EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSTE SEERIA. 1965, Nr. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК. 1965, № 2

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1965.2.07

И. КАГАНОВИЧ, М. РЕЙСНЕР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Содержание и математическая постановка задачи

Экономический район, располагающий ресурсами химического сырья и топлив местного значения, должен так организовать сырьевую базу своей перерабатывающей промышленности и энергетики, чтобы использование местного и привозного сырья сочеталось наилучшим образом, т. е. с наибольшим экономическим эффектом. Эта проблема чрезвычайно важна, в частности, для Прибалтийского экономического района. Здесь, в Эстонской ССР, значительны ресурсы горючего сланца и развита промышленность по его энергетическому и химическому использованию. Вопрос о направлениях дальнейшего развития сланцевой промышленности приобрел большую актуальность в последние годы с приходом в западные районы страны нефти и природного газа. Нуждаются также во всесторонней оценке варианты размещения энергоемких химических производств внутри Прибалтийского экономического района в сравнении с вариантом его снабжения извне.

Круг проблем, связанных с перспективным планированием химического производства и энергетики для нужд Прибалтики на базе нефти, природного газа, сланца и отчасти торфа и каменного угля, исследуется в Институте экономики Академии наук Эстонской ССР путем постановки и решения серии экономико-математических задач.

Непосредственная цель работы заключается в том, чтобы найти оптимальный набор технологических способов производства топлива, энергии, химических продуктов на базе топливного и химического сырья каждого вида и определить интенсивность применения каждого технологического способа. При этом должны быть покрыты заданные потребности Прибалтийского экономического района в продукции данной отрасли, а ресурсы рабочей силы, капитальных вложений и дефицитного сырья использованы в заданных пределах. Принимается в расчет потребность района, включая вывоз, в следующих продуктах: топливный сланец, жидкие котельные и моторные топлива, бытовой газ, электроэнергия, теплоэнергия, азотные удобрения, пластмассы (полиолефиновые), полипропиленовое волокно, бензол, электродный кокс, синтетические моющие средства, латекс, дикарбоновые кислоты и некоторые другие химические продукты.

Критерий оптимальности плана — минимум приведенных затрат на добычу, транспорт, переработку сырья, производство и доставку готовой продукции.

При выборе типа модели для этой задачи учитывалось, что большинство технологических вариантов, входящих в рассматриваемую систему, отличается обширной номенклатурой продукции и что зависимость эксплуатационных и капитальных затрат от объема производства не линейна. Промышленный комплекс, служащий объектом исследования, включает три типа производств: топливодобывающие — сланцевые шахты и карьеры,[1] топливоперерабатывающие (химические) и электростанции (КЭС и ТЭЦ). Переработка топлива представлена нефте-, газо- и сланцехимическими производствами.

Наряду с вариантами размещения производств внутри Прибалтийского экономического района предусмотрена возможность поставки аналогичных продуктовых наборов из других районов, богатых химическим сырьем и энергоресурсами.

В случае многостадийности производственного процесса образуется несколько технологических способов — соответственно числу переделов, так что продукция одного технологического способа служит сырьем для другого. Таким образом, данная система, помимо внешних связей, обладает сетью прямых и обратных связей между своими элементами. Дробное (попередельное) представление технологической схемы обладает тем преимуществом перед построением сквозных вариантов (от добычи сырья до конечной продукции), что делает модель более эластичной, расширяя возможности образования различных композиций технологических способов. Кроме того, такой путь сокращает размерность задачи: имея набор вариантов производства первичного сырья, можно ограничиться лишь одним вариантом его дальнейшей переработки (при данной технологии этого процесса). Если пользоваться сквозными вариантами, то для решения вопроса об оптимальной глубине переработки сырья потребовалось бы повторить весь первоначальный набор способов, включая в каждый из них следующую стадию процесса переработки. Например, для выбора наиболее экономичного варианта производства полиэтилена нет необходимости вести расчет вариантов, начиная с добычи первичного сырья и заканчивая выработкой пластмассы. Достаточно иметь набор вариантов получения этилена из разных видов сырья и разными способами и представить отдельный технологический способ полимеризации этилена.

Можно предусмотреть также возможность использовать этилен для производства этилбензола, включив для этого в модель соответствующий технологический способ, который будет в таком случае «конкурировать» с вариантом полимеризации.

Связи между технологическими способами учтены в показателях затрат. В текущие и капитальные затраты по каждому варианту включен лишь расход невоспроизводимых внутри системы факторов — оплата труда, сырья и топлива, кроме сланца, вспомогательных материалов, расходы на транспорт продукции, прямые капитальные затраты и сопряженные — на ввозимое сырье и транспорт. Стоимость сланца, электроэнергии, пара, промежуточных продуктов непосредственно в сумму приведенных затрат по вариантам не включается. Это включение осуществляется в процессе решения задачи через сеть прямых и обратных связей элементов системы. При таком подходе значение целевой функции — сумма приведенных затрат, соответствующая каждому допустимому или оптимальному плану задачи, — будет свободно от повторного счета затрат.

За единицу интенсивности использования технологического варианта принимается типовая производственная мощность промышленного объекта по сырью или целевой продукции. Если типов мощностей несколько, строится соответственное число технологических способов.

Каждый технологический способ может быть охарактеризован совокупностью коэффициентов, которые по своему экономическому содержанию делятся на две группы. Первая группа представляет затраты невоспроизводимых внутри системы факторов при единичной интенсивности применения технологического способа — в натуральном выражении на годовую мощность. Это нефть, природный газ, трудовые затраты, капитальные вложения, вода и т. п. Вторая группа коэффициентов — выпуск продуктов или их расход внутри системы, также в натуральном выражении в расчете на годовую мощность.

[1] Добыча нефти, природного газа, каменного угля и торфа непосредственно не анализируется, поскольку эти ресурсы поступают в систему извне.

Исходя из рассмотренных предпосылок, сформулируем задачу математически.[2] Дано m технологических способов использования разного вида сырья и n ограничений по расходу невоспроизводимых ресурсов и выпуску продукции.

Каждый технологический способ задается вектором

$$\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Его положительные компоненты означают выпуск продукции, а отрицательные — затраты продукции или невоспроизводимых факторов при единичной интенсивности применения способа.

В векторе ограничений

$$\bar{a}_0 = (a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n})$$

положительные компоненты соответствуют заданиям по выпуску конечной продукции (ограничения снизу), отрицательные — располагаемым ресурсам невоспроизводимых факторов (ограничения сверху) и нулевые — промежуточным продуктам.

Коэффициентами целевой функции служат годовые приведенные затраты (p_i) для каждого из технологических способов.

В задаче требуется определить план интенсивности применения технологических способов, вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

минимизирующий линейную целевую функцию

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \tag{1}$$

при условиях

x_i — целые неотрицательные числа:

$$x_i = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant a_{0j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Итак, исследуемая проблема описана в виде задачи целочисленного программирования.[3] Возможные значения переменных x_i в этой задаче невелики, в пределах первого десятка, поскольку интенсивность применения технологического способа измеряется в данной модели числом производственных объектов, а не количеством продукции или сырья.

Условие целочисленности поставлено, чтобы принять в расчет различие в удельных затратах на объектах разной мощности, т. е. нелинейность зависимости удельных затрат от масштабов производства.

Благодаря ограничениям снизу (по потребностям в продукции), задачу (1)—(3) можно решать на минимум целевой функции без риска потерять варианты более дорогие, но рассчитанные на более глубокую переработку сырья, с получением широкой номенклатуры продукции. Ограничения сверху (заданные ресурсы дефицитного сырья) гарантируют от вытеснения худших видов сырья в тех случаях, если ресурсы лучших видов недостаточны.

Задачу предполагается решать с варьированием нормативного срока окупаемости

---

[2] Задача комплексного планирования топливной, энергетической и химической промышленности в Прибалтийском экономическом районе сформулирована в 1963 г. (См. И. Каганович, Экономико-математическая модель для выбора оптимального варианта использования топливно-химического сырья в экономическом районе. Межвузовская научная конференция «Применение математики и электронно-вычислительной техники в экономике», Тезисы докладов, Секция 1, Ленинградский инженерно-экономический институт. Л., 1963).

[3] В ней использованы некоторые принципы модели Л. В. Канторовича. (См. его книгу Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959, стр. 280—282).

капитальных вложений, а также ограничений по сырью и потребности в продукции, чтобы получить ряд гипотез перспективного плана.

Помимо отыскания оптимального плана задачи, имеется в виду провести сравнительный анализ некоторых наборов технологических способов, совокупность которых отражает определенный принцип технической и экономической политики. Например, могут быть сопоставлены результаты химического использования продуктов переработки сланца и удовлетворения топливных потребностей за счет привозных топлив, с одной стороны, и покрытия потребности в аналогичной химической продукции путем переработки дальнепривозного сырья — с другой.

Технологические способы	Ресурсы и продукты																			
	Рабочая сила	Сланец	Каменный уголь	Нефть	Электроэнергия	Сырая сланцевая смола	Сырой сланцевый газ из УТТ *	Автобензин	Прямогонный бензин	Полимерный бензин	Газбензин	Бензол	Мазут	Бытовой газ	Электродный кокс	Шпалопропиточное масло	Этилен	Полиэтилен	Сульфонол	Этилбензол
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1. Добыча сланца	−	+			−															
2. Электростанция на сланце	−	−			+															
3. Электростанция на угле	−		−		+															
4. Электростанция на мазуте	−				+								−							
5. Переработка сланца в камерных печах и генераторах	−	−			−	+					+			+						
6. Переработка сланца в УТТ *	−	−			−	+	+													
7. Переработка газбензина	−				−			+			−	+	+			+				
8. Разделение сланцевого газа из УТТ *	−				−		−							+			+			
9. Перегонка нефти	−			−	−			+	+	+		+	+	+						
10. Пиролиз светлых нефтепродуктов	−				−				−					+			+			
11. Производство сульфонола из сланцевого сырья	−				−	−		+				−				+			+	
12. Производство сульфонола из нефтяного сырья	−				−					−		−							+	
13. Производство электродного кокса из сланцевого сырья	−				−	−							+	+	+	+				
14. Производство электродного кокса из нефтяного сырья	−				−			+					−	+	+					
15. Производство этилбензола	−				−							−					−			+
16. Производство полиэтилена	−				−												−	+		

* УТТ — установка с твердым теплоносителем.

На примере условного набора 16 технологических способов (см. таблицу) покажем механизм внутренних связей в нашей модели (размерность решаемой задачи 120×70).

Связи между технологическими способами, входящими в систему, выражаются в таблице знаками технологических коэффициентов (значения коэффициентов не приведены, пустым клеткам соответствуют нулевые коэффициенты). Присутствие положительных и отрицательных коэффициентов в одной и той же графе связывает варианты производства данного продукта с вариантами его переработки. Так, бензол (табл., графа 12), получаемый при переработке газбензин (вариант 7) и нефти (вариант 9), расходуется для производства сульфонола и этилбензола (варианты 11, 12, 15). Оптимальная реализация той или иной из этих связей зависит от сравнительной экономичности получаемых комбинаций при оптимизации системы в целом. Таков же механизм как прямых, так и обратных косвенных связей в системе. Модель позволяет связать, например, выпуск полиэтилена с добычей сланца.

Интенсивность применения варианта переработки нефти или сланца зависит в определенной мере от косвенного «самопотребления» мазута ввиду обратной связи мазут — электроэнергия — мазут (производство мазута — электростанция на мазуте — потребление электроэнергии для производства мазута).

Представленная модель позволяет вовлечь в единое исследование широкий круг технологических вариантов, не заботясь об их сравнимости с точки зрения ассортимента продукции и не прибегая к предварительному распределению затрат между отдельными продуктами комплекса. Используемый для этого обычно прием отключения попутных продуктов снижает достоверность и объективность технико-экономических обоснований. Распределение затрат, если в нем есть нужда, должно быть не исходной, а заключительной стадией работы; получить его можно на объективной основе, пользуясь оптимальным планом двойственной задачи.

Метод решения

Существующие методы целочисленного программирования основываются на решении ряда задач линейного программирования. Такие расширенные задачи образуются из первоначальной задачи путем замены нелинейных ограничений (требование целочисленности значений неизвестных) линейными.

Метод целых форм, описанный Р. Гомори и У. Бомолем,[4] исходит из нецелочисленного оптимального решения. Используя его коэффициенты, составляют дополнительное ограничение к задаче, и она решается вновь до получения целочисленного решения. Этот метод может дать удовлетворительные результаты лишь при точных вычислениях, всякое округление промежуточных результатов приведет к быстрому росту погрешностей, и метод не сходится.

Метод А. Ланда и А. Дойджа[5] придает целечисленные значения переменным задачи постепенно, что очень удобно для решения таких задач, где требование целочисленности распростаняется не на все неизвестные. Но для решения задачи с n дискретными (целочисленными) неизвестными может потребоваться решить до 2^{n-1} задач линейного программирования и при этом сохранять до получения искомого решения все промежуточные.

Метод Г. Мещерякова[6] использует замкнутость множества целых чисел в отношении операции сложения и умножения. Как и при методе целых форм, целочисленность решения достигается на определенном этапе вычисления сразу по всем неизвестным. Особенность метода состоит в том, что в ходе решения добавляется лишь одно дополнительное ограничение (при различных значениях его свободного члена),

---

[4] R. Gomory, W. Baumol, Integer Programming and Pricing. «Econometrica», Vol. 28, 1960, No. 3. Р. Е. Гомори, У. Дж. Бомоль, Целочисленное программирование и оценки. Численные методы оптимального планирования. Новосибирск, 1962, стр. 65—110.

[5] A. Land, A. Doig, An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. «Econometrica», Vol. 28, 1960, No 3.

[6] См. А. С. Барсов, Линейное программирование в технико-экономических задачах. М., 1964, стр. 259—277.

в связи с чем размерность задачи остается близкой к первоначальной. Метод нечувствителен к малым ошибкам (стабилен). Недостатком его является потребность в трудно алгоритмизируемом анализе линейных комбинаций большого числа векторов-решений для обнаружения среди них комбинаций с целочисленными компонентами.

Математическая модель оптимального использования сырья имеет реальный смысл только при рассмотрении большого количества технологий, отличающихся друг от друга использованием сырья и продукцией. Это вызывает необходимость решения задачи на электронной вычислительной машине. Отсюда следует, что критерием при выборе метода решения должна служить его пригодность для реализации на ЭВМ.

Так как вычисления на ЭВМ проводятся с ограниченной точностью, метод целых форм в данном случае неприемлем. В случае использования метода Ланда-Дойджа возникает опасность недостаточности объема памяти, особенно при большом количестве неизвестных. Наиболее подходящим является метод Мещерякова. Но для его применения необходимо дополнить данный алгоритм методикой анализа частных решений задачи линейного программирования.

Условимся, что в задаче (1)—(3) технологические способы определены так, что для большинства способов потребность в продукции может быть покрыта полностью при интенсивности способа $x_i = 1$ и что максимальное значение интенсивности не превышает десяти. Также условимся, что коэффициенты p_i суть целые.

Преобразуем задачу, введя требуемое количество вспомогательных неизвестных: минимизовать

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot x_{m+j} \tag{1'}$$

при ограничениях

$$x_{m+j} = -a_{0j} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3'}$$

и целочисленных значениях неизвестных.

Решив эту задачу двойственным симплексным методом [7] (например, по описанию Гомори и Бомоля), имеем оптимальную симплексную таблицу, которую можно выразить уравнениями

$$L = L_{\text{опт}} + \sum_{i \in I} b_{i0} x_i \tag{4}$$

и

$$x_j = b_{0j} + \sum_{i \in I} b_{ij} x_i, \qquad j \in J \tag{5}$$

где $L_{\text{опт}}$ — оптимальное значение целевой функции;
b_{0j} — значение неизвестного x_j в оптимальном решении;
b_{ij} — преобразованные элементы симплексной таблицы;
b_{i0} — двойственные оценки не входящих в оптимальный план неизвестных;
I и J — непересекающиеся подмножества множества индексов $\{1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n\}$ (соответственно m- и n-мерное).

---

[7] Симплексный метод предназначен для решения задач, в которых после введения фиктивных переменных и приведения задачи к виду (1′) и (3′) все $-a_{0j}$ неотрицательные. Двойственный симплексный метод дает решение задачи, которое в виде (1′) и (3′) имеет среди величин $-a_{0j}$ отрицательные, но у которого среди p_i нет отрицательных. В оптимальном решении по обоим методам все $-a_{0j}$ и p_i неотрицательные. Если задача удовлетворяет требованиям по неотрицательности $-a_{0j}$ или p_i, то говорится, что она в допустимой форме (соответственно в основной или двойственной).

В оптимальном решении все b_{i0} и b_{0j} неотрицательны, решение получим из (4) и (5), считая $x_i \equiv 0$.

Поскольку по условию коэффициенты p_i — целые, значение L в целочисленном решении также должно быть целым. В то же время оно не может быть меньше $L_{\text{опт}}$. Если ввести определение

$$[L_{\text{опт}}] = \begin{cases} L_{\text{опт}} - (\text{дробная часть } L_{\text{опт}}), \text{ если } L_{\text{опт}} \text{ не целое} \\ L_{\text{опт}} - 1, \text{ если } L_{\text{опт}} \text{ целочисленное}, \end{cases}$$

то должно быть удовлетворено уравнение

$$\sum_{i \in I} b_{i0} x_i = L_{\text{опт}} - [L_{\text{опт}}] + r, \tag{6}$$

где r — некоторое положительное целое число.

Это требование и ставим в качестве дополнительного ограничения к задаче (т. е. к его оптимальной симплексной таблице (4) и (5)) в виде

$$x_{m+n+1} = [L_{\text{опт}}] - r - L_{\text{опт}} + \sum_{i \in I} b_{i0} x_i = b_{0,\, m+n+1} + \sum_{i \in I} b_{i0} x_i. \tag{7}$$

Так как $b_{0,\, m+n+1} = [L_{\text{опт}}] - r - L_{\text{опт}} \leqslant 0$, полученная симплексная таблица неоптимальна и допускает введение в базис некоторых из неизвестных x_i. При каждом значении параметра $r = 1, 2, 3, \ldots$ получим целую область оптимальных решений. Применяя двойственный симплексный метод, мы сможем найти все линейно независимые решения

$$\bar{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{m+n+1,\, j}),$$

где x_{ij} — значение неизвестного x_i в решении j.

Необходимо определить, можно ли найти вектор $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ с целочисленными координатами так, чтобы

$$y_i = \sum_j \lambda_j x_{ij}, \tag{8}$$

причем

$$0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_j \lambda_j = 1.$$

Решить эту задачу непосредственно нелегко. Но явно имеют место неравенства

$$\min_j x_{ij} \leqslant y_i \leqslant \max_j x_{ij}. \tag{9}$$

Поскольку значения неизвестных x_i предполагались малыми, то разница между $\min_j x_{ij}$ и $\max_j x_{ij}$ явно не может быть большой; значит, возможных значений для каждого y_i мало. Предполагаем, что для $i = t$ количество возможных (целочисленных) значений y_t равно k_t. В этом случае можно составить

$$N = \prod_{i=1}^{m} k_i$$

различных векторов с целочисленными координатами, удовлетворяющими условию (9).

Проверяем каждый из этих N векторов. Если какой-нибудь из них удовлетворяет уравнениям

$$[L_{\text{опт}}] + r = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i \tag{10}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant a_{0j},$$

то он является целочисленным решением рассматриваемой задачи (1)—(3).

Лучшее целочисленное решение получается при минимальном значении параметра r. Поэтому целесообразно начинать рассмотрение задачи, дополненной ограничением (7), с меньших значений r; если при данном r целочисленного решения не обнаружено, следует увеличить r на единицу.

Если же при некотором значении r, равном r', у задачи с ограничением (7) решения вообще отсутствуют, то поставленная задача целочисленного решения не имеет.

На основе описанного метода составлена программа для решения линейных задач целочисленного программирования на ЭВМ «Минск-2».

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/X 1964

I. KAGANOVITS, M. REISNER

ÜHEST TÄISARVULISE PLANEERIMISE ÜLESANDEST

Resümee

Käsitletakse erinevate tootmistehnoloogiate kasutamise optimaalse plaani leidmise viisi kütuste, keemiasaaduste ja energia tootmiseks majandusrajoonis seal olemasoleva kohaliku ja sisseveetava tooraine baasil, lähtudes kindlaksmääratud vajadustest ja tooraineressurssidest, ning esitatakse see täisarvulise planeerimise ülesandena.

Ülesande lahendamiseks tuleb leida täisarvuliste mittenegatiivsete koordinaatidega vektor $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, mis annab sihifunktsioonile

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$$

minimaalse väärtuse ning rahuldab tingimusi

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant a_{0j},$$

kus x_i — tehnoloogia i kasutamise intensiivsus (tehnoloogiat i kasutavate tootmisettevõtete arv; $i = 1, 2, \ldots, m$);

p_i — tehnoloogia i taandatud kulud intensiivsuse $x_i = 1$ puhul;

a_{ij} — tehnoloogilised koefitsiendid (produkti j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ toodang tehnoloogia i puhul);

a_{0j} — tootmisülesanne (produktist j valmistatav nõutava toodangu hulk) või sisseveetava tooraine limiit.

Vaadeldakse G. Meštšerjakovi meetodil põhinevat algoritmi parima täisarvulise lahendi leidmiseks. Algoritmis on loobutud ülesande lahendite lineaarsete kombinatsioonide uurimisest. See Meštšerjakovi meetodi etapp on asendatud teatava m-mõõtmelise risttahuka kõigi täisarvuliste punktide hulgast ülesande lubatavate lahendite otsimisega vahetu järelproovimise teel.

Väljatöötatud algoritmi kavatsetakse kasutada kõnesoleva ülesande lahendamisel.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
9. X 1964

I. KAGANOVICH, M. REISNER

AN INTEGER PROGRAMMING PROBLEM

Summary

The authors discuss the problem of finding the optimal programming for the utilization of different technological methods of the production of fuels, chemical products and power in an economic district, on the basis of local and imported raw materials, proceeding from definite needs and raw material resources, and present it in the form of an integer programming problem.

For the solution of the problem, a vector with nonnegative components has to be found $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, which would give the linear function

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$$

the minimum value and would satisfy the requirements

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant a_{0j},$$

where x_i — the intensivity of the utilization of the technology i (the number of productional enterprises utilizing the technology i; $i = 1, 2, \ldots, m$);

p_i — cost of application of technology i in the case of the intensivity $x_i = 1$;

a_{ij} — technological coefficients (production of product j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ in the case of technology i);

a_{0j} — the target of production (the needed amount of output produced from product j), or the limit of the imported raw material.

An algorithm, based on G. Meshcheryakov's method and intended for the best integer solution, is discussed. The algorithm is elaborated without a consideration of the linear combinations of the solutions of the given problem. This stage of the method by Meshcheryakov can be replaced by finding permissible solutions from among all integer points of an m-dimensional rectangle, testing them in a direct way.

The algorithm elaborated is intended for application at the solution of the given problem.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Economics

Received
Oct. 9th, 1964