

П. КАРД

## О НЕРАВЕНСТВАХ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОПТИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

В статьях А. Кауни [1, 2] выведены интересные соотношения между величинами, характеризующими многослойную оптическую пленку. Это, во-первых, формула

$$\cos \gamma_L = \frac{AA' - (R + R')D}{2D\sqrt{RR'}} \quad (1)$$

и, во-вторых, неравенство

$$D \leq (1 + \sqrt{R'}) (1 - \sqrt{R}) \quad (2)$$

(здесь и в дальнейшем наши обозначения отчасти отличаются от обозначений А. Кауни).  $R$ ,  $D$  и  $A$  означают энергетические коэффициенты отражения, пропускания и поглощения пленки, а штрих означает падение света на пленку с обратной стороны. Величина  $\gamma_L$  есть экстремальное значение  $\gamma$  и

$$\gamma = \mu + \mu', \quad (3)$$

а  $\mu$  есть фаза величины  $\frac{r}{d}$ , где  $r$  и  $d$  — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания, т. е.

$$\left. \begin{aligned} R &= rr^* \\ D &= dd^* \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и

$$\frac{r}{d} = \sqrt{\frac{R}{D}} e^{i\mu}. \quad (5)$$

При выводе соотношений (1) и (2) А. Кауни использовал условие сохранения энергии в виде

$$R + D \leq 1. \quad (6)$$

Однако такие же или сходные соотношения можно получить и независимо от условия (6), так что они приобретают более широкий смысл. Отказываясь от условия (6), мы имеем в виду случай отрицательного поглощения в пленке. Таким образом, закон сохранения энергии, естественно, остается в силе, но не в форме (6), а в более общей форме [см. ниже, формулы (11)].

Целью настоящей статьи является вывод сходных с (1) и (2) обобщенных формул, а также некоторых новых аналогичных соотношений. В этом выводе нами будут использованы, кроме указанных выше, еще следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \frac{r}{d} = \sqrt{\frac{R}{D}} e^{i\mu} \\ b &\equiv \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{i\nu} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{2}(bb^* - aa^* + \bar{b}\bar{b}^* - \bar{a}\bar{a}^*) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{D} + \frac{\bar{A}}{\bar{D}}\right), \quad (8)$$

где тильда означает пленку, сопряженную к данной, т. е. получающуюся из данной путем замены всех показателей преломления на их комплексно-сопряженные значения.

Мы воспользуемся также следующими основными формулами теории пленок (см. [3]):

$$b\bar{b}^* - a\bar{a}^* = 1 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= -\bar{a}^* \\ b' &= b \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти формулы верны без ограничений для любой пленки, независимо от того, имеет ли она положительное, отрицательное или равное нулю поглощение. Закон сохранения энергии пишется в виде

$$\left. \begin{aligned} R + D + A &= 1 \\ \bar{R} + \bar{D} + \bar{A} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где, конечно,  $R \geq 0$ ,  $\bar{R} \geq 0$ ,  $D \geq 0$ ,  $\bar{D} \geq 0$ , но  $A$  и  $\bar{A}$  могут иметь и отрицательные значения.

### Вывод формул А. Кауни

Примем за исходный пункт формулу

$$\cos(\mu - \bar{\mu}) = \frac{a\bar{a}^* + a^*\bar{a}}{2\sqrt{aa^* \bar{a}\bar{a}^*}}, \quad (12)$$

вытекающую из (7). Преобразуем ее. Из (12), с учетом (8) и (9), следует

$$\begin{aligned} 2\sqrt{aa^* \bar{a}\bar{a}^*} \cos(\mu - \bar{\mu}) &= \\ &= 2bb^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) - bb^*(bb^* - aa^* + \bar{b}\bar{b}^* - \bar{a}\bar{a}^* - 2) + \\ &\quad + a\bar{a}^*(b^*\bar{b} - a^*\bar{a}) + a^*\bar{a}(b\bar{b}^* - a\bar{a}^*). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая члены, находим

$$\begin{aligned} 2\sqrt{aa^* \bar{a}\bar{a}^*} \cos(\mu - \bar{\mu}) &= 2bb^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) - b^2b^{*2} + 2bb^* - \\ &- (b\bar{b}^* - a\bar{a}^*)(b^*\bar{b} - a^*\bar{a}) - aa^* \bar{a}\bar{a}^* + (bb^* - 1)(aa^* + \bar{a}\bar{a}^*) + aa^* + \bar{a}\bar{a}^* = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2bb^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) + aa^* + \bar{a}\bar{a}^* - (bb^* - aa^* - 1)(bb^* - \bar{a}\bar{a}^* - 1) = \\
 &= 2bb^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) + aa^* + a'a'^* - (bb^* - aa^* - 1)(b'b'^* - a'a'^* - 1) = \\
 &= \frac{2(\operatorname{ch} \varphi - 1)}{D} + \frac{R}{D} + \frac{R'}{D'} - \frac{AA'}{DD'}.
 \end{aligned}$$

Наконец, учитывая, что, согласно (10),  $D' = D$  и  $\mu - \bar{\mu} = \pi + \mu + \mu'$ , находим

$$\cos(\mu + \mu') = \frac{\frac{AA'}{D} - (R + R')}{2\sqrt{RR'}} - \frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\sqrt{RR'}}. \quad (13)$$

По поводу полученной формулы следует, прежде всего, заметить, что она теряет смысл, если  $R = 0$  и/или  $R' = 0$ . Вместо нее будем тогда иметь (полагая, без ограничения общности,  $R' = 0$ )

$$\frac{AA'}{D} - R - 2(\operatorname{ch} \varphi - 1) = 0,$$

или, заменяя  $A' = 1 - D$ ,

$$\frac{A}{D} + D = 2 \operatorname{ch} \varphi - 1. \quad (14)$$

Эту формулу можно рассматривать как предельный случай формулы (13). Ее можно получить и непосредственно из формул (8) и (9). В самом деле, так как  $R' = 0$  означает, что  $\bar{a} = 0$ , то  $bb^* = 1$ , откуда  $D\bar{D} = 1$ ; кроме того,

$$2 \operatorname{ch} \varphi - 1 = bb^* - aa^* + \bar{b}\bar{b}^* - 1.$$

Так как здесь  $bb^* - aa^* - 1 = \frac{A}{D}$  и  $\bar{b}\bar{b}^* = \frac{1}{D} = D$ , то отсюда и получается формула (14).

Вернемся к формуле (13). Величина  $\varphi$ , согласно формуле (8), является вещественной и  $\operatorname{ch} \varphi \geq 1$  тогда и только тогда, если

$$\frac{A}{D} + \frac{\bar{A}}{\bar{D}} \geq 0. \quad (15)$$

Можно показать (см. [4]), что это неравенство действительно выполняется для любой пленки, все слои которой имеют поглощение одного знака, т. е. либо только положительное, либо только отрицательное. Ниже будем везде предполагать, что это условие выполнено. Тогда из формулы (13) непосредственно вытекает формула А. Кауни (1). Однако, теперь она выведена не только для случая положительного поглощения, но и для случая отрицательного поглощения, когда неравенство (6) не выполняется. В предельном случае отсутствия поглощения, как хорошо известно,  $R' = R$ ,  $A = A' = 0$  и  $\varphi = 0$ . Следовательно, тогда, по формуле (13),  $\cos(\mu + \mu') = -1$ , что также хорошо известно.

Чтобы получить в обобщенном виде вторую формулу А. Кауни, перепишем (13) в виде следующего неравенства:

$$\frac{R + R' - \frac{AA'}{D}}{2\sqrt{RR'}} \leq 1. \quad (16)$$

Подставляя сюда  $A = 1 - R - D$  и  $A' = 1 - R' - D$ , находим

$$D^2 - 2(1 - \sqrt{RR'})D + (1 - R)(1 - R') \geq 0$$

или

$$[D - (1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'})][D - (1 - \sqrt{R})(1 + \sqrt{R'})] \geq 0. \quad (17)$$

Это неравенство верно не только если  $R \neq 0$  и  $R' \neq 0$ , но и при  $R = 0$  и/или  $R' = 0$ , несмотря на то, что оно получено из формулы (13), которая в этих случаях неприменима. В самом деле, если, например,  $R' = 0$ , то, согласно (14), имеем

$$\frac{A}{D} + D - 1 \geq 0.$$

Подставляя  $A = 1 - R - D$ , находим

$$D^2 - 2D + 1 - R \geq 0,$$

откуда

$$[D - (1 + \sqrt{R})][D - (1 - \sqrt{R})] \geq 0. \quad (18)$$

Но это неравенство совпадает с неравенством (17), если положить в нем  $R' = 0$ . Очевидно, оно останется верным и при  $R = 0$ , а также при  $R = R' = 0$ .

Не ограничивая общности, положим теперь, что

$$R' \leq R.$$

Тогда из (17) вытекает, что должно выполняться одно из двух неравенств:

$$D \geq (1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'}) \quad (19)$$

или

$$D \leq (1 - \sqrt{R})(1 + \sqrt{R'}), \quad (20)$$

причем, так как

$$(1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'}) \geq (1 - \sqrt{R})(1 + \sqrt{R'}),$$

оба они сразу выполняться не могут (кроме, конечно, тривиального предельного случая, когда везде стоит знак равенства).

Дальше нужно различать два случая.

1. Если поглощение во всех слоях положительно, то  $A > 0$ ,  $A' > 0$ . Отсюда вытекает, что неравенство (19) невозможно, так как в противном случае имело бы место также неравенство

$$D \geq (1 + \sqrt{R'})(1 - \sqrt{R});$$

перемножая оба, мы имеем бы

$$D^2 \geq (1 - R)(1 - R'),$$

т. е.

$$D^2 \geq (A + D)(A' + D).$$

Но это противоречит условию положительности поглощения. Следовательно, в этом случае

$$\left. \begin{aligned} D &\leq (1 - \sqrt{R})(1 + \sqrt{R'}) \\ D &\leq (1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'}) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Это и есть неравенство А. Кауни (2).

2. Если поглощение во всех слоях отрицательно, то  $A < 0$ ,  $A' < 0$ . Тогда невозможно неравенство (20), что в случае  $R > 1$  очевидно; если же  $R < 1$ , то, умножая (20) на вытекающее из него неравенство

$$D \leq (1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'}),$$

мы получили бы, что

$$D^2 \leq (1 - R)(1 - R'),$$

т. е.

$$D^2 \leq (A + D)(A' + D),$$

что при  $A < 0$ ,  $A' < 0$ , так как  $A + D = 1 - R > 0$  и  $A' + D > 0$ , невозможно. Следовательно, в этом случае

$$\left. \begin{aligned} D &\geq (1 - \sqrt{R})(1 + \sqrt{R'}) \\ D &\geq (1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Объединяя оба результата, запишем окончательный результат в виде обобщенного неравенства А. Кауни:

$$\left. \begin{aligned} D &\leq (1 - \sqrt{R})(1 + \sqrt{R'}) \\ D &\leq (1 + \sqrt{R})(1 - \sqrt{R'}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

если  $A \geq 0$ .

### Новые формулы

Аналогично формуле (12), мы можем исходить также из формулы

$$\cos(v - \bar{v}) = \frac{b\bar{b}^* + b^*\bar{b}}{2\sqrt{bb^*\bar{b}\bar{b}^*}} \quad (24)$$

Преобразуем ее аналогичным образом:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{bb^*\bar{b}\bar{b}^*} \cos(v - \bar{v}) &= 2aa^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) - aa^*(bb^* - aa^* + \bar{b}\bar{b}^* - \bar{a}\bar{a}^* - 2) + \\ &+ b\bar{b}^*(\bar{b}\bar{b}^* - \bar{a}\bar{a}^*) + b^*\bar{b}(b\bar{b}^* - a\bar{a}^*) = 2aa^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) + a^2a^{*2} + 2aa^* + \\ &+ (b\bar{b}^* - a\bar{a}^*)(b^*\bar{b} - a^*\bar{a}) + bb^*\bar{b}\bar{b}^* - (aa^* + 1)(bb^* + \bar{b}\bar{b}^*) + bb^* + \bar{b}\bar{b}^* = \\ &= 2aa^*(\operatorname{ch} \varphi - 1) + bb^* + \bar{b}\bar{b}^* + (bb^* - aa^* - 1)(\bar{b}\bar{b}^* - aa^* - 1) = \\ &= \frac{2R(\operatorname{ch} \varphi - 1)}{D} + \frac{1}{D} + \frac{1}{\bar{D}} + \frac{A\bar{A}'}{D\bar{D}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\cos(\nu - \bar{\nu}) = R \sqrt{\frac{\bar{D}}{D}} (\operatorname{ch} \varphi - 1) + \frac{D + \bar{D} + A\bar{A}'}{2\sqrt{D\bar{D}}}. \quad (25)$$

Из полученной формулы вытекает, во-первых, что

$$\cos(\nu - \bar{\nu}) \geq \frac{D + \bar{D} + A\bar{A}'}{2\sqrt{D\bar{D}}}. \quad (26)$$

Это неравенство аналогично первой формуле А. Кауни. Во-вторых, имеем

$$\frac{D + \bar{D} + A\bar{A}'}{2\sqrt{D\bar{D}}} \leq 1. \quad (27)$$

Подставляя сюда

$$A = 1 - R - D \quad \bar{A}' = 1 - \bar{R}' - \bar{D},$$

находим (учитывая, что  $\frac{\bar{R}'}{\bar{D}} = \frac{R}{D}$ )

$$\left(\frac{R}{D}\right)^2 - \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{\bar{D}} - 2\right)\frac{R}{D} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{D\bar{D}}}\right)^2 \leq 0. \quad (28)$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\left[\frac{R}{D} + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{\bar{D}}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{D}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{D}}}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{D}}}\right)^2\right] \leq 0. \quad (29)$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{D}}}\right) \geq 1. \quad (30)$$

Следовательно, можно положить

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{D}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{D}}}\right) = \operatorname{ch} \chi, \quad (31)$$

где  $\chi$  вещественно. Тогда (29) принимает вид

$$\left(\frac{R}{D} - \operatorname{ch} 2\chi + \frac{1}{\sqrt{D\bar{D}}}\right)^2 - 4\operatorname{sh}^2 \chi (\operatorname{ch}^2 \chi - \frac{1}{\sqrt{D\bar{D}}}) \leq 0, \quad (32)$$

откуда следует

$$\left| \operatorname{sh} \chi - \sqrt{\operatorname{ch}^2 \chi - \frac{1}{\sqrt{D\bar{D}}}} \right| \leq \sqrt{\frac{R}{D}} \leq \operatorname{sh} \chi + \sqrt{\operatorname{ch}^2 \chi - \frac{1}{\sqrt{D\bar{D}}}}. \quad (33)$$

Итак, мы получили два новых неравенства — (30) и (33). Из них можно вывести несколько дальнейших заключений.

Во-первых, из неравенства (30) следует, что если  $D \leq 0,25$ , то  $\bar{D}$  не ограничено; если же  $D > 0,25$ , то

$$\bar{D} \leq \frac{D}{(2\sqrt{D}-1)^2}. \quad (34)$$

Наоборот, если  $\bar{D} \leq 0,25$ , то  $D$  не ограничено, а если  $\bar{D} > 0,25$ , то

$$D \leq \frac{\bar{D}}{(2\sqrt{\bar{D}}-1)^2}. \quad (35)$$

Во-вторых, если  $D = \bar{D}$ , то  $\text{ch } \chi = \frac{1}{\sqrt{D}}$ ; следовательно,  $\text{ch}^2 \chi - \frac{1}{D} = 0$  и, согласно неравенству (33),

$$\frac{R}{D} = \text{sh}^2 \chi = \frac{1-D}{D},$$

откуда следует, что  $A = 0$ . Итак, равенство  $D = \bar{D}$  служит признаком отсутствия поглощения.

В-третьих, если  $D\bar{D} = 1$ , то  $\text{ch } \chi = \frac{1+D}{2\sqrt{D}}$  и  $\text{sh } \chi = \frac{1-D}{2\sqrt{D}}$ . Тогда неравенство (33) принимает вид

$$R \leq (1-D)^2. \quad (36)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cowrie Allan R., J. Opt. Soc. America, 47, 132 (1957).
2. Cowrie Allan R., J. Opt. Soc. America, 53, 425 (1963).
3. Кард П. Г., Оптика и спектроскопия, 9, 95 (1960).
4. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок (в печати).

Тартуский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11/X 1965

P. KARD

#### OPTILISTE KELMETE ENERGEETILISI KOEFITSIENTE SEOSTAVATEST VÖRRATUSTEST

Mitmekihiliste optiliste ke'mete teooria põhivalemite lihtsate teisenduste teel on tuletatud vörratused (23), (30) ja (33), kus  $R$ ,  $D$ ,  $A$  on kelme peegeldumise, läbilaskvuse ja neeldumise koefitsiendid;  $R'$  on peegeldumise koefitsient kelme teiselt küljelt ja  $\sim$  tähendab konjugeeritud (vt. [3]) kelmet. Eelduseks on neeldumise samamärgilisus kelme kõigis kihtides.

P. KARD

#### ÜBER DIE UNGLEICHUNGEN, DIE DIE ENERGETISCHEN KOFFIZIENTEN EINES OPTISCHEN MEHRSCICHTSYSTEMS MITEINANDER VERBINDEN

Drei Ungleichungen, (23), (30) und (33), werden mittels einfacher Umformungen der Grundformeln der Theorie der optischen Mehrschichtsysteme abgeleitet.  $R$  und  $R'$  bedeuten dort die Reflexionskoeffizienten an beiden Seiten des Schichtsystems,  $D$  ist der Durchlassgrad und  $A$  der Absorptionskoeffizient;  $\sim$  bedeutet das konjugierte Schichtsystem (s. [3]). Vorausgesetzt wird die Gleichheit des Vorzeichens der Absorption in allen Schichten des Systems.