{-1}(\operatorname{diag} X - X_{22})\overline{E}_m =$$

$$= R'\overline{E}_m = \sum_{j=1}^{m} R_j.$$

Saame majandusteaduse tuntud põhiseose kujul

$$h'Y = \sum_{i=1}^{m} R_i, \qquad (16)$$

mida nimetatakse *hinnakriteeriumiks*. Viimase järgi on tasakaalus tootmissüsteemi lõpptoodangu maksumus omahinnas võrdne tootmise esmastegurite kuluga.

Hinnakriteeriumist lähtudes jaotame kõik omahinna arvutamise eeskirjad täpseteks ja ligikaudseteks. Kui mingi eeskirja järgi arvutatud omahind * rahuldab hinnakriteeriumi, siis ütleme, et omahinna arvutamise eeskiri ja leitud omahind on täpsed. Eeskirjaga (15) antud omahind rahuldab hinnakriteeriumi ja on omahind majandusteaduslikus mõttes. Kui mingi eeskirja järgi arvutatud omahind hinnakriteeriumi ei rahulda, siis ütleme, et omahinna arvutamise eeskiri ja leitud omahind ei ole täpsed.

3. Tootmise ja omahinna tasakaalumudelite (13′) ja (12′) tuletamisel jätsime lahtiseks sisendi $x_{ij}$ ja tootmiskiiruse $X$ funktsionaalse sõltuvuse küsimuse; sellest sõltuvusest olenevalt võib tootmise ja omahinna tasakaalumudelitel olla kord üks, kord teine konkreetne kuju. Eeldame, et sisend $x_{ij}$ on aja $t$ ning tootmise kiirusvektori $X$ ja tema diferentside $\Delta X, \Delta^2 X, \ldots, \Delta^p x$ ilmutatud funktsioon kujul

$$x_{ij} = x_{ij}(t, X, \Delta X, \Delta^2 X, \ldots, \Delta^p X). \tag{17}$$

Kui aeg $t$ sõltuvuse (17) argumentide hulka ei kuulu, siis avaldub sõltuvus kujul

$$x_{ij} = x_{ij}(X, \Delta X, \Delta^2 X, \ldots, \Delta^p X). \tag{17′}$$

Veelgi kitsama võimaluste klassi haarab niisugune funktsioon, mis ei sisalda tootmiskiiruse diferentse:

$$x_{ij} = x_{ij}(X). \tag{17″}$$

Käsitleme sisendi ja tootmiskiiruse funktsionaalse sõltuvuse (17″) mõnda konkreetset erikuju. Eeldame, et sisendi $x_{ij} (x_{ij} \neq 0)$ kasvutempo on võrdeline tootmiskiiruse $X_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ kasvutempoga. Sel juhul ütleme, et tootmisüksuse $i$ toodangu tarbimiskiirus tootmisüksuses $j$ on tootmiskiiruse $X_k$ suhtes *elastne*, ja kirjutame

$$\frac{\Delta x_{ij}}{x_{ij}} = \gamma_{ij}^{(k)} \frac{\Delta X_k}{X_k}, \tag{18}$$

kus võrdetegurit $\gamma_{ij}^{(k)}$ nimetatakse *elastsusteguriks*. Kui $\gamma_{ij}^{(k)} = 0$, siis sisend $x_{ij}$ on tootmiskiiruse $X_k$ suhtes *ebaelastne*. Avaldame võrdusest (18) sisendi $x_{ij}$ ja tootmiskiiruse $X_k$ diferentside suhte:

$$\frac{\Delta x_{ij}}{\Delta X_k} = \gamma_{ij}^{(k)} \frac{x_{ij}}{X_k}. \tag{18′}$$

Olgu suhe (18′) *marginaalne*, s. o. jäägu võrdus (18′) kehtima ka sel juhul, kui $\Delta X_k \to 0$. Rakendame võrduse (18′) pooltele piirprotsessi $\Delta X_k \to 0$ ja leiame, et

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial X_k} = \gamma_{ij}^{(k)} \frac{x_{ij}}{X_k}. \tag{18″}$$

Peame silmas võrdust (18″) ja moodustame sisendi $x_{ij}$ täisdiferentsiaali

$$dx_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_{ij}}{\partial X_k} dX_k = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ij}^{(k)} \frac{x_{ij}}{X_k} dX_k,$$

mille poolte sisendiga $x_{ij}$ jagamisel ja integreerimisel saame sisendi $x_{ij}$ logaritmi

$$\ln x_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \int \gamma_{ij}^{(k)} \frac{dX_k}{X_k} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ij}^{(k)} \ln X_k + \ln a_{ij}$$

* Täiendavate korrigeerimisteta.

($\ln a_{ij}$ on integreerimiskonstant). Potentseerime ja leiame sisendi $x_{ij}$ ja tootmiskiiruse $X$ funktsionaalse sõltuvuse kujul

$$x_{ij} = a_{ij} \prod_{k=1}^{m} X_k^{\gamma_{ij}^{(k)}}, \tag{17'''}$$

kus $a_{ij}$ on *mastaabitegur*, mis näitab sisendi väärtust sel juhul, kui $X = \overline{E}_m$.

Eeldusega (18″) analoogilisel eeldusel leiame, et tootmise esmastegurite tarbimiskiirus $R_j$ on tootmiskiiruse $X$ funktsioon kujul

$$R_j = r_j \prod_{k=1}^{m} X_k^{\beta_j^{(k)}}, \tag{19}$$

kus $\beta_j^{(k)}$ ja $r_j$ on elastsus- ja mastaabitegurid.

Funktsionaalsed sõltuvused kujul (19) ja (17‴) on tuntud *Cobb-Douglas'e tootmisfunktsioonide* nimetuse all.

Kui sisendid $R_j$ ja $x_{ij}$ on tootmise kiirusvektori iga koordinaadi suhtes ebaelastsed, välja arvatud koordinaat $X_j$, mille korral $\beta_j^{(j)} = \gamma_{ij}^{(j)} = 1$, siis sõltuvused (19) ja (17‴) taanduvad võrdelisteks sõltuvusteks

$$\begin{aligned} R_j &= r_j X_j \\ x_{ij} &= a_{ij} X_j, \end{aligned} \tag{20}$$

kus võrdeteguritel $r_j$ ja $a_{ij}$ on järgmine majandusteaduslik tähendus:

$r_j$ — tootmise esmastegurite otsekulunorm tootmisüksuses $j$;

$a_{ij}$ — tootmisüksuse $i$ toodangu otsekulunorm tootmisüksuses $j$.

Võrdeline sõltuvus on sisendi ja väljundi funktsionaalse sõltuvuse üldtuntud hüpotees, mida praktikas on senini kõige enam rakendatud.

Teistest hüpoteesidest pälvib tähelepanu sisendi ja väljundi lineaarse sõltuvuse hüpotees:

$$\begin{aligned} R_j &= \overline{R}_j + r_j X_j \\ x_{ij} &= \overline{x}_{ij} + a_{ij} X_j, \end{aligned} \tag{21}$$

kus algordinaatidel $\overline{R}_j$ ja $\overline{x}_{ij}$ on järgmine majandusteaduslik tähendus:

$\overline{R}_j$ — tootmise esmastegurite püsivkulu tootmisüksuses $j$,

$\overline{x}_{ij}$ — tootmisüksuse $i$ toodangu püsivkulu tootmisüksuses $j$.

Võrdelise sõltuvuse hüpoteesiga võrreldes on lineaarse sõltuvuse hüpotees täpsem, kuna ta jaotab sisendi 1) tootmiskiirusest sõltumatuks ja 2) tootmiskiirusega võrdeliseks osaks, mis paremini vastab tegelikkusele.

Reaalne tootmisprotsess on laiendatud taastootmine, mis aga eeltoodud hüpoteesides ei kajastu. Tootmise laienemise korral ei sõltu sisend mitte ainult tootmiskiirusest, vaid ka tootmiskiiruse diferentsidest. Sisendi ja väljundi funktsionaalse sõltuvuse hüpoteesidest, mis arvestavad tootmise laienemist, on lihtsaim tootmiskiirusest ja -kiirendusest lineaarse sõltuvuse hüpotees:

$$\begin{aligned} R_j &= \overline{R}_j + r_j X_j + s_j \Delta X_j \\ x_{ij} &= \overline{x}_{ij} + a_{ij} X_j + b_{ij} \Delta X_j, \end{aligned} \tag{22}$$

kus parameetritel $s_j$ ja $b_{ij}$ on järgmine majandusteaduslik tähendus:

$s_j$ — tootmise esmastegurite investeerimisnorm ehk kiirendaja tootmisüksuses $j$;

$b_{ij}$ — tootmisüksuse $i$ toodangu investeerimisnorm ehk kiirendaja tootmisüksuses $j$.

Investeerimisprotsessile on iseloomulik hilinemisaeg, s. o. perioodide arv, mille möödumisel mingil perioodil tehtud investeeringud muutuvad uuteks tootmisfondideks. Kui mingil perioodil tehtud investeeringud muutuvad tootmisfondideks järgmisel perioodil, siis on hilinemisaeg 1. Niisugune olukord leiab aset sel juhul, kui sisendi sõltuvus tootmiskiirusest on antud võrdustega (22). Nagu võime veenduda, on hüpotees (22) üldisema hüpoteesi, nimelt diskreetselt jaotatud hilinemisajaga tootmiskiirendustest lineaarse sõltuvuse hüpoteesi

$$
\begin{aligned}
R_j &= \bar{R}_j + r_j X_j(t) + \sum_{k=0}^{p} s_j^{(k)} \Delta X_j(t+k) \\
x_{ij} &= \bar{x}_{ij} + a_{ij} X_j(t) + \sum_{k=0}^{p} b_{ij}^{(k)} \Delta X_j(t+k)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

erijuhtum. Tõepoolest, kui $p=0$ ja tähistame $s_j^{(0)} = s_j$, $b_{ij}^{(0)} = b_{ij}$, siis saame võrdustest (23) võrdused (22).

Käsitleme omahinna ja tootmise tasakaalumudeleid, lähtudes sisendi ja tootmiskiiruse funktsionaalse sõltuvuse eeltoodud konkreetsetest hüpoteesidest.

**A. Võrdelise sõltuvuse hüpotees.** Lähtume võrdustega (20) defineeritud otsekulunormist $a_{ij}$ ja defineerime tootmise tehnoloogia.

D e f i n i t s i o o n 7. Otsekulunormide maatriksit $(a_{ij})_{m \times m}$ nimetatakse *tootmise tehnoloogiaks* ja tähistatakse tähega $A$:

$$(a_{ij})_{m\times m} = A. \tag{24}$$

Peame silmas definitsioone (14) ja (24) ning kirjutame sõltuvused (20) vektor-maatrikstähistuses:

$$
\begin{aligned}
R &= (\operatorname{diag} X)\, r \\
X_{22} &= A \operatorname{diag} X.
\end{aligned}
\tag{20'}
$$

Asetanud esmastegurite vektori $R$ ja sisekäibemaatriksi $X_{22}$ väärtused võrdustest (20′) omahinna ja tootmise tasakaalumudelitesse (12′) ja (13′), leiame:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{diag} X) r + (\operatorname{diag} X) A' h &= (\operatorname{diag} X) h \\
X - A(\operatorname{diag} X) \bar{E}_m &= Y.
\end{aligned}
$$

Korrutame esimese võrduse pooli vasakult pöördmaatriksiga $(\operatorname{diag} X)^{-1}$ ja peame silmas samasust (14′). Omahinna ja tootmise tasakaalumudelid avalduvad kujul

$$
\begin{aligned}
r + A'h &= h \\
(E - A) X &= Y,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

mis vastab sisendi ja väljundi võrdelise sõltuvuse hüpoteesile. Võrdustest (25) nähtub, et sisendi ja väljundi võrdelise sõltuvuse korral on omahinna parameetriteks tootmise esmastegurite otsekulunormide vektor ja tootmise tehnoloogia. Avaldades mudelitest (25) omahinna ja tootmiskiiruse, leiame:

$$
\begin{aligned}
h &= [(E - A)^{-1}]' r \\
X &= (E - A)^{-1} Y.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Maatriksit $(E - A)^{-1}$ võrdustes (26) nimetatakse *täiskulunormide maatriksiks* ehk *multiplikaatoriks* [6, 7]. Multiplikaator väljendab tootmiskulu lõpptoodangu ühiku kohta. Arendades multiplikaatori astmeritta

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{27}$$

võime kolmandast liikmest alates tõlgendada astmerea liikmeid kui esimest, teist, kolmandat jne. järku kaudse kulu normide maatrikseid. Täiskulunormide maatriks on seega otsekulunormide maatriksi ja tõkestamatult kasvava järguga kaudse kulu normide maatriksite lõpmatu rea summa.

**B. Lineaarse sõltuvuse hüpotees.** Tähistame:

$\overline{R}$ — tootmise esmastegurite püsivkulu kiirusvektor,

$\overline{X}_{22}$ — püsivkulu sisekäibemaatriks

ja kirjutame sõltuvuste (20′) eeskujul sõltuvused (21) vektor-maatrikstähistuses:

$$\begin{aligned} R &= \overline{R} + (\operatorname{diag} X)r \\ X_{22} &= \overline{X}_{22} + A \operatorname{diag} X. \end{aligned} \tag{21′}$$

Asetanud vektori $R$ ja maatriksi $X_{22}$ väärtused võrdustest (21′) omahinna ja tootmise tasakaalumudelitesse (12′) ja (13′), leiame, et

$$\begin{aligned} \overline{R} + (\operatorname{diag} X)r + [(\operatorname{diag} X)A' + \overline{X}'_{22}]h &= (\operatorname{diag} X)h \\ X - \overline{X}_{22}\overline{E}_m - A(\operatorname{diag} X)\overline{E}_m &= Y. \end{aligned} \tag{28}$$

Tähistame:
$$\overline{X}_{22}\overline{E}_m = \overline{X}, \tag{29}$$

kus $\overline{X}$ on püsivkulu kiirusvektor. Korrutame võrduste (28) esimese võrrandi pooli vasakult pöördmaatriksiga $(\operatorname{diag} X)^{-1}$ ja peame silmas võrdust (14′). Omahinna ja tootmise tasakaalumudelid avalduvad kujul

$$\begin{aligned} r + (\operatorname{diag} X)^{-1}\overline{R} + [A + \overline{X}_{22}(\operatorname{diag} X)^{-1}]'h &= h \\ (E - A)X &= \overline{X} + Y. \end{aligned} \tag{30}$$

Jagatist $(\operatorname{diag} X)^{-1}\overline{R}$ nimetatakse tootmise esmastegurite püsivkulunormide vektoriks ja tähistatakse tähega $\overline{r}$. Jagatist $\overline{X}_{22}(\operatorname{diag} X)^{-1}$ nimetatakse sisekäibe püsivkulunormide maatriksiks ja tähistatakse tähega $\overline{A}$. Vektor $\overline{r}$ ja maatriks $\overline{A}$ on ilmselt muutuvad suurused, sõltudes pöördvõrdeliselt tootmise kiirusvektorist $X$:

$$\begin{aligned} \overline{r}(X) &= (\operatorname{diag} X)^{-1}\overline{R} \\ \overline{A}(X) &= \overline{X}_{22}(\operatorname{diag} X)^{-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Kui võrdustes (30) üle minna tähistusele (31), siis võib tootmise ja omahinna tasakaalumudeleid, mis vastavad sisendi lineaarse sõltuvuse hüpoteesile, mõnevõrra muuta:

$$\begin{aligned} r + \overline{r}(X) + [A + \overline{A}(X)]'h &= h \\ (E - A)X &= \overline{X} + Y. \end{aligned} \tag{32}$$

Avaldame võrdustest (32) omahinna ja tootmiskiiruse ning leiame, et

$$\begin{aligned} h &= \{[E - A - \overline{A}(X)]^{-1}\}'[r + \overline{r}(X)] \\ X &= (E - A)^{-1}(\overline{X} + Y). \end{aligned} \tag{33}$$

Võrdustest (33) nähtub, et lineaarse sõltuvuse hüpoteesi korral on omahind tootmiskiiruse mittekasvav funktsioon.

**C. Tootmiskiirusest ja -kiirendusest lineaarse sõltuvuse hüpotees.** Tähistame:

$s$ — tootmise esmastegurite investeerimisnormide vektor,

$B = (b_{ij})_{m \times m}$ — investeerimisnormide maatriks

ja kirjutame sõltuvuste (21′) eeskujul sõltuvused (22) vektor-maatrikstähistuses:

$$\begin{aligned} R &= \overline{R} + (\operatorname{diag} X)r + (\operatorname{diag} \Delta X)s \\ X_{22} &= \overline{X}_{22} + A \operatorname{diag} X + B \operatorname{diag} \Delta X. \end{aligned} \tag{22′}$$

Kuna investeeringud kujutavad avansseeritud vahendeid, mille kulumine toimub amortisatsiooni näol rea perioodide vältel, siis omahinna arvutamisel investeeringuid tootmiskulude hulka ei arvata *. Sõltuvustest (22′) saadud omahinnamudel langeb seega ühte omahinnamudeliga (32). Asetanud maatriksi $X_{22}$ väärtuse võrdustest (22′) mudelisse (13′), leiame sõltuvustele (22′) vastava tootmise tasakaalumudeli erikuju:

$$AX + B\Delta X = X - \overline{X} - Y. \tag{34}$$

Mudelit (34) nimetatakse tootmise determineeritud lineaarseks dünaamiliseks tasakaalumudeliks. Võrduse (34) parem pool sisaldab püsivkulu ja lõpptarbimiskiiruse summa

$$\overline{X} + Y = Y^* \tag{35}$$

ning on seega lahtine. Toome võrdusega

$$X - Y^* = \alpha X \tag{36}$$

mudelisse diagonaalmaatriksi $\alpha$, mida nimetame *hinnapoliitikaks* [8], ja teisendame mudeli (34) kinniseks. Mudel (34) avaldub kujul

$$AX + B\Delta X = \alpha X, \tag{37}$$

mille lahendamisel leiame, et

$$X = [E + B^{-1}(\alpha - A)]^t X(0), \tag{38}$$

kus $X(0)$ on tootmise algkiirus. Kuna tootmiskiirus $X$ on aja funktsioon, siis antud juhul on ka omahind aja funktsioon. Kui püsivkulusid ei arvestata, s. o. kui $\overline{R} = \Theta$ ja $\overline{A} = \Theta$, siis on omahind ajast sõltumatu, avaldudes kujul (26).

Käsitleme lõppeks sisendi lineaarset sõltuvust diskreetselt jaotatud viivitusajaga tootmiskiirendustest. Tähistame:

$s^{(k)}$ — tootmise esmastegurite investeerimisnormide vektor viivitusajaga $k+1$;

$B^{(k)}$ — investeerimisnormide maatriks viivitusajaga $k+1$

ja kirjutame sõltuvused (23) vektor-maatrikstähistuses:

$$\begin{aligned} R &= \overline{R} + (\operatorname{diag} X(t))r + \sum_{k=0}^{p} (\operatorname{diag} \Delta X(t+k))s^{(k)} \\ X_{22} &= \overline{X}_{22} + A \operatorname{diag} X(t) + \sum_{k=0}^{p} B^{(k)} \operatorname{diag} \Delta X(t+k). \end{aligned} \tag{23′}$$

Asetanud maatriksi $X_{22}$ väärtuse võrdustest (23′) võrdusse (13′), saame tootmise tasakaalumudeli kujul

$$AX(t) + \sum_{k=0}^{p} B^{(k)} \Delta X(t+k) = X(t) - \overline{X} - Y(t). \tag{39}$$

Toome võrdusega (36) mudelisse hinnapoliitika ja teisendame mudeli kinniseks. Mudel (39) avaldub kujul

$$AX(t) + \sum_{k=0}^{p} B^{(k)} \Delta X(t+k) = \alpha X(t), \tag{40}$$

mida nimetatakse tootmise tasakaalumudeliks diskreetselt jaotatud viivitusajaga. Asen-

* Investeeringute arvamine tootmiskulude hulka oleks õigustatud ainult siis, kui akumulatsiooni allikas on fondimaks ja investeeringute sisendvoo väärtus omahinnas on seejuures fondimaksuga võrdne. Fondimaksu määra kui tootmissüsteemi-omahinna ühe koordinaadi arvutamist käsitletakse töö järgmistes osades.

dame mudelis (40) tootmiskiirenduse võrdusest $\Delta X(t+k)=X(t+k+1)-X(t+k)$ ja leiame, et

$$AX(t)+\sum_{k=0}^{p} B^{(k)}[X(t+k+1)-X(t+k)]=aX(t).$$

Eeldame, et maatriks $B^{(p)}$ on regulaarne. Avaldame tootmise kiirusvektori $X(t+p+1)$ ning saame valemi tootmiskiiruste rekurrentseks arvutamiseks kujul

$$\begin{aligned} X(t+p+1)=(B^{(p)})^{-1}[(a-A+B^{(0)})X(t)+ \\ +\sum_{k=0}^{p-1}(B^{(k+1)}-B^{(k)})X(t+k+1)]. \end{aligned} \tag{41}$$

Valem (41) nõuab, et oleksid antud tootmise algkiirused $X(0), X(1), \ldots, X(p)$, mille järgi saame arvutada kõigi järgnevate aastate tootmiskiirused $X(t)$.

Tootmise tasakaalumudel (40) on mudeli (37) üldistus. Kui valemis (41) $p=0$, siis avaldub valem (41) kujul

$$X(t+1)=[E+(B^{(0)})^{-1}(a-A)]X(t), \tag{41'}$$

millest saame valemi (38). Kui aga

$$B^{(k)}=\begin{cases} \Theta, & k\neq\tau \\ B^{(\tau)}, & k=\tau, \end{cases}$$

kus maatriks $B^{(\tau)}$ on regulaarne, siis avaldub valem (41) kujul

$$X(t+\tau+1)=(B^{(\tau)})^{-1}(a-A)X(t)+X(t+\tau), \tag{41''}$$

mille rakendamisel eeldame jällegi, et tootmise algkiirused $X(0), X(1), \ldots, X(\tau)$ on antud.

4. Käsitletud kolmest tootmissüsteemi sisendvoo ja tootmiskiiruse sõltuvuse hüpoteesist rakendatakse tootmise staatilisel analüüsimisel sageli võrdelise sõltuvuse hüpoteesi, mille puhul omahind avaldub valemitega (26). Niisugune omahind rahuldab hinnakriteeriumi (16), mille kehtivus sisendi ja tootmiskiiruse sõltuvuse hüpoteesist ei olene.

Lepime kokku, et nimetame valemitega (26) antud omahinna tegelikuks omahinnaks, ja võrdleme sellega mõnda praktikas kasutatud omahinna eeskirja.

a) Omahinna eeskiri, mis võtab tootmissüsteemi sisendist arvesse ainult tootmise esmastegurite otsekulu ja ignoreerib kaudset kulu, avaldub kujul

$$\check{h}=r. \tag{42}$$

Võrdusega (42) antud omahind võib hinnakriteeriumi rahuldada ainult sel juhul, kui tootmissüsteemil ei ole sisekäivet, s. o. kui $A=\Theta$. Võrratusest

$$h=[(E-A)^{-1}]'r>r=\check{h}$$

nähtub, et võrdusega (42) defineeritud omahind on tegelikust omahinnast madalam.

b) Omahinna eeskiri, mis ignoreerib tootmise esmastegurite teist ja kõrgemat järku kaudset kulu, avaldub kujul

$$\check{h}=r+A'r=(E+A')r. \tag{43}$$

Kuna

$$\begin{aligned} \check{h}=(E+A')r<[E+A'+(A')^2+(A')^3+\ldots]r= \\ =[(E-A)^{-1}]'r=h, \end{aligned}$$

siis valemiga (43) antud omahind on tootmise esmastegurite kõrgema järguga kaudse kulu esinemise korral tegelikust omahinnast madalam.

c) Omahinna eeskiri, mis arvestab sisekäivet lõpptoodangu väljundihinnas, avaldub kujul

$$\hat{h} = r + A'\bar{h}. \tag{44}$$

Kui lõpptoodangu väljundihind on tegelikust omahinnast kõrgem, s. o. kui $h < \bar{h}$, siis

$$h = r + A'h < r + A'\bar{h} = \hat{h},$$

mis ütleb, et valemiga (44) antud omahind on tegelikust omahinnast kõrgem.

d) Ettevõtte-omahinna mudel, mis võtab tootmisüksuste sisekäibe arvesse omahinnas, ettevõtte ülejäänud sisekäibe aga tööstushulgihinnas [9], avaldub kujul

$$\tilde{h} = r + D\tilde{h} + \bar{A}'h^*, \tag{45}$$

kus tähtedel $D$, $\bar{A}$ ja $h^*$ on järgmine matemaatiline ja majanduslik tähendus:

$D$ — maatriksi $A$ peadiagonaali elementide diagonaalmaatriks;

$\bar{A}$ — tootmisüsteemi tehnoloogia, millest on eraldatud tootmisüksuste sisekäive ($\bar{A} = A - D$);

$h^*$ — tööstushulgihind.

Lahendame mudeli (45) ning leiame, et

$$\tilde{h} = (E - D)^{-1}(r + \bar{A}'h^*). \tag{46}$$

Sõltuvalt tööstushulgihinna definitsioonist võib valemiga (46) antud omahind olla tegelikust omahinnast kas madalam või kõrgem või osa koordinaatide järgi madalam ja osa koordinaatide järgi kõrgem. Kui tööstushulgihind $h^*$ on juhuslikult niisugune, et kehtib võrdus $\tilde{h} = h^*$, siis tööstushulgihind ongi tegelik omahind, s. o. $h^* = h$.

Valemitega (42), (43), (44) ja (46) antud omahinnad annavad ebatäpse kujutluse tootmise täiskulude kujunemisest ega võimalda õigesti hinnata tootmissüsteemi kasumit. Vaadeldud neljast praktikas kasutatavast omahinna eeskirjast ei rahulda ükski hinnakriteeriumi ega ole omahind majandusteaduslikus mõttes.

## KIRJANDUS

1. Self-Organizing Systems 1962. Ed. by M. Yovits, G. Jacobi, G. Goldstein. Washington.
2. К. Берж, Теория графов и ее применения. М., 1962.
3. E. Bodewig, Matrix Calculus. Amsterdam, 1959.
4. И. Ямада, Теория и применение межотраслевого метода. М., 1963.
5. В. Леонтьев, Исследования структуры американской экономики. М., 1958.
6. J. S. Chipman, The Multi-Sector Multiplier. Econometrica, **18**, No. 4, 1950.
7. R. M. Goodwin, The Multiplier as Matrix. The Economic Journal, **59**, 1949.
8. О. Ланге, Теория воспроизводства и накопления. М., 1963.
9. E. Kull, Planeerimine tööstusettevõtetes. Tallinn, 1962.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia*
*Majanduse Instituut*

Saabus toimetusse
9. X 1965

Э. ЛЕЙНЕМАНН

## РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОДСТВА И СЕБЕСТОИМОСТЬ. I

*Резюме*

В работе даются определения производственной единицы и производственной системы как абстрактных количественных понятий. Экономической единицей $i$ называется неотрицательная квадратичная матрица $\mathfrak{X}_i$ с положительными элементами только в $i$-ном столбце $\mathfrak{x}_{.i}$ или в $i$-ном ряде $\mathfrak{x}_{i.}$. Если $\mathfrak{x}_{.i}=0$ и $\mathfrak{x}_{i.}\neq 0$, то $i$ — первичный фактор производства. Если $\mathfrak{x}_{.i}\neq 0$ и $\mathfrak{x}_{i.}=0$, то $i$ — конечный продукт. Если $\mathfrak{x}_{.i}\neq 0$ и $\mathfrak{x}_{i.}\neq 0$, то $i$ — производственная единица. Входным потоком производственной единицы $i$ называется неотрицательная квадратичная матрица $\mathfrak{X}_i^-$ с единственным отличным от нуля столбцом $\mathfrak{x}_{.i}$. Выходным потоком производственной единицы $i$ называется неотрицательная квадратичная матрица $\mathfrak{X}_i^+$ с единственным отличным от нуля рядом $\mathfrak{x}_{i.}$. Определяются понятия внутреннего оборота и окрестностей производственной единицы, одно- и разноименных векторов, цены входного и выходного потоков производственной единицы, значение вектора при какой-либо цене и т. д. Через эти понятия определяется равновесие производственной единицы. Для уменьшения объема понятия производственной единицы постулируются два ограничения, в соответствии с которыми даны определения себестоимости и прибыли производственной единицы.

Посредством понятия экономической единицы определяются производственная система $\mathfrak{X}$, входной и выходной потоки $\mathfrak{X}^-$ и $\mathfrak{X}^+$, внутренний оборот $\mathfrak{X}^\circ$ и окрестность $\overline{\mathfrak{X}}^\circ$ производственной системы:

$$\mathfrak{X}=\bigcup_{i\in N}\mathfrak{X}_i$$

$$\mathfrak{X}^-=\bigcup_{i\in M}\mathfrak{X}_i^-,\quad \mathfrak{X}^+=\bigcup_{i\in M}\mathfrak{X}_i^+$$

$$\mathfrak{X}^\circ=\mathfrak{X}^-\cap\mathfrak{X}^+$$

$$\overline{\mathfrak{X}}^\circ=(\mathfrak{X}^-\cup\mathfrak{X}^+)\setminus(\mathfrak{X}^-\cap\mathfrak{X}^+),$$

где $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ — множество экономических единиц производственной системы;
$M$ — подмножество производственных единиц множества $N$.

Равновесие производственной системы определяется через равновесие производственных единиц. Из определения себестоимости производственной системы выводятся модели себестоимости и производства в общем виде

$$R+X'_{22}h=(\operatorname{diag}X)h \tag{12'}$$

$$X-X_{22}\overline{E}_m=Y, \tag{13'}$$

где символы $R$, $X$, $h$, $Y$, $X_{22}$ и $\overline{E}_m$ имеют следующие экономико-математические значения:

$R$ — вектор скорости расхода первичных факторов производства (в денежном измерении);
$X$ — вектор скорости производства;
$h$ — себестоимость производственной системы;
$Y$ — вектор скорости конечного производства;
$X_{22}$ — матрица внутреннего оборота производственной системы;
$\overline{E}_m$ — вектор с координатами, равными единице.

Оказывается, что себестоимость (12′) удовлетворяет известному в экономике критерию цен

$$h'Y=R'\overline{E}_m. \tag{16}$$

Модели (12′) и (13′) не предполагают функциональной зависимости между входным потоком и скоростью производства. В третьей части статьи рассматриваются различные гипотезы о функциональной зависимости между входным потоком и скоростью производства (гипотезы о пропорциональной зависимости, о линейной зависимости, о линейной зависимости от скорости и ускорения производства, о линейной зависимости от скорости и ускорения производства с различным временным запаздыванием), в зависимости от которых модели себестоимости и производства (12′) и (13′) прини-

мают различные конкретные виды. При гипотезе о линейной зависимости от скорости и ускорения производства модель (13′) выступает в виде конечно-разностной динамической модели Леонтьева

$$AX + B\Delta X = \alpha X, \tag{37}$$

в которой $\alpha$ — диагональная матрица политики цен. При гипотезе о пропорциональной зависимости между входным потоком и скоростью производства модель себестоимости (12′) примет вид

$$r + A'h = h,$$

откуда

$$h = [(E - A)^{-1}]'r, \tag{26}$$

где $r$ — вектор норм прямых затрат первичных факторов производства.

На основе формул (26) оцениваются некоторые применяемые в практике методы исчисления себестоимости, дающие искаженное представление о делении затрат.

*Институт экономики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
9/X 1965

E. LEINEMANN

## THE PRODUCTION EQUILIBRIUM AND COST PRICE. I

*Summary*

In Sections I and II of this paper the production unit and production system are treated as abstract quantitative concepts. The economic unit $i$ has been defined as the non-negative square matrix $\mathfrak{X}_i$ with positive elements only in $i$-th column $\mathfrak{x}_{\cdot i}$ or row $\mathfrak{x}_{i\cdot}$. If $\mathfrak{x}_{\cdot i} = 0$ and $\mathfrak{x}_{i\cdot} \neq 0$ then $i$ is production primary factor. If $\mathfrak{x}_{\cdot i} \neq 0$ and $\mathfrak{x}_{i\cdot} = 0$ then $i$ is final product. If $\mathfrak{x}_{\cdot i} \neq 0$ and $\mathfrak{x}_{i\cdot} \neq 0$ then $i$ is production unit. Production unit input $\mathfrak{X}_i^-$ is a non-negative square matrix with a single non-zero column $\mathfrak{x}_{\cdot i}$. Production unit output $\mathfrak{X}_i^+$ is a non-negative square matrix with a single non-zero row $\mathfrak{x}_{i\cdot}$. When dealing with the concept of production unit, some new concepts were introduced, such as production unit internal turnover and environment, like and unlike vectors, the price of an unlike vector, production unit input price and output price, etc. Production unit equilibrium has been determined by its input and output. The concepts of production unit cost price and profit have been defined on given restricting assumptions.

The concepts of the open production system $\mathfrak{X}$, production system input $\mathfrak{X}^-$, output $\mathfrak{X}^+$, internal turnover $\mathfrak{X}^0$ and environment $\overline{\mathfrak{X}}^0$ have been constructed by means of the following set-theoretical operations

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in N} \mathfrak{X}_i$$

$$\mathfrak{X}^- = \bigcup_{i \in M} \mathfrak{X}_i^-, \quad \mathfrak{X}^+ = \bigcup_{i \in M} \mathfrak{X}_i^+$$

$$\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{X}^- \cap \mathfrak{X}^+$$

$$\overline{\mathfrak{X}}^0 = (\mathfrak{X}^- \cup \mathfrak{X}^+) \setminus (\mathfrak{X}^- \cap \mathfrak{X}^+)$$

where $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ is the set of economic units and $M$ is the subset of production units of the set $N$.

Production system equilibrium has been defined by the corresponding concept of production unit. Production system cost price has been determined with the application of the same restrictions as in the case of production unit. Proceeding from the definition of production system cost price we obtain cost price and production equilibrium models in a general form

$$R + X'_{22}h = (\operatorname{diag} X)h \tag{12'}$$

$$X - X_{22}\overline{E}_m = Y \tag{13'}$$

where the economic-mathematical meaning of letters $R$, $X$, $h$, $Y$, $X_{22}$, and $\overline{E}_m$ is as follows:

$R$ — input of primary factors,
$X$ — production speed,
$h$ — production system cost price,
$Y$ — final production speed,
$X_{22}$ — internal turnover of the production system,
$\bar{E}_m$ — $m$-dimensional vector of unit coordinates.

Production system cost price given by the model (12′) has been proved to satisfy a fundamental identity of economics

$$h'Y = R'\bar{E}_m \tag{16}$$

called price criterion.

In the cost price and production equilibrium models (12′) and (13′) the functional dependence of input on production speed has been left a matter of discussion. In Section III of the paper various hypotheses of the functional dependence of input on the production speed have been dealt with, e. g. hypothesis of proportional dependence, hypothesis of linear dependence, hypothesis of linear dependence on production speed and acceleration, hypothesis of linear dependence on production speed and production acceleration with distributed lag. According to these hypotheses the cost price and production equilibrium models (12′) and (13′) take a variety of concrete forms. For instance, in the case of the hypothesis of linear dependence on production speed and acceleration the production equilibrium model (13′) has been shown to take the difference form of a Leontief dynamic model

$$AX + B\Delta X = \alpha X \tag{37}$$

where $\alpha$ is a diagonal matrix of price policy. In the case of the hypothesis of proportional dependence cost price model (12′) has been shown to take the form of a static model

$$r + A'h = h$$

whence

$$h = [(E - A)^{-1}]'r \tag{26}$$

where $r$ is input coefficient vector of primary factors.

In the final section of the paper formula (26) has been juxtaposed to some cost price calculation methods frequently employed in the enterprise economics, which give us distorted ideas of the distribution of input. These methods have been subjected to analysis and evaluated in the light of price criterion.

*Academy of Sciences of the Estonian SSR,*
*Institute of Economics*

Received
Oct. 9th, 1965