EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 4

А. ХУМАЛ

МЕТОД РАСЧЕТА ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

При решении математических задач технического содержания нередко возникает вопрос, как найти наиболее достоверные значения выражений, содержащих эмпирически заданную функцию вместе с ее производными некоторых порядков. Ввиду того, что эмпирические данные определяют функцию лишь с ограниченной точностью и часто весьма искаженно представляют изменение функции, этот вопрос может казаться просто неопределенным. Если данные сперва сглаживаются на основе каких-либо предположений о структуре функции, предусмотренные выбранной структурой константы подгоняются к данным, а затем производные и содержащие их выражения вычисляются по полученным константам, то подчас не остается никакой уверенности в том, что результаты будут соответствовать действительности, а не только субъективному произволу вычислителя.

Ниже предлагается иной ход работы: по структуре выражения, подлежащего расчету, определяется особая система функций (характеризуемых тем, что каждая из них при подстановке в это выражение превращает его в константу), так что вычисление его при заданном значении аргумента приводится к отысканию подходящей из этих функций по данным, относящимся к окрестности заданного значения.

В качестве примера рассматривается применение предлагаемого метода к расчету одного выражения, содержащего первую, вторую и третью производные

Простейшие частные случаи

Пусть сведения о функции $\varphi(t)$ заключаются в ее графике (рис. 1), написанном автоматически самопишущим прибором (типа скачкообразного действия). Что можно констатировать о значениях ее производной $\varphi'(t)$ на основе столь искаженного графика? Если оперировать вслепую по известным правилам графического дифференцирования, то выходит, что $\varphi'(t)$ якобы принимает только три отличающихся друг от друга значения — одно положительное (в тех интервалах аргумента, где происходит рывок вверх), одно отрицательное (в интерваликах спада) и нуль, как преобладающее значение производной. Но такие значения фактически не характеризуют изменения функции $\varphi(t)$, они характерны лишь для прибора данного типа.

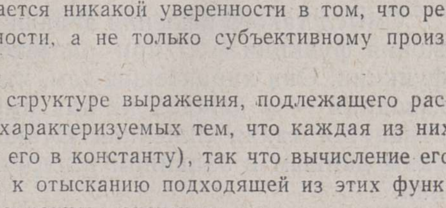


Рис. 1.

При более углубленной трактовке того же графика можно все-таки извлечь довольно обоснованное среднее значение производной $\varphi'(t)$, например, в интервале $a < t < b$. Естественно предположить, что рывок всегда начинается в тот момент, когда отставание самописца от правильного значения функции составляет определенную долю единицы (обозначенную здесь через λ), а каждый рывок изменяет положение его на одну единицу. Поскольку отставания при $t = a$ и при $t = b$ равны, то $\varphi(b) - \varphi(a) = 1$ и, следовательно, среднее значение производной $\varphi'(t)$ в интервале $a < t < b$ будет $1/(b-a)$. Ввиду того, что между a и b всегда имеется такое значение аргумента, при котором $\varphi'(t)$ принимает значение $1/(b-a)$, можно считать, что

$$\varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right) \approx \frac{1}{b-a}.$$

Таким же образом получается, что

$$\varphi'\left(\frac{d+e}{2}\right) \approx \frac{-1}{e-d}$$

и (особенно при $\lambda = \frac{1}{2}$)

$$\varphi'\left(\frac{c+d}{2}\right) \approx 0.$$

Смысл такого решения задачи состоит именно в том, что для приближения функции $\varphi(t)$ при расчете выражения $\varphi'(t)$ берутся линейные функции. Они характерны тем, что рассматриваемое выражение — производная — у каждой из них имеет одно единственное значение. Отыскивается такая линейная функция, которая соответствует эмпирическим данным в заданном интервале аргумента, и берется ее производная.

Другая простая задача — найти для той же функции $\varphi(t)$ значение выражения $\varphi''(t)[1+\varphi'(t)^2]^{-1,5}$, например, при $t = b$, решается по изложенному принципу следующим образом. Как известно, $\varphi''(t)[1+\varphi'(t)^2]^{-1,5}$ означает кривизну графика функции $\varphi(t)$; но график имеется только в искаженном виде, так что приходится использовать лишь отдельные наиболее достоверные его точки, а именно соответствующие значениям аргумента a, b и c. Поскольку линия константной кривизны есть окружность, и кривизна определена координатами трех точек окружности, то искомое значение $\varphi''(b)[1+\varphi'(b)^2]^{-1,5}$ может быть вычислено как кривизна окружности, проходящей через упомянутые три точки графика функции $\varphi(t)$. Полученный таким путем результат

$$\frac{2[(b-a)-(c-b)]}{\sqrt{[(b-a)^2+(c-b)^2+2]^2+[(b-a)(c-b)+1]^2(c-a)^2}}$$

обладает, несомненно, большей достоверностью, чем приближенное значение, вытекающее из оценок

$$\varphi'(b) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-b}\right) \quad \text{и} \quad \varphi''(b) \approx \frac{\frac{1}{c-b}-\frac{1}{b-a}}{\frac{b+c}{2}-\frac{a+b}{2}}$$

и оказывающееся к тому же более громоздким:

$$\frac{16(b-a)^2(c-b)^2\,[(b-a)-(c-b)]}{(c-a)[4(b-a)^2(c-b)^2+(c-a)^2]^{3/2}}.$$

Для сравнения с предыдущими приведем еще одну задачу: найти значение выражения $\frac{\varphi(t)}{t\varphi'(t)}$ при $t=\frac{1}{2}(a+b)$, если известен размер отставания самописца, обозначенный через λ, и с учетом этого из графика обнаружено, что $\varphi(a)=m+\lambda$. Согласно рекомендованному в предыдущих случаях принципу решение задачи сводится к отысканию такой вспомогательной функции $q(t)$, что

$$\frac{q(t)}{tq'(t)}=\mathrm{const},\qquad q(a)=m+\lambda\quad \text{и}\quad q(b)=m+1+\lambda.$$

Структура функции $q(t)$ полностью определится условием $\frac{q(t)}{tq'(t)}=$ $=\mathrm{const}$, означающим дифференциальное уравнение

$$\frac{y}{ty'}=k\qquad \text{или}\qquad kty'=y$$

(где искомая функция обозначена коротко через y, ее производная функция — через y' и константа — через k). Общим решением его, как известно, является $C\sqrt[k]{t}$, причем C — произвольная постоянная. Следовательно, $q(t)\equiv C\sqrt[k]{t}$, а остальные условия, наложенные на функцию $q(t)$, превращаются в систему уравнений

$$\begin{cases} C\sqrt[k]{a}=m+\lambda\\ C\sqrt[k]{b}=m+1+\lambda,\end{cases}$$

где C легко элиминируется, и затем из равенства

$$\sqrt[k]{\frac{b}{a}}=1+\frac{1}{m+\lambda}$$

выходит, что

$$k=\frac{\log b-\log a}{\log\left(1+\frac{1}{m+\lambda}\right)}.$$

Итак, наиболее приемлемым значением выражения $\frac{\varphi(t)}{t\varphi'(t)}$ при $t=\frac{1}{2}(a+b)$ следует считать

$$\frac{\log b-\log a}{\log\left(1+\frac{1}{m+\lambda}\right)};$$

а базирующееся на оценках $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\approx m+\frac{1}{2}+\lambda$ и $\varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right)\approx\frac{1}{b-a}$ значение

$$\frac{b-a}{a+b}\,(2m+1+2\lambda)$$

оказывается его некоторым приближением, вытекая из него в результате прикидок

$$\ln b - \ln a \approx \frac{b-a}{\frac{1}{2}(a+b)} \text{ и } \ln\left(1+\frac{1}{m+\lambda}\right) = \int\limits_{m+\lambda}^{m+\lambda+1} \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{m+\lambda+\frac{1}{2}}.$$

Ход решения в общем случае

Если выражение, содержащее некоторую эмпирическую функцию $f(x)$ и ее производные до n-го порядка, обозначить через $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$, то условие, определяющее систему свойственных ему функций, имеет вид дифференциального уравнения

$$G(a, f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a))$$

причем k — любая константа. Общее решение такого уравнения может быть обозначено через $q(x, k, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

В целях получения наиболее достоверного значения

$$G(a, f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a))$$

берется для приближения функции $f(x)$ в окрестности числа a подходящее из этих решений $q(x, k, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ путем подбора входящих в него констант. Должен ли произойти подбор способами выравнивания (напр., методом наименьших квадратов) или обычной интерполяцией, зависит от характера данных; но искомой всегда является соответствующая этим данным константа k.

Если требуется провести расчет выражения $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ при нескольких значениях аргумента x, то в приближении функции $f(x)$ будут участвовать не только разные частные решения одного дифференциального уравнения $G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = k$ (со своей константой k), но в общем и несколько таких уравнений (соответственно получаемым значениям k).

В случаях, когда одно и то же выражение $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ подлежит расчету при большой серии эмпирических функций $f(x)$, для массового решения возникающих однотипных задач (выравнивания или интерполяции) целесообразно применять вспомогательные способы, специально разработанные по структуре данного выражения (напр., номографические).

Пример

При изучении процессов фильтрации в грунтах разного типа известную роль играет выражение

$$\frac{f''(x)^2 - f'(x)f'''(x)}{f'(x)^3},$$

значения которого необходимо найти для многих функций $f(x)$, заданных посредством их графиков, написанных регистрирующими приборами (с плавным ходом работы).

Дифференциальное уравнение свойственных данному выражению функций

$$y''^2 - y'y''' = ky'^3$$

после первого интегрирования при $k \neq 0$ таково:

$$(*) \qquad y'' = \pm y' \sqrt{C_1 - 2ky'}.$$

Далее возможны три варианта. В случае $C_1 = \alpha^2$ получается

$$\frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 - 2ky'} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 2ky'} + \alpha} \right| = C_2 \pm x,$$

так что

$$y' = -\frac{2\alpha^2 \beta\, e^{\pm \alpha x}}{k(1 - \beta\, e^{\pm \alpha x})^2},$$

где $\pm e^{\alpha C_2}$ обозначено через β, и (если вместо $\pm\alpha$ писать только α, имея в виду как $\alpha > 0$, так и $\alpha < 0$)

$$\mathrm{I} \qquad y = C - \frac{2\alpha}{k(1 - \beta\, e^{\alpha x})}.$$

В случае $C_1 = 0$ из уравнения (*) следует

$$-\sqrt{\frac{2}{-ky'}} = C_2 \pm x,$$

откуда

$$y' = -\frac{2}{k(C_2 \pm x)^2}$$

и (если вместо $\pm C_2$ писать B)

$$\mathrm{II} \qquad y = C + \frac{2}{k(x + B)}.$$

В случае же $C_1 = -\alpha^2$ из уравнения (*) получается, что

$$\frac{2}{\alpha} \operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{-2ky' - \alpha^2}}{\alpha} = C_2 \pm x$$

и, следовательно,

$$y' = -\frac{\alpha^2}{2k}\left(1 + \tan^2 \frac{\alpha(x \pm C_2)}{2}\right),$$

так что (если $\pm \alpha C_2$ обозначить через β)

$$\mathrm{III} \qquad y = C - \frac{\alpha}{k} \tan \frac{\alpha x + \beta}{2}.$$

И, наконец, при $k = 0$ исходное уравнение сильно упрощается, и из него следует (после трех интегрирований)

$$\mathrm{IV} \qquad y = C(1 + Be^{Ax}).$$

Эмпирические сведения о функции $f(x)$ целесообразно брать так, чтобы их можно было считать в одинаковой мере надежными (т. е. использовать на равных началах) и чтобы их использование было наиболее удобным. Пусть, согласно этим соображениям, у рассматриваемого a взяты четыре равноотстоящих значения аргумента x, а именно $a-3\mu$, $a-\mu$, $a+\mu$, $a+3\mu$, причем μ подобрано так, что разности соответствующих значений функции $f(x)$ установимы с приемлемой точностью. Пусть для краткости введены следующие обозначения:

$$f(a-\mu)-f(a-3\mu)=\varrho,\quad \frac{f(a-\mu)-f(a-3\mu)}{f(a+\mu)-f(a-\mu)}=u,\quad \frac{f(a+\mu)-f(a-\mu)}{f(a+3\mu)-f(a+\mu)}=v.$$

Несмотря на то, что формулы I и III по структуре неодинаковы, решение интерполяционной задачи на основе таких данных для применения формул I или III приводит (после элиминации величин C, α и β) к сходным результатам:

$$k=\frac{v-u}{2\mu\varrho}\psi(s),\quad \text{где}\quad s=\frac{(u+1)(v+1)}{2u},\quad \text{а}$$

$$\psi(s)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\sqrt{s(s-2)}+s-1)}{\sqrt{s(s-2)}} & \text{при } s>2\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{s(2-s)}}\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\dfrac{2-s}{s}} & \text{при } s<2,\end{cases}$$

причем в случае $s>2$ вступает в действие формула I и в случае $s<2$ — формула III. Промежуточный случай $s=2$ требует формулы II, по которой выходит, что

$$k=\frac{v-u}{2\mu\varrho}.$$

Очевидно, этот результат может быть приобщен к предыдущим, если принять $\psi(2)=1$. Такое дополнение к определению функции вполне естественно, поскольку

$$\lim_{s\to2+0}\frac{\ln(\sqrt{s(s-2)}+s-1)}{\sqrt{s(s-2)}}=1=\lim_{s\to2-0}\frac{2}{\sqrt{s(2-s)}}\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\frac{2-s}{s}}.$$

Что касается формулы IV, то она действует при $v=u$ (и разных значениях s), но даваемый ею результат $k=0$ уже ранее известен как частный случай предыдущих более общих результатов.

Итак, можно констатировать, что наиболее достоверным значением выражения

$$\frac{f''(a)^2-f'(a)f'''(a)}{f'(a)^3}$$

на основе данных μ, ϱ, u и v является

$$\frac{v-u}{2\mu\varrho}\psi(s),\quad \text{где}\quad s=\frac{(u+1)(v+1)}{2u}\quad \text{и}$$

$$\psi(s) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\sqrt{s(s-2)} + s - 1)}{\sqrt{s(s-2)}} & \text{при } s > 2 \\ 1 \quad \text{при} \quad s = 2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{s(2-s)}} \operatorname{arc\,tan} \sqrt{\dfrac{2-s}{s}} & \text{при } s < 2. \end{cases}$$

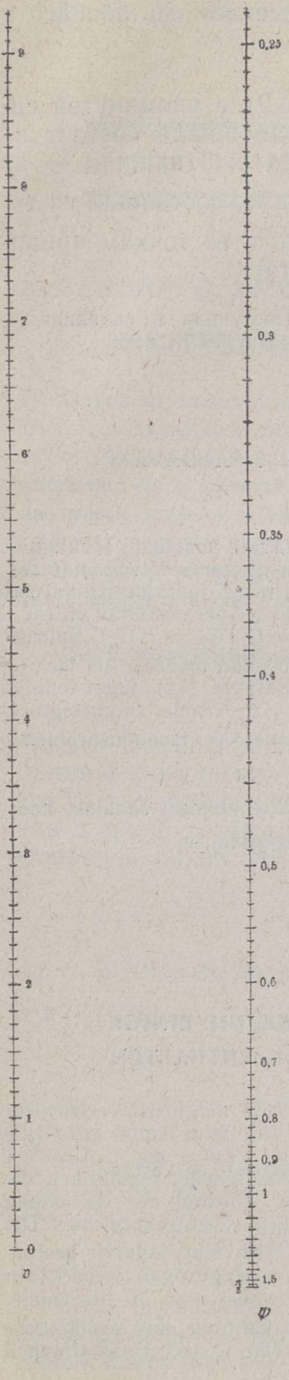
В заключение несколько слов о практических возможностях облегчения серийного расчета величины $(v-u)\psi(s)$. Изготовление сетчатой номограммы для этой величины (где u и v являются декартовыми координатами и начерчено семейство кривых $(v-u)\psi\left(\frac{(u+1)(v+1)}{2u}\right) = \text{const}$) оказывается довольно трудоемким и, следовательно, целесообразно только для крупносерийной работы. Но уже для малой серии расчетов полезно номографировать функцию $\psi\left(\frac{(u+1)(v+1)}{2u}\right)$, поскольку по ее структуре возможна удобная несложная номограмма, состоящая из трех прямых шкал. Приведенный вариант этой номограммы (рис. 2) работает следующим образом: на нижней шкале берется точка, соответствующая значению u, и на левой шкале точка согласно значению v, а проходящая через эти точки прямая пересекается с прямой, на которую нанесена правая шкала, в той точке, которой соответствует искомое значение ψ.

При изготовлении номограммы вместо уравнения

$$s = \frac{(u+1)(v+1)}{2u}$$

взято эквивалентное ему уравнение

$$s = \frac{u+1}{2{,}8u} \cdot 1{,}4(v+1),$$



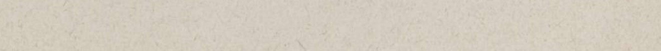


Рис. 2.

с тем чтобы получить для u шкалу с более удобно расположенным интервалом $1 < u < 5$. Применена известная теорема (легко доказуемая путем прямой проверки): если тройка чисел u, v, s удовлетворяет уравнению $s = g(u)h(v)$, то в декартовой системе координат проложенная через точки $(0;\ h(v))$ и $(1;\ s)$ прямая пересекает ось абсцисс в точке $\left(\frac{1}{1-g(u)};\ 0\right)$.

Итак, рассматривая данную помограмму (рис. 2) в упомянутой системе координат, можно констатировать, что левая шкала состоит из точек $(0;\ 1{,}4(v+1))$, к которым приписаны числа v, и нижняя — из точек $\left(\frac{2{,}8u}{1{,}8u-1};\ 0\right)$ с приписками u; правая же шкала, состоящая из точек $(1;\ s)$, превращена в шкалу для $\psi(s)$ так, что к ее точкам приписаны не числа s, а вместо них соответствующие $\psi(s)$.

Поступила в редакцию
27/IX 1966

A. HUMAL

MEETOD EMPIIRILISE FUNKTSIOONI TULETISI SISALDAVATE AVALDISTE ARVUTAMISEKS

Avaldise $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ võimalikult usaldatavate väärtuste arvutamine empiirilise funktsiooni $f(x)$ andmestikust võib toimuda vastava diferentsiaalvõrrandi abil. Nimelt leidub avaldisele $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ omane $(n+1)$-parameetriline pere niisuguseid funktsioone, mis teevad ta konstantseks; teatavasti on see pere esitatav võrrandi $G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = k$ üldlahendina, mis olgu tähistatud $q(x, k, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Suuruse $G(a, f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a))$ kõige usaldatavama väärtuse saab nüüd määrata sel teel, et arvu a ümbruses võetud empiiriliste andmete kohaselt asendatakse $f(x)$ funktsiooniga $q(x, k, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, sobitades parameetrid $k, C_1, C_2, \ldots, C_n$ nende andmetega, et leida k. See võib toimuda kas harilìku interpolatsioonülesande või tasandusprobleemi lahendamisena, vastavalt andmestiku iseloomule.

Näitena käsitletakse avaldist $\frac{f''(x)^2 - f'(x)f'''(x)}{f'(x)^3}$ ning tuuakse kolmest skaalast koosnev nomogramm — kasutamiseks tema väärtuste massilisel arvutamisel.

A. HUMAL

EINE BERECHNUNGSMETHODE FÜR AUSDRÜCKE, DIE EINIGE ABLEITUNGEN EINER EMPIRISCHEN FUNKTION ENTHALTEN

Die Aufgabe, aus Angaben über eine empirische Funktion $f(x)$ möglichst verlässliche Werte eines Ausdrucks $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ zu ermitteln, kann mit Hilfe der entsprechenden Differentialgleichung gelöst werden. Für den Ausdruck $G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ gibt es eine $(n+1)$-parametrige Schar solcher Funktionen, die ihn konstant halten; bekanntlich kann sie als allgemeine Lösung der Gleichung $G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = k$ festgestellt werden und sei mit $q(x, k, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ bezeichnet. Der zuverlässigste Wert k für $G(a, f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a))$ lässt sich nun dadurch bestimmen, dass in geeigneter Umgebung von a empirische Daten herangezogen werden zur Ersetzung der Funktion $f(x)$ durch $q(x, k, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, wobei man die Parameter $k, C_1, C_2, \ldots, C_n$ den Daten anzupassen hat, um k zu finden. Das kann als eine gewöhnliche Interpolationsaufgabe oder als Ausgleichungsproblem gelöst werden, je nach Beschaffenheit der Angaben.

Als Beispiel wird $\frac{f''(x)^2 - f'(x)f'''(x)}{f'(x)^3}$ behandelt und für serienmässige Berechnungen seiner Werte ein aus drei Skalen bestehendes Nomogramm aufgestellt.