EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
ÜHISKONNATEADUSTE SEERIA. 1963, Nr. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК. 1963, № 3

https://doi.org/10.3176/hum.soc.sci.1963.3.03

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ

И. КАГАНОВИЧ,
кандидат экономических наук

Линейное программирование дает математическое описание задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов: найти минимум (максимум) линейного функционала

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \tag{1}$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{ll} y_j \geqslant 0, & j=1, 2, \ldots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} h_{ij} y_j = a_i, & i=1, 2, \ldots, m \end{array}\right\} . \tag{2}$$

Полагаем, что

m — число производственных факторов или ресурсов, расходуемых для выработки некоторой продукции;

n — число технологических способов;

h_{ij} — число единиц i-го производственного фактора ($i = 1, 2, \ldots, m$), затрачиваемого на выпуск единицы продукции при использовании j-го технологического способа ($j = 1, 2, \ldots, n$);

a_i — размер ресурсов производственных факторов;

p_j — затраты на единицу продукции при использовании j-го технологического способа;

y_j — интенсивность применения j-го технологического способа (например, число единиц продукции, выработанной по j-му технологическому способу).

Если под технологическим способом иметь в виду отдельное предприятие, то y_j приобретает смысл мощности предприятия. Оптимальный план задачи представляет собой набор значений мощностей y_j, при которых линейный функционал (1) достигает минимума и соблюдены ограничения (2). Решение задачи, таким образом, обеспечивает оптимальное сочетание технологических вариантов или оптимальную загрузку предприятий.

Если по условиям задачи $m < n$, то $n - m$ технологических способов не войдет в оптимальный план, т. е. для них $y_j = 0$. Следовательно, модель линейного программирования представляет определенные возможности для подхода к проблеме концентрации производства. Однако ограничение круга применяемых технологических способов в задачах линейного программирования происходит лишь в силу нерациональности отдельных вариантов сравнительно с другими, вошедшими в план, причем может оказаться, что оптимальный план предписывает использовать многие способы при малой интенсивности каждого.

В задачах линейного программирования эффективность технологического способа предполагается постоянной, независимо от степени его использования (p_j — постоянные величины). Поэтому нет места для альтернативы: бо́льшее количество реализуемых способов с низкой интенсивностью применения или меньшее количество способов, применяемых с большей инстенсивностью. Рассмотрим, например, открытую модель транспортной задачи линейного программирования.

Требуется отыскать план $X=(x_{ij})$, минимизирующий линейный функционал

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} & x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем $\sum\limits_i a_i<\sum\limits_j b_j$,

где m — число пунктов отправления (производства);

n — число пунктов назначения (потребления);

a_i — количество продукта в пункте i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$;

b_j — объем потребности в пункте j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$;

c_{ij} — затраты на перевозку единицы продукта из пункта i в пункт j;

x_{ij} — объем перевозок продукта из пункта i в пункт j.

Число пунктов потребления, входящих в оптимальный план такой задачи, может быть меньше их возможного числа, но насколько эта степень концентрации рациональна с точки зрения экономической эффективности роста мощности отдельных объектов j, открытая модель линейной транспортной задачи непосредственно судить не позволяет: величина затрат c_{ij} не зависит от размеров x_{ij}.

Возможность выбора между бо́льшим числом малых объектов и меньшим числом крупных открывается в том случае, если в модели задачи место постоянных величин затрат p_j займут функции $p_j(y_j)$, зависящие от интенсивности технологических способов.

Распространенной формой зависимости удельных затрат от размеров производства является гиперболическая функция

$$p_j(y_j)=\alpha_j+\frac{\beta_j}{y_j} \tag{5}$$

при $y_j>0$. Если $y_j=0$, то и $p_j(y_j)=0$. (α_j и β_j — константы для каждого j).

Отсюда следует, что суммарные затраты зависят линейно от величины $y_j>0$:

$$p_j(y_j)\,y_j=\alpha_j y_j+\beta_j. \tag{6}$$

Рассмотрим математическую модель, возникающую при использовании такой функции затрат. Поставим задачу минимизировать функционал

$$F=\sum_{j=1}^{n} p_j(y_j)\,y_j=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j(y_j) \tag{7}$$

при условиях

$$y_j\geqslant 0, \qquad j=1,2,\ldots,n \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}y_j=a_i, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{9}$$

$$\beta_j(y_j)=\begin{cases}\beta_j, & \text{если } y_j>0\\ 0, & \text{если } y_j=0\end{cases} \tag{10}$$

(обозначения те же, что на стр. 246).

Ввиду условия (10) целевая функция разрывна, почему эту задачу называют задачей программирования с разрывной функцией цели.[1]

Обозначим через l число технологических способов, вошедших в оптимальный план линейной задачи, не учитывающей величин β_j, и через k — то же в плане задачи с разрывной функцией цели $(1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n)$.

В случае $k = l$ задача линейна, так как при фиксированном наборе способов

$$\sum_j \beta_j = \text{const}.$$

В случае $k < l$ сокращение числа используемых технологических способов в сравнении с результатами решения линейной задачи приводит к изменению значения функционала за счет того, что

$$\sum_j^k \beta_j < \sum_j^l \beta_j, \qquad (11)$$

а

$$\sum_j^k h_{ij} y_j > \sum_j^l h_{ij} y_j.^* \qquad (12)$$

До тех пор, пока выигрыш от концентрации производства будет превосходить убытки, связанные с использованием худших технологических способов взамен выбывших, уменьшение числа занятых способов экономически оправдано. При оптимальном их наборе функционал получает наименьшее значение.

В литературе описаны отдельные задачи с разрывной функцией цели, главным образом типа транспортной (задачи размещения), однако не рассмотрены возможные обобщения и модификации модели, и она не получила достаточно полной экономической интерпретации.

Задачи с разрывной функцией цели позволяют оптимальным образом распределить ограниченные ресурсы между технологическими вариантами при изменяющейся по гиперболе экономичности этих вариантов. В отличие от линейного программирования здесь находит выражение двусторонняя связь технико-экономических показателей вариантов с интенсивностью их использования. Так как фактор концентрации производства, тем самым, принимается в расчет, то становится возможным определить набор технологических способов, оптимальный по численности и составу (с точки зрения заданного критерия).

В этих задачах, например, ставится вопрос о том, какие производственные объекты (оборудование, материалы, предприятия) должны быть использованы в данных хозяйственных целях и какие рационально высвободить за счет большей загрузки вошедших в план. Такой подход особенно плодотворен, если объектом задачи служат варианты нового строительства.

Рассмотрим некоторые экономические задачи в условиях меняющейся эффективности производства. Круг объектов этих задач в основном таков же, как и задач линейного программирования.[2]

---

[1] См. С. Гасс, Линейное программирование. М., 1961, стр. 245.

* Минимум линейного функционала $L = \sum_j h_{ij} y_j$ достигается при использовании l технологических способов (по условию), поэтому при k способах в плане значение функционала возрастает.

[2] Он не включает, однако, задачи производственного планирования Л. В. Канторовича, предназначенной для расчета плана, при котором выпуск комплектов продукции достигает максимума (см. его книгу «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов». М., 1959, стр. 280—282). В задачах ассортиментного планирования нелинейность зависимости затрат от объема производства может быть учтена лишь в функциях, задающих область ограничений переменных.

I. Задача внутриотраслевого планирования

Обозначения:

m — число затрачиваемых факторов производственного процесса, ресурсы которых ограничены (труд, сырье, энергия, оборудование, капитальные затраты и т. п.);

r — число видов продукции;

n — число технологических способов;

h_{ji} — расход i-го производственного фактора при единичной интенсивности применения j-го технологического способа ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$);

h_{js} — объем производства s-го продукта ($s = m + 1,\ m + 2,\ \ldots,\ m + r$) при тех же условиях;

a_i — ресурсы затрачиваемых производственных факторов;

a_s — минимальный объем выработки s-го продукта;

b_j — максимальная интенсивность применения j-го технологического способа;

y_j — интенсивность применения j-го способа в плане задачи;

$p_j(y_j)$ — удельные затраты при использовании j-го технологического способа, связанные с величиной интенсивности $y_j > 0$ зависимостью

$$p_j(y_j) = a_j + \frac{\beta_j}{y_i}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти план

$$Y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

минимизирующий функционал

$$F = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(y_j) \tag{13}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned}
& b_j \geqslant y_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,n \\
& \sum_{j=1}^{n} h_{ji} y_j \leqslant a_i, \quad i=1,2,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} h_{js} y_j \geqslant a_s, \quad s=m+1, m+2, \ldots, m+r \\
& \beta_j(y_j) = \begin{cases} \bar\beta_j, & \text{если } y_j > 0 \\ 0, & \text{если } y_j = 0 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Представим условия и ограничения задачи I в виде таблицы, в которую вписаны компоненты соответствующих векторов (табл. 1).[3]

Оптимальный план задачи содержит такие технологические варианты, в таком количестве и с такой интенсивностью применения, что обеспечивается наилучшее использование ресурсов при оптимальной концентрации производства.

---

[3] В задаче могут быть учтены дополнительные ограничения: нижний предел интенсивности некоторых технологических способов, максимальное производство отдельных видов продукции, минимальный расход некоторых факторов.

Таблица 1

План интенсивностей	Затраты (вектор-функция y_j)	Расход ресурсов	Выпуск продукции		
		при единичной интенсивности технологических способов			Максимальная интенсивность технологических способов
y_1	$p_1(y_1)$	$h_{11}\ h_{12} \dots h_{1i} \dots h_{1m}$	$h_{1,\,m+1}\ \ h_{1,\,m+2} \ \cdots\ h_{1s} \ \cdots\ h_{1,\,m+r}$	b_1	
y_2	$p_2(y_2)$	$h_{21}\ h_{22} \dots h_{2i} \dots h_{2m}$	$h_{2,\,m+1}\ \ h_{2,\,m+2} \ \cdots\ h_{2s} \ \cdots\ h_{2,\,m+r}$	b_2	
.	.	. . . . . .	. . . .		
.	.	. . . . . .	. . . .		
y_j	$p_j(y_j)$	$h_{j1}\ h_{j2} \dots h_{ji} \dots h_{jm}$	$h_{j,\,m+1}\ \ h_{j,\,m+2} \ \cdots\ h_{js} \ \cdots\ h_{j,\,m+r}$	b_j	
.	.	. . . . . .	. . . .		
.	.	. . . . . .	. . . .		
y_n	$p_n(y_n)$	$h_{n1}\ h_{n2} \dots h_{ni} \dots h_{nm}$	$h_{n,\,m+1}\ \ h_{n,\,m+2} \ \cdots\ h_{ns} \ \cdots\ h_{n,\,m+r}$	b_n	
		$a_1\ \ a_2\ \ a_i\ \ a_m$	$a_{m+1}\ \ a_{m+2}\ \ a_s\ \ a_{m+r}$		
		Объем ресурсов	Потребность в продукции		

II. Задача концентрации производства

Частный случай задачи I при $r = 1$ (рассмотрен выше, на стр. 247). Она возникает также, если требуется минимизировать функционал (13) при следующих ограничениях переменных:

$$\left.\begin{array}{l} b_j \geqslant y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum\limits_j h_{ji} y_j \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \beta_j(y_j) = \begin{cases} \beta_j, & \text{если } y_j > 0 \\ 0, & \text{если } y_j = 0 \end{cases} \\ \sum\limits_j y_j = A, \end{array}\right\} \qquad (15)$$

где A — общее количество продукции, которое должно быть выработано за период по всем технологическим вариантам.

III. Задача специализации производства

Вариант задачи I; $m = 0$ и по некоторым продуктам не задана потребность: некоторые $a_s = 0$.

Обозначения:

- r — число видов продукции;
- n — число технологических способов их производства (например число станков);
- h_{js} — затраты времени на производство единицы s-го продукта по j-му технологическому способу ($s = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, n$);
- b_j — ресурсы времени работы по j-му технологическому способу;
- a_s — минимальный объем выработки s-го продукта ($a_s \geqslant 0$);
- y_s — выпуск s-го вида продукции;
- z_s — цена единицы s-го вида продукции;
- $p_s(y_s)$ — затраты на единицу s-го продукта — гиперболическая функция объема производства.

Ограничения переменных:

$$\left.\begin{array}{ll} y_s \geqslant a_s, & s=1, 2, \ldots, r \\ \sum\limits_s h_{js} y_s \leqslant b_j, & j=1, 2, \ldots, n \\ \beta_s(y_s) = \begin{cases} \beta_s, & \text{если } y_s > 0 \\ 0, & \text{если } y_s = 0 \end{cases} & \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Цель задачи — определить план выпуска продукции $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$, который обеспечивает наибольшую рентабельность производства, т. е. сообщает максимум функционалу

$$F = \sum_s [z_s - p_s(y_s)] y_s = \sum_s \left[z_s - a_s - \frac{\beta_s(y_s)}{y_s} \right] y_s. \qquad (17)$$

Пусть

$$z_s - a_s = a'_s,$$

тогда

$$F = \sum_s a_s' y_s - \sum_s \beta_s(y_s). \qquad (18)$$

В сравнении с результатами решения линейной задачи сужение номенклатуры продукции (за счет тех видов, для которых $a_s = 0$) уменьшает сумму вычитаемых β_s в функционале (18), но снижает значение и той части функционала, которая линейно зависит от переменных, т. е.

$$\sum_s a_s' y_s.$$

Эти результаты специализации, таким образом, действуют на величину функционала в противоположных направлениях.

Оптимальный план укажет, сколь узок должен быть ассортимент продукции, на выпуске каких продуктов целесообразно специализировать производство и в каком количестве их выпускать, чтобы сумма прибыли была наибольшей при данных ограничениях и при данной зависимости затрат от выпуска.

Задача III может быть интерпретирована и как задача специализации сельскохозяйственного производства, если под технологическими способами понимать сельскохозяйственные угодья с площадями b_j, которые могут быть использованы для производства различных видов сельскохозяйственных продуктов в количестве h_{js} на гектар с доходностью, зависящей от масштабов производства.

Решение такой задачи позволило бы определить рациональную специализацию сельского хозяйства в данном районе с точки зрения максимальной рентабельности.

IV. Задача на составление смесей

В терминах задачи о кормовом рационе (частный случай задачи I при $n = 1$).

Обозначения:

m — число видов кормов, производимых в хозяйстве;

r — число требуемых питательных веществ;

h_{is} — содержание s-го питательного вещества в i-ом корме ($i = 1, 2, \ldots, m$; $s = m+1, m+2, \ldots, m+r$);

a_s — минимальная потребность, в s-ом питательном веществе за период;

a_i — максимальный объем потребления i-го корма;

y_i — количество i-го корма, входящее в рацион и определяющее размер производства этого корма;

$p_i(y_i)$ — затраты на единицу i-го корма — гиперболическая функция размеров его производства.

Требуется установить такие номенклатуру и объем производства кормов для удовлетворения потребностей данного хозяйства, чтобы себестоимость кормового рациона была наименьшей при соблюдении требований к содержанию в нем полезных веществ.

Следовательно, определяется план

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

минимизирующий функционал

$$F = \sum_i p_i(y_i) y_i = \sum_i a_i y_i + \sum_i \beta_i(y_i) \tag{19}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} & a_i \geqslant y_i \geqslant 0, && i=1,2,\ldots,m \\ & \sum_i h_{is} y_i \geqslant a_s, && s=m+1, m+2, \ldots, m+r \\ & \beta_i(y_i) = \begin{cases} \beta_i, & \text{если } y_i > 0 \\ 0, & \text{если } y_i = 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

В табл. 2 выписаны компоненты векторов условий, вектора ограничений и вектора-плана данной задачи

Таблица 2

План производства кормов	Затраты (вектор-функция y_i)	Содержание питательных веществ в единице корма	Максимальное потребление корма
y_1	$p_1(y_1)$	$h_{1,m+1}$ $h_{1,m+2}$ $\cdots$ h_{1s} $\cdots$ $h_{1,m+r}$	a_1
y_2	$p_2(y_2)$	$h_{2,m+1}$ $h_{2,m+2}$ $\cdots$ h_{2s} $\cdots$ $h_{2,m+r}$	a_2
.	.	. . . .	.
.	.	. . . .	.
y_i	$p_i(y_i)$	$h_{i,m+1}$ $h_{i,m+2}$ $\cdots$ h_{is} $\cdots$ $h_{i,m+r}$	a_i
.	.	. . . .	.
.	.	. . . .	.
y_m	$p_m(y_m)$	$h_{m,m+1}$ $h_{m,m+2}$ $\cdots$ h_{ms} $\cdots$ $h_{m,m+r}$	a_m
		a_{m+1} a_{m+2} $\cdots$ a_s $\cdots$ a_{m+r}	
		Потребность в питательных веществах	

Следующие две задачи решают проблему выбора между вариантами с высокими затратами на производство продукции, но с низкими в сфере транспорта и потребления и вариантами с дешевым производством, но более дорогостоящим потреблением, включая доставку (задачи типа транспортной).

V. Задача размещения производства [4]

Обозначения:

m — число пунктов потребления продукции;

n — число существующих или возможных пунктов производства;

c_{ij} — затраты на транспорт единицы продукции из пункта j в пункт i

[4] Рассматривается производство однородной продукции. Вариант задачи V дан в статье И. Кагановича «Применение математического программирования для оптимального выбора мощности и пунктов размещения маслодельных заводов (на примере о-ва Сааремаа)». Известия АН Эстонской ССР. Серия общественных наук, 1962, № 3.

($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$);

a_i — объем потребления продукции в i-ом пункте;

b_j — предельная мощность предприятия в j-ом пункте;

x_{ij} — объем перевозок продукции из j-го пункта производства в i-ый пункт потребления;

y_j — объем выпуска продукции в пункте j (мощность предприятия);

$p_j(y_j)$ — затраты на производство единицы продукции в j-ом пункте — гиперболическая функция мощности.

Ограничения переменных:

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m; \ j=1, 2, \ldots, n \\ b_j \geqslant y_j \geqslant 0 \\ \sum\limits_j x_{ij} \geqslant a_i \\ \sum\limits_j x_{ij} = y_j \\ \beta_j(y_j) = \begin{cases} \beta_j, & \text{если } y_j > 0 \\ 0, & \text{если } y_j = 0. \end{cases} \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Задача заключается в том, чтобы установить, в каких пунктах (предприятиях) и в каком масштабе следует сосредоточить выпуск продукции, чтобы суммарные затраты на ее производство и доставку потребителям были бы минимальны при заданных ограничениях (21). Следовательно, должен быть определен план $X = (x_{ij})$, минимизирующий функционал

$$F = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_j a_j y_j + \sum_j \beta_j(y_j) = \sum_{i,j} (c_{ij} + a_j)\, x_{ij} + \sum_j \beta_j(y_j). \qquad (22)$$

Вводя обозначение $c_{ij} + a_j = c'_{ij}$, получим

$$F = \sum_j c'_{ij}x_{ij} + \sum_j \beta_j(y_j)\ *. \qquad (23)$$

С увеличением мощности предприятий и сокращением их числа затраты на производство продукции сократятся за счет того, что при $y_j = 0$ соответственно и $\beta_j = 0$; однако растет дальность транспортировки груза из оставшихся пунктов j в пункты i. Эти противоположно направленные изменения взаимно компенсируются в точке минимума функционала (23), которой соответствует оптимальный вариант мощности и размещения предприятий.

VI. Задача унификации номенклатуры изделий

Определение оптимального ассортимента выпуска взаимозаменяемой продукции — разновидность задачи IV [5]

Обозначения:

m — число видов продукции (деталей, машин);

r — число объектов потребления этой продукции;

h_{is} — показатель применимости i-го продукта s-го потребителя ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = m+1, m+2, \ldots, m+r$); в случае пригодности $h_{is} = 1$, в противном случае $h_{is} = 0$;

a_s — количество деталей (машин), потребное на s-ом объекте;

a_i — допустимый расход i-ой детали;

x_{is} — количество деталей вида i, потребляемое s-ым объектом;

y_i — объем потребности в i-ых деталях, определяющий размер их производства;

$p_i(y_i)$ — затраты на одну деталь i-го вида — гиперболическая функция масштабов производства этой детали.

---

* К подобной формулировке задачи размещения приходит и В. П. Черенин, считая $c'_{ij} = c_{ij}$ и рассматривая β_j как постоянные затраты (капиталовложения), не пропорциональные объему производства. См. В. П. Черенин, Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании. Новосибирск, 1962.

[5] Предложена Ю. Эннусте (в иной постановке).

Ограничения переменных:

$$\left.\begin{aligned} & x_{is} \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m \\ & \qquad\qquad s=m+1, m+2, \ldots, m+r \\ & a_i \geqslant y_i \geqslant 0 \\ & \sum_i h_{is}x_{is} = a_s \\ & \sum_s h_{is}x_{is} = y_i \\ & \beta_i(y_i) = \begin{cases} \beta_i, & \text{если } y_i > 0 \\ 0, & \text{если } y_i = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Дано также, что

$$h_{is} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Требуется определить план $X = (x_{is})$, минимизирующий затраты на детали, т. е. функционал

$$F = \sum_{i, s} a_i h_{is} x_{is} + \sum_i \beta_i(y_i) = \sum_i a_i y_i + \sum_i \beta_i(y_i). \tag{25}$$

Чем шире номенклатура деталей, тем дифференцированней, а потому и экономичней их потребление (например, заготовки по своим размерам больше соответствуют изделиям из них, мощность оборудования — потребности в ней). Вместе с тем, однако, велики постоянные затраты на производство вследствие большого числа слагаемых β_i. Сужение номенклатуры и концентрация производства уменьшает сумму постоянных расходов, но увеличивает переменные расходы (сумму $a_i y_i$), так как потребности в продукции удовлетворяются путем замены меньших заготовок большими, менее мощного оборудования — более мощным. При оптимальной номенклатуре сумма затрат достигнет минимума.

Постановка задач с разрывной функцией цели существенно упрощается при условии постоянства или небольшой колеблемости величины β.

В этих случаях функционал задачи I, например, принимает вид

$$F = \sum_j a_j y_j + \beta k, \tag{26}$$

где k — число технологических способов, для которых $y_j > 0$.

Такой вид функционала обеспечивает монотонность изменения его величины, если число технологических способов в плане последовательно сокращается. Это большое преимущество с точки зрения выработки метода решения задачи.

Все сформулированные выше задачи представляют собой варианты экономико-математической модели концентрации производства.

В задачах I, II и V концентрация производства достигается за счет сокращения числа технологических способов (n) и роста интенсивности использования остающихся.

При этом в задаче I фиксируется число выпускаемых продуктов (r) и объем их производства (нижняя граница), в задаче II — число расходуемых ресурсов (m) и общее количество вырабатываемой продукции, в задаче V — число потребителей (m) и нижний предел потребностей.

В задаче III источником концентрации выпуска продукции служит сокращение ее номенклатуры (r) при данном наборе технологических способов (n) и границе интенсивности использования каждого.

В задачах IV и VI концентрируется производство ресурсов и сужается их ассортимент (m) при данном числе потребителей или продуктов (r) и объеме потребности.

Таким образом, рассмотренные задачи охватывают большой круг экономических явлений, связанных с процессами концентрации производства и обладают рядом общих черт в математической постановке. Это позволяет трактовать их в целом как особую область математического программирования, которую можно было бы именовать гиперболическим программированием, поскольку ее порождает гиперболическая форма зависимости удельных затрат от размеров производства. Известную общность с гиперболической зависимостью имеет и целевая функция этих задач, что можно проиллюстрировать на примере задачи II, в которой требуется минимизировать функционал (7)

$$F = \sum_j p_j(y_j) y_j = \sum_j \alpha_j y_j + \sum_j \beta_j(y_j).$$

В этой задаче зафиксирован общий объем производства

$$\sum_j y_j = A.$$

Имея в виду, что

$$A = \bar{y}k, \tag{27}$$

где $\bar{y}$ — средняя мощность объекта, преобразуем выражение функционала (7)

$$F = \sum_j p_j(y_j) y_j = A\left(\frac{\sum_j \alpha_j y_j}{A} + \frac{\sum_j \beta_j(y_j)}{\bar{y}k}\right) = A\left(\bar{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{y}}\right). \tag{28}$$

Следовательно, функционал (7) равносилен

$$\bar{p}(\bar{y}) = \bar{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{y}}. \tag{29}$$

Выражение (29) связывает среднюю величину удельных затрат $\bar{p}$ со средними значениями мощности $\bar{y}$ и параметров $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ в соответствующем наборе k технологических способов, которые вошли в план. Задачи гиперболического программирования существенно отличны от задач линейного и выпуклого программирования ввиду разрывности целевой функции и возможности существования локальных экстремумов. Задача с разрывной функцией цели является комбинаторной,[6] она сводится к множеству задач линейного программирования, так как фиксирование набора k технологических способов делает сумму β_j постоянной величиной, а функционал — линейным. Сводимость к задачам линейного программирования с конечным числом ограничений — следствие гиперболической зависимости удельных затрат от интенсивности технологического способа.

Покажем, что в случае другой формы нелинейной связи функционал остается нелинейным и при фиксированном наборе способов.

Общей формой уравнения связи затрат на единицу продукции и масштабов производства можно считать выражение

$$p_j(y_j) = \alpha_j + \frac{\beta_j}{\sqrt[u]{y_j}}, \tag{30}$$

а для суммы затрат на выпуск продукции:[*]

$$p_j(y_j) y_j = \alpha_j y_j + \beta_j y_j^{\frac{u-1}{u}}, \tag{31}$$

где $u \geqslant 1$.

Чтобы определить оптимальные мощности предприятий, нужно найти план, минимизирующий функционал

[6] См. В. П. Черенин, Решение некоторых комбинаторных задач ...

[*] См. Г. Кузнецов, О характере зависимости себестоимости продукции от масштабов производства. «Вестник статистики», 1962, № 10.

$$F = \sum_j a_j y_j + \sum_j \beta_j y_j^{\frac{u-1}{u}} \tag{32}$$

при соответствующих ограничениях переменных.

Функционал (32) остается нелинейным и при стационарном комплексе предприятий.

Рассмотренный ранее функционал

$$F = \sum_j a_j y_j + \sum_j \beta_j (y_j)$$

представляет собой частный случай функционала (32) при $u = 1$.

Метод решения задач гиперболического программирования как задач комбинаторных может состоять в том, чтобы сравнивать значения линейного функционала

$$L = \sum_j a_j y_j \tag{33}$$

для всевозможных наборов $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ технологических способов из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ способов $(1 \leqslant k \leqslant n)$, решив для этого 2^n задач линейного программирования. Разумеется, число рассматриваемых сочетаний практически значительно меньше, так как многие из них отбрасываются как нереальные. Кроме того, в случаях, когда заданы ограничения мощности предприятий, может быть заранее указано их число в оптимальном плане, либо весьма узкие границы, в которых оно заключено. Но и с этими условиями, при сколько-нибудь значительных размерах задачи, число вариантов, которые требовалось бы расчитать, остается практически необозримым даже с учетом возможностей современной вычислительной техники. Поэтому метод перебора сочетаний технологических способов пригоден лишь для решения задач с небольшим числом способов.

Для направленного поиска оптимального плана задач рассмотренного типа и сокращения числа перебираемых при этом вариантов предложен метод последовательных расчетов,[8] с помощью которого в Вычислительном центре АН СССР решен ряд задач по составлению плана формирования поездов ($n = 30$), а также задача о размещении угольных складов на шахтах Донбаса ($n = 16$) без учета производственных мощностей. При реализации этого метода на ЭВМ он, очевидно, открывает весьма широкие возможности для решения разнообразных задач гиперболического программирования, позволяя сократить число просчитываемых вариантов до $n^2 \sim n^3$ (из общего их количества 2^n). Однако задачи больших размеров со многими десятками технологических способов вряд ли представляют подходящий объект для непосредственного применения метода последовательных расчетов, так как и в этом случае объем вычислительных работ все еще оказывается чрезмерно большим. Поэтому разрабатываются приближенные методы решения комбинаторных задач математического программирования для сокращения числа рассматриваемых вариантов.[9]

В Институте экономики АН Эстонской ССР в связи с постановкой задачи размещения молокоперерабатывающих заводов в Эстонии (число возможных пунктов размещения $n = 126$) была разработана т. н. система отсева — приближенный метод решения задач с разрывной функцией цели для случая равенства величины β во всех n технологических способах.[10] Метод обеспечивает монотонность изменения значений функционала от итерации к итерации и сокращение числа решаемых линейных

---

[8] См. В. П. Черенин, Решение некоторых комбинаторных задач...

[9] См. Паршиков, Приближенное решение комбинаторной задачи размещения комплекса устройств. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании. Новосибирск, 1962; И. В. Гирсанов, Б. Т. Поляк, Математические методы решения задачи о размещении. В сб. «Тезисы докладов на конференции по проблемам оптимального планирования и управления производством». М., 1962.

[10] См. И. Каганович, Применение математического программирования для оптимального выбора мощности и пунктов размещения маслодельных заводов...

задач до $2n \sim 3n$. Он предполагает последовательный просмотр оптимальных планов линейных задач при $k=l$, $k=l-1$, $k=l-2$ и т. д. технологических способах $(1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n)$. При каждом значении k функционал линейной задачи подсчитывается лишь для двух-трех сочетаний k способов из l.

Такие пробы обнаруживают один худший, на данной итерации, способ, который и отбрасывается (в определенных случаях для отыскания отсеиваемого способа нет необходимости и в этих нескольких пробах). Отбор способов для проверки на отсев происходит на основании плана предыдущей итерации.

Процесс отсева продолжается в этом порядке до тех пор, пока не будет обнаружен минимум функционала или пока ограничения интенсивности способов не сделают дальнейшее сокращение их числа невозможным. Реализация метода на ЭВМ позволяет контролировать отдаленные последствия каждого акта отсева и вносить, в необходимых случаях, коррективы в план.

Система отсева была применена в задаче о размещении молокоперерабатывающих заводов на о-ве Сааремаа, а затем и на материковой части Эстонии. Эти задачи решены в Институте экономики и Институте кибернетики АН Эстонской ССР.

Помимо задач размещения в Институте экономики решается задача оптимального планирования топливно-химической промышленности (задача I типа). Систему отсева в определенной модификации предполагается применить и к этой задаче.

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22. IV 1963

MÕNINGAD KATKEVA SIHIFUNKTSIOONIGA MATEMAATILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANDED

I. Kaganovitš,
majandusteaduste kandidaat

Resümee

Katkeva sihifunktsiooniga matemaatilise programmeerimise ülesanded võimaldavad piiratud ressursse jaotada tehnoloogiliste variantide vahel optimaalselt, kui nende variantide majanduslik efektiivsus muutub hüperbooli mööda. Seda ülesannet võib käsitada kui tootmise kontsentreerimise majandusmatemaatilist mudelit.

Artiklis esitatakse katkeva sihifunktsiooniga programmeerimise ülesande vormis harusisese planeerimise ülesanne (I), mis seisneb selles, et leida plaan

$$Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

mille puhul funktsionaal on minimaalne,

$$F=\sum_{j=1}^{n} p_j(y_j) y_j=\sum_{j=1}^{n} a_j y_j+\sum_{j=1}^{n} \beta_j(y_j)$$

tingimustel, et

$$b_j \geqslant y_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ji} y_j \leqslant a_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{js} y_j \geqslant a_s, \qquad s=m+1, m+2, \ldots, m+r$$

$$\beta_j(y_j)=\begin{cases} \beta_j, & \text{kui } y_j>0 \\ 0, & \text{kui } y_j=0, \end{cases}$$

kus: m — kasutatavate tootmisfaktorite arv (töö, tooraine, energia, seadmed, kapitaalmahutused jne);
r — toodanguliikide arv;
n — toodangu valmistamise tehnoloogiliste variantide arv;
h_{ji} — tootmisfaktori i kulu, kui kasutada tehnoloogilise viisi j ühikulist intensiivsust ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$);
h_{js} — produkti s tootmise maht ($s = m+1, m+2, \ldots, m+r$) samade tingimuste juures;
a_i — kasutatavate tootmisfaktorite ressursid;
a_s — produkti s minimaalne tootmismaht;
b_j — tehnoloogilise viisi j kasutamise maksimaalne intensiivsus;
y_j — viisi j kasutamise intensiivsus ülesande seisukohalt;
$p_j(y_j)$ — tehnoloogilise viisi j erikulu, mis on seotud intensiivsuse $y_j > 0$ suuruse sõltuvusega:

$$p_j(y_j) = \alpha_j + \frac{\beta_j}{y_j}.$$

Artiklis käsitletakse ka selle ülesande mitut modifikatsiooni.

II — tootmise kontsentreerimise ülesanne (ülesande erijuhus, kui $r = 1$);
III — tootmise spetsialiseerimise ülesanne (erijuhus, kui $m = 0$ ja $a_s = 0$ mõningate s-ide puhul);
IV — segude valmistamise ülesanne (erijuhus, kui $n = 1$);
V — tootmise paigutamise ülesanne;
VI — toodete nomenklatuuri unifitseerimine (IV ülesande teisend).

Artiklis viidatakse katkeva sihifunktsiooniga ülesannete lahendamise meetoditele, eriti autori poolt Eesti NSV Teaduste Akadeemia Majanduse Instituudis väljatöötatud ligikaudsele «hajuvsüsteemi» meetodile, mida kasutati vabariigi piimatööstuse optimaalse kontsentreerimise ja paigutamise ülesande lahendamisel.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Majanduse Instituut

Saabus toimetusse
22. IV 1963

SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING WITH A DISCONTINUED OBJECTIVE FUNCTION

I. Kaganovich

Summary

Problems of mathematical programming with discontinued objective function enable us to effect an optimum distribution of limited resources among technological variants of the economic efficiency if these variants change along a hyperbole. The solution of the problem can be applied as an economico-mathematical model of the concentration of production.

The author presents a problem of inter-branch planning (1) in the shape of a programming problem with a discontinued objective function of which aims at finding the plan

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

which minimizes the functional

$$F = \sum_{j=1}^{n} p_j(y_j) y_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(y_j)$$

under the conditions that

$$b_j \geqslant y_j \geqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ji}\, y_j \leqslant a_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{js}\, y_j \geqslant a_s, \qquad s=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+r$$

$$f_j(y_j) = \begin{cases} \beta_j, \text{ if } y_j > 0 \\ 0, \text{ if } y_j = 0, \end{cases}$$

where:

m — number of cost factors in the process of production (man power, raw material, electric power, equipment, capital expenses, etc.);

r — number of kinds of production;

n — number of technological variants of producing the output;

h_{ji} — cost of the i production factor when the intensity per unit of technological method j is applied ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j = 1,\ 2\ \ldots,\ n$);

h_{js} — production capacity ($s = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+r$) of the product s under the same conditions;

a_i — resources of production factors applied;

a_s — minimum production capacity of the product s;

b_j — maximum intensity of the technological method j;

y_j — intensity of the application of the method j from the viewpoint of the problem;

$p_j(y_j)$ — costs of the technological method j in the case of additional intensity per unit, connected with the value and dependence of the intensity $y_j > 0$

$$p_j(y_j) = a_j + \frac{\beta_j}{y_j}.$$

The author also presents several modifications of the above problem.

II — the problem of the concentration of the production (a special case of the problem when $r = 1$);

III — the problem of the specialization of the production (a special case, when $m = 0$, and $a_s = 0$ in the case of some s);

IV — the problem of making mixtures (a special case when $n = 1$);

V — the problem of the location of production;

VI — unification of the nomenclature of the output (a variant of Problem IV).

The author refers to the methods of solving problems with a discontinued objective function, and in particular to the approximate "fall-out system" — a method elaborated by the author at the Institute of Economics of the Academy of Sciences of the Estonian S.S.R., which was applied for an optimum concentration and location of the milk industry in Soviet Estonia.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Economics

Received
April 22nd, 1963