EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 4

Х. КОППЕЛЬ

О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА СТЕФФЕНСЕНА

Пусть дано нелинейное операторное уравнение

$$F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0 \tag{1}$$

в пространстве Банаха.

Как известно (см. [1, 2]), обобщенный метод Стеффенсена имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - [F(x_n, \Phi(x_n))]^{-1} F(x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $F(x', x'') = E - \Phi(x', x'')$ — первая разделенная разность оператора $F(x)$; E — единичный оператор.

Сходимость обобщенного метода Стеффенсена исследована кроме [1, 2] еще в [3].

В настоящей статье доказывается ряд теорем о сходимости метода (2), имеющих более широкую область применения, чем теоремы, приведенные в упомянутых выше статьях.

Введем следующие условия:

1°. Элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению (1), причем

$$\|F(x_0)\| = \|x_0 - \Phi(x_0)\| \leqslant \eta_0.$$

2°. Для x_0 оператор $F(x_0, \Phi(x_0))$ имеет обратный

$$\Lambda_0 = [F(x_0, \Phi(x_0))]^{-1} \quad \text{и} \quad \|\Lambda_0\| \leqslant B_0.$$

3°. $$\|\Phi(x_0, \Phi(x_0))\| \leqslant M_0.$$

4°. Для каждого x', x'', x''' из некоторой замкнутой сферы S справедлива оценка (ср. [4])

$$\|\Phi(x', x'') - \Phi(x'', x''')\| \leqslant K'\|x' - x'''\| + K''(\|x' - x''\| + \|x'' - x'''\|).$$

5°. $$\|\Phi(x', x'')\| \leqslant M \quad (x', x'' \in S).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1°—4° *и*

$$h_0 + \sqrt{L_0 k_0} \leqslant 1, \tag{3}$$

причем в качестве S выбрана сфера

$$\|x - x_0\| \leqslant R; \tag{4}$$

тогда уравнение (1) *имеет в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant r \tag{5}$$

решение x^*, к которому последовательность (2) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B_0 \eta_0 S_n \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$k_0 = [K' M_0 B_0 + K'' (B_0 + 1)] B_0 \eta_0;$$

$$h_0 = k_0 + [K'(k_0 + B_0) + K''(3k_0 + B_0)] B_0 \eta_0;$$

$$L_0 = \begin{cases} \dfrac{K' M_0 B_0 + K''(B_0 + 1) + h_0 (K' - K'')}{K' M_0 B_0 + K''(B_0 + 1)}, & \text{если } K' > K'' \\ 1, & \text{если } K' \leqslant K''; \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1 - h_0}{L_0}\right)^i \left[\frac{L_0 k_0}{(1 - h_0)^2}\right]^{2^i - 1} \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

$$r = B_0 \eta_0 S_0; \qquad R = \max\{\eta_0; k_0 \eta_0 + r\}.$$

Доказательство. Покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия $1^\circ - 3^\circ$ и (3) сохраняются.*

Прежде всего имеем

$$\|F(x_1)\| \leqslant \|F(x_1, x_0) - F(x_0, \Phi(x_0))\| \, \|x_1 - x_0\| \qquad (\text{ср. [2]}).$$

Используя условия $1^\circ - 4^\circ$ и формулу (2), получим

$$\|F(x_1)\| \leqslant \|\Phi(x_1, x_0) - \Phi(x_0, \Phi(x_0))\| B_0 \eta_0 \leqslant [K' M_0 B_0 \eta_0 + K'' \eta_0 (B_0 + 1)] B_0 \eta_0 = \eta_1 \qquad (\|x_1 - \Phi(x_0)\| \leqslant B_0 M_0 \eta_0) \qquad (\text{ср. [2]})$$

или

$$\eta_1 = k_0 \eta_0, \tag{7}$$

т. е. условие 1° выполнено.

Далее, пользуясь опять условиями 1°—4° и (2), имеем

$$\|\Lambda_0[\Phi(x_1, \Phi(x_1)) - \Phi(x_0, \Phi(x_0))]\| \leqslant \|\Lambda_0\| [\|\Phi(x_1, \Phi(x_1)) - \Phi(\Phi(x_1), x_0)\| + \|\Phi(\Phi(x_1), x_0) - \Phi(x_0, \Phi(x_0))\|] \leqslant B_0 [K' B_0 \eta_0 + K''(\eta_1 + \|\Phi(x_1) - x_0\|) + K' B_0 \eta_0 \|\Phi(x_1, x_0)\| + K''(\|\Phi(x_1) - x_0\| + \eta_0)]. \tag{8}$$

---

* Принадлежность элементов x_n, $\Phi(x_n)$ сфере S доказывается ниже.

Так как

$$\|\Phi(x_1)-x_0\| \leqslant \|\Phi(x_1)-x_1\| + \|x_1-x_0\| \leqslant \eta_0(k_0+B_0)$$

и $$\|\Phi(x_1,x_0)\| \leqslant \|\Phi(x_1,x_0)-\Phi(x_0,\Phi(x_0))\| + M_0 \leqslant \frac{k_0}{B_0}+M_0,$$

то $$\|\Lambda_0[\Phi(x_1,\Phi(x_1))-\Phi(x_0,\Phi(x_0))]\| \leqslant h_0 < 1 \quad \text{(см. (3))}.$$

На основании теоремы Банаха существует обратный оператор

$$H^{-1} = \{E - \Lambda_0[F(x_0,\Phi(x_0)) - F(x_1,\Phi(x_1))]\}^{-1},$$

причем $$\|H^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-h_0}.$$

Тогда $$\Lambda_1 = [F(x_1,\Phi(x_1))]^{-1} = H^{-1}\Lambda_0 \quad \text{(ср. [5])}$$

и $$\|\Lambda_1\| \leqslant \|H^{-1}\|\,\|\Lambda_0\| \leqslant \frac{B_0}{1-h_0} = B_1, \tag{9}$$

т. е. условие 2° тоже выполнено.

Оценим

$$\|\Phi(x_1,\Phi(x_1))\| \leqslant \|\Phi(x_1,\Phi(x_1)) - \Phi(\Phi(x_1),x_0)\| + \|\Phi(\Phi(x_1),x_0) -$$

$$- \Phi(x_0,\Phi(x_0))\| + M_0 \leqslant \frac{h_0}{B_0} + M_0 = M_1, \tag{10}$$

следовательно, выполняется и условие 3°.

Покажем, что

$$h_1 + \sqrt{L_1 k_1} \leqslant 1.$$

Для этого достаточно показать, что $k_1 \leqslant k_0$, $h_1 \leqslant h_0$ и $L_1 \leqslant L_0$.

Используя соотношения (7), (9) и (10), легко убедиться, что

$$k_1 = [K'M_1B_1 + K'(B_1+1)]B_1\eta_1 = \frac{k_0^2[K'M_0B_0 + K''(B_0+1) + h_0(K'-K'')]}{(1-h_0)^2[K'M_0B_0 + K''(B_0+1)]}. \tag{11}$$

Рассмотрим случай $K' > K''$. В силу (3) и (11)

$$k_1 = \frac{L_0 k_0^2}{(1-h_0)^2} \leqslant k_0.$$

Так как и $$B_1^2\eta_1 \leqslant B_0^2\eta_0,$$

то $$h_1 = k_1 + [K'(k_1+B_1) + K''(3k_1+B_1)]B_1\eta_1 \leqslant h_0.$$

Далее

$$L_1 = 1 + \frac{h_1(K'-K'')}{K'M_1B_1 + K''(B_1+1)} \leqslant 1 + \frac{h_0(K'-K'')}{K'M_0B_0 + K''(B_0+1)} = L_0.$$

Если
$$K' \leqslant K'',$$
то
$$k_1 \leqslant \frac{k_0^2}{(1-h_0)^2}.$$
Отсюда в силу (3) следует
$$k_1 \leqslant k_0; \quad h_1 \leqslant h_0.$$
Итак, условие (3) выполнено при $x = x_1$ (так как $L_1 = 1$).

Ясно, что аналогичные рассуждения можно последовательно провести для любого элемента x_n, после чего будем иметь
$$k_n = L_{n-1} f_{n-1} k_{n-1}^2; \qquad \eta_n = k_{n-1}\eta_{n-1}; \qquad B_n = \frac{B_{n-1}}{g_{n-1}};$$
$$M_n = \frac{h_{n-1}}{B_{n-1}} + M_{n-1}; \quad k_n \leqslant k_{n-1};\ h_n \leqslant h_{n-1};\ f_n \leqslant f_{n-1};\ L_n \leqslant L_{n-1},$$
где
$$g_n = 1 - h_n;\ f_n = \frac{1}{g_n^2},$$
и
$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant B_{n-1}\eta_{n-1}. \tag{12}$$

Далее, в силу того, что
$$k_n \leqslant \frac{1}{L_0 f_0}(L_0 f_0 k_0)^{2^n},$$
получаем
$$\eta_n = k_{n-1}\eta_{n-1} = k_{n-1}k_{n-2}\eta_{n-2} = \ldots = k_{n-1}\ldots k_0\eta_0 \leqslant \frac{1}{(L_0 f_0)^n}(L_0 f_0 k_0)^{2^n - 1}\eta_0. \tag{13}$$
Кроме того,
$$B_n = \frac{B_{n-1}}{g_{n-1}} \leqslant \frac{B_{n-2}}{g_{n-2}^2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{B_0}{g_0^n}. \tag{14}$$
Используя оценки (12), (13) и (14), можем оценить норму
$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{p}\|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} B_{n+i-1}\eta_{n+i-1} \leqslant$$
$$\leqslant B_0\eta_0 \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{g_0}{L_0}\right)^{n+i-1}(L_0 f_0 k_0)^{2^{n+i-1}-1}, \tag{15}$$
где, переходя к пределу ($p \to \infty$), получим (6).

Тот факт, что x^* является решением уравнения (1), вытекает из неравенств
$$\|x_n - \Phi(x_n)\| \leqslant \eta_n,$$
так как
$$\eta_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Покажем еще принадлежность элементов x_n, $\Phi(x_n)$ сфере (4). Действительно, взяв в оценке (15) $n=0$, имеем

$$\|x_p - x_0\| \leqslant B_0 \eta_0 \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{g_0}{L_0}\right)^{i-1} (L_0 f_0 k_0)^{2^{i-1}-1} \leqslant$$

$$\leqslant B_0 \eta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-h_0}{L_0}\right)^{i} \left[\frac{L_0 k_0}{(1-h_0)^2}\right]^{2^i-1} = B_0 \eta_0 S_0 = r;$$

тогда и
$$\|x^* - x_0\| \leqslant r.$$

Далее
$$\|\Phi(x_0) - x_0\| \leqslant \eta_0$$
и
$$\|\Phi(x_n) - x_0\| \leqslant \eta_n + \|x_n - x_0\| \leqslant k_0 \eta_0 + r \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В статье [1] доказана аналогичная теорема при более жестком условии

$$\|\Phi(x_0, \Phi(x_0))\| < 1.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 4°, 5°

и
$$h_0 + \sqrt{k_0} \leqslant 1, \tag{16}$$

причем в качестве S выбрана сфера

$$\|x - x_0\| \leqslant R; \tag{17}$$

тогда уравнение (1) *имеет в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant r \tag{18}$$

решение x^*, к которому последовательность (2) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B_0 \eta_0 S_n \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{19}$$

Здесь введены обозначения:

$$k_0 = [K' M B_0 + K''(B_0 + 1)] B_0 \eta_0;$$

$$h_0 = k_0 + [K' B_0 + K''(3k_0 + B_0)] B_0 \eta_0;$$

$$S_n = \sum_{i=n}^{\infty} (1-h_0)^i \left[\frac{k_0}{(1-h_0)^2}\right]^{2^i-1} \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

$$r = \min\{B_0 \eta_0 S_0; (M B_0 S_0 + 1)\eta_0\};$$

$$R = \max\{B_0 \eta_0 S_0; (M B_0 S_0 + 1)\eta_0\}.$$

Доказательство. Аналогично теореме 1 покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия 1°, 2° и (16) не нарушаются.

В данном случае

$$\|F(x_1)\| \leqslant [K'MB_0 + K''(B_0+1)]B_0\eta_0^2 = k_0\eta_0 = \eta_1.$$

Далее

$$\|\Lambda_0[\Phi(x_1, \Phi(x_1)) - \Phi(x_0, \Phi(x_0))]\| \leqslant k_0 + [K'B_0 + \\ + K''(3k_0 + B_0)]B_0\eta_0 = h_0 < 1 \quad (\text{см. } (16)),$$

так как в данном случае в силу 5°

$$\|\Phi(x_1, x_0)\| \leqslant M.$$

Итак,
$$\|\Lambda_1\| \leqslant \frac{B_0}{1-h_0} = B_1,$$

т. е. условия 1° и 2° выполнены

Докажем теперь, что

$$h_1 + \sqrt{k_1} \leqslant 1.$$

В данном случае

$$k_1 = [K'MB_1 + K''(B_1+1)]B_1\eta_1 = \frac{(k_0 - K''B_0\eta_0 h_0)k_0}{(1-h_0)^2} \leqslant \frac{k_0^2}{(1-h_0)^2}.$$

Легко видеть, что в силу (16)

$$k_1 \leqslant k_0, \qquad h_1 \leqslant h_0$$

и поэтому условие (16) выполнено для точки x_1.

Теперь уже нетрудно найти

$$k_n \leqslant \frac{1}{f_0}(f_0k_0)^{2^n}$$

и
$$\eta_n \leqslant \frac{1}{f_0^n}(f_0k_0)^{2^n-1}\eta_0,$$

где
$$f_0 = \frac{1}{(1-h_0)^2}.$$

Оценку (19) получаем точно так же, как и в теореме 1.

Убедимся, что элементы $x_n, \Phi(x_n)$ принадлежат сфере (17).

Тот факт, что x_n принадлежат сфере (17), доказывается как в теореме 1. Принадлежность $\Phi(x_n)$ сфере (17) следует из неравенств

$$\|\Phi(x_n) - x_0\| \leqslant \|\Phi(x_n) - \Phi(x_0)\| + \eta_0 \leqslant MB_0\eta_0 S_0 + \eta_0.$$

Ясно, что x^* также принадлежит сфере (18).

Теорема доказана.

Замечание 2. Если в теореме 2 взять $K''=0$ и потребовать, чтобы $M\leqslant 1$, то по существу получаем теорему 1 из [3].

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 4°

и
$$h_0+\sqrt{k_0}\leqslant 1, \tag{20}$$
причем в качестве S выбрана сфера
$$\|x-x_0\|\leqslant R;$$
тогда уравнение (1) *имеет в сфере*
$$\|x-x_0\|\leqslant r$$
решение x^*, к которому последовательность (2) *сходится со скоростью*
$$\|x^*-x_n\|\leqslant B_0\eta_0 S_n \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Здесь введены обозначения:
$$k_0=(K'+K'')(B_0+1)B_0\eta_0;$$
$$h_0=k_0(1+2K''B_0\eta_0)+(K'+K'')(k_0+B_0)B_0\eta_0;$$
$$S_n=\sum_{i=n}^{\infty}(1-h_0)^i\left[\frac{k_0}{(1-h_0)^2}\right]^{2^i-1} \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots);$$
$$r=B_0\eta_0 S_0;$$
$$R=\max\{\eta_0;\ k_0\eta_0+r\}$$

Доказательство в основном совпадает с доказательством теоремы 1. Только в данном случае возникают некоторые изменения в доказательстве выполнения условий 1° и 2° при x_1. Действительно,
$$\|F(x_1)\|\leqslant(K'+K'')(B_0+1)B_0\eta_0^2=k_0\eta_0=\eta_1,$$
так как
$$\|x_1-\Phi(x_0)\|\leqslant\|x_1-x_0\|+\|x_0-\Phi(x_0)\|\leqslant\eta_0(B_0+1)$$
Используя оценки
$$\|\Phi(x_1)-x_0\|\leqslant\|\Phi(x_1)-x_1\|+\|x_1-x_0\|\leqslant\eta_0(B_0+k_0)$$
и
$$\|\Phi(x_1)-\Phi(x_0)\|\leqslant\|\Phi(x_1)-x_0\|+\|x_0-\Phi(x_0)\|\leqslant\eta_0(B_0+k_0+1),$$
можно как и в теореме 1 получить
$$\|\Lambda_1\|\leqslant\frac{B_0}{1-h_0}=B_1.$$

Дальнейший ход доказательства точно такой же, как и в теореме 1.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1°, 4° *и* 5°, *причем* $M<1$, $k_0\leqslant 1$ *и в качестве S выбрана сфера*

$$\|x - x_0\| \leqslant R,$$

то уравнение (1) *имвет в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant r$$

решение x^*, *к которому последовательность* (2) *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\eta_0 S_n}{1 - M} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{21}$$

Здесь введены обозначения:

$$k_0 = \frac{K'M + K''(2 - M)}{(1 - M)^2} \eta_0;$$

$$S_n = \sum_{i=n}^{\infty} k_0^{2^i - 1} \quad (n = 0, 1, \ldots);$$

$$r = \min\left\{\frac{S_0 \eta_0}{1 - M}; \quad \left(\frac{MS_0}{1 - M} + 1\right)\eta_0\right\};$$

$$R = \max\left\{\frac{S_0 \eta_0}{1 - M}; \quad \left(\frac{MS_0}{1 - M} + 1\right)\eta_0\right\}.$$

Доказательство. В силу теоремы Банаха следует

$$\|\Lambda_n\| \leqslant \|[E - \Phi(x_n, \Phi(x_n))]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - M} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Используя оценки

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{\eta_0}{1 - M}$$

и

$$\|x_1 - \Phi(x_0)\| \leqslant \frac{M\eta_0}{1 - M},$$

можем найти

$$\|F(x_1)\| \leqslant \frac{K'M + K''(2 - M)}{(1 - M)^2} \eta_0^2 = k_0 \eta_0 = \eta_1.$$

Так как $k_0 \leqslant 1$, то легко показать, что

$$\eta_n \leqslant \eta_{n-1} \text{ и } k_n \leqslant k_{n-1}.$$

Далее нетрудно получить равенства

$$k_n = k_0^{2^n}, \quad \eta_n = k_0^{2^n - 1} \eta_0$$

и так же, как в предыдущих теоремах, установить оценку (21).

Дальнейший ход доказательства совпадает с доказательством теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen Kuo-Wang, Comment. math. Univ. Carolinae, 5, Nr. 2, 47—77 (1964).
2. Ульм С. Ю., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 4, № 6, 1093—1097 (1964).
3. Бельтюков Б. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 5, 927—931 (1965).
4. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., 41, Sonderheft, 61—63 (1961).
5. Канторович Л. В., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 28, 104—144 (1949).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 30/XI 1965

H. KOPPEL

ÜLDISTATUD STEFFENSENI MEETODI KOONDUVUSEST

Artiklis tõestatakse rida teoreeme üldistatud Steffenseni meetodi [1] koonduvusest Banachi ruumis. Nende teoreemide rakenduspiirkond on üldiselt suurem kui varemtuntud teoreemidel [1, 2, 3].

H. KOPPEL

ON CONVERGENCE OF THE GENERALIZED STEFFENSEN'S METHOD

This paper presents several theorems proving the convergence of the generalized Steffensen's method [1] in Banach space.

The range of applicability of these theorems is on the whole wider than that of those known hitherto [1, 2, 3].