EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.4.07

И. КЕЙС

ДВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

1. Уравнения движения тяжелого гиростата, закрепленного в точке, имеют вид [1]

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+k_3q-k_2r=Mg\,(e_3\gamma_2-e_2\gamma_3),\qquad \frac{d\gamma_1}{dt}=r\gamma_2-q\gamma_3\begin{pmatrix}1&2&3\\A&B&C\\p&q&r\end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Здесь $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ — радиус-вектор центра масс гиростата; $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ — вектор момента относительного количества движения, предполагаемый постоянным в теле гиростата; остальные обозначения имеют общепринятый смысл, а невыписанные уравнения системы (1.1) получаются из приведенной строки циклической заменой, указанной в круглых скобках.

При $e_2=0,\ k_2=0,\quad (B-C)\,e_1^2=(A-B)\,e_3^2,\ \ (B-C)\,k_1^2=(A-B)\,k_3^2$

уравнения (1.1) допускают частное решение

$$p=\omega_0(\lambda+\mu\cos\varphi),\qquad q=-\omega_0\sin\varphi,\qquad r=\omega_0(\mu-\lambda\cos\varphi)$$

$$\gamma_1=\frac{\delta_1}{2}\,(1-\cos2\varphi)+\delta_0\cos\varphi,\qquad \gamma_2=-\delta_0\sin\varphi+\frac{\delta_1}{2}\sin2\varphi,\qquad \gamma_3=\delta_1\cos\varphi \tag{1.2}$$

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0(t-t_0).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega_0^2\,D=Mg\delta_1\sqrt{e_1^2+e_3^2},\qquad D=\sqrt{(A-B)\,(B-C)}$$

$$\lambda\sqrt{A-C}=\sqrt{A-B},\qquad \mu\sqrt{A-C}=\sqrt{B-C}$$

$$\delta_0=K^{-1}[(A+C-B)\,\omega_0+m],\qquad \delta_1=\omega_0DK^{-1},\quad m^2=k_1^2+k_3^2$$

$$K^2=[A^2+AC+C^2-B\,(A+C)]\omega_0^2+2\,(A+C-B)\,\omega_0m+m^2.$$

Решению (1.2) соответствует регулярная нутация [2] гиростата

$$\psi = \psi_0 = \mathrm{const}, \quad \sin\psi_0 = 0, \quad \Theta = \varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0),$$

которая совпадает с движением, установленным для твердого тела Гриоли [3], но существует при начальных условиях, отличающихся от приведенных в [4].

2. Если рассмотреть уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил [5]

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + k_3 q - k_2 r = Mg\,(e_3\gamma_2 - e_2\gamma_3) + \frac{3g}{R}\,(C - B)\,\gamma_2\gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \\ p & q & r \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \tag{2.2}$$

для случая, когда выполняются соотношения

$$A'(1 - B'C')\,(D - A)\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,k_1 = A\,(1 + B'C')\,Mge_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix},$$

то аналогично [6] можно показать, что уравнения (2.1) и (2.2) допускают частное решение

$$\gamma_1 = A'\alpha^{-\frac{1}{2}}\,p + \frac{MRe_1}{3(D - A)}, \quad \gamma_2 = B'\alpha^{-\frac{1}{2}}\,q + \frac{MRe_2}{3(D - B)},$$

$$\gamma_3 = C'\alpha^{-\frac{1}{2}}\,r + \frac{MRe_3}{3(D - C)}. \tag{2.3}$$

Здесь введены обозначения

$$A' = \sqrt{\frac{u}{vw}}\,\mathrm{sgn}\,u, \quad B' = \sqrt{\frac{v}{uw}}\,\mathrm{sgn}\,v, \quad C' = \sqrt{\frac{w}{uv}}\,\mathrm{sgn}\,w, \quad D = A + B + C + \frac{2C}{w - 1}$$

$$\alpha = 3gR^{-1}, \quad Cu = C - A + Aw, \quad Cv = C - B + Bw$$

w — произвольная постоянная.

Переходя в (2.2) к безразмерным переменным

$$p' = \alpha^{-\frac{1}{2}}\,p, \quad q' = \alpha^{-\frac{1}{2}}\,q, \quad r' = \alpha^{-\frac{1}{2}}\,r, \quad \tau = \alpha^{+\frac{1}{2}}\,t,$$

получим, после замены (2.3), уравнения

$$A'\frac{dp'}{d\tau} + (C' - B')\,q'r' + \frac{MR}{3}\left(\frac{e_3}{D - C}\,q' - \frac{e_2}{D - B}\,r'\right) = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \\ A' & B' & C \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}.$$

Общее решение этих уравнений легко получить из формул [7] для p, q, r, если заменить в них A, B, C на A', B', C'; m_1, m_2, m_3 на

$$3^{-1}MR\,(D - A)^{-1}e_1, \quad 3^{-1}MR\,(D - B)^{-1}e_2, \quad 3^{-1}MR\,(D - C)^{-1}e_3$$

и p, q, r, t на p', q', r', τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., ПММ, **25**, вып. 1, 9—16 (1961).
2. Чикин В. А., Тр. Рязанск. радиотехнич. ин-та, **4**, 83—94 (1958).
3. Grioli G., Ann. math., **24**, No. 3—4, Ser. IV, 271—281 (1947).
4. Кейс И. А., Вестн. МГУ. Сер. I, Математика. Механика, № 1, 76—79 (1964).
5. Белецкий В. В., Докл. АН СССР, **113**, № 2, 287—290 (1957).
6. Stekloff V. A., Comptes Rendus, **135**, 526—528 (1902).
7. Volterra V., Acta Mathematica, **22**, 201—358 (1898—1899).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/V 1965

I. KEIS

ÜHE KINNISPUNKTIGA GÜROSTAADI LIIKUMISVÕRRANDITE KAKS ERILAHENDIT

Esimene erilahend on Grioli-Tšikini lahendi üldistuseks; teine erilahend, mis sisaldab Steklovi integraale, vastab ühe kinnispunktiga gürostaadi vaba liikumise Volterra lahendile.

I. KEIS

TWO SOLUTIONS OF THE EQUATIONS CORRESPONDING TO THE MOTION OF A GYROSTAT WITH A SINGLE POINT FIXED

The first precise partial solution presented in the paper is the generalization of the Grioli-Chikin's one, while the second, obtaining three partial integrals of the Stekloff-type, comes to the modification of Volterra's solution for the spontaneous motion of a gyrostat.