EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.4.04

*С. УЛЬМ*

# О КЛАССЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ СО СКОРОСТЬЮ СХОДИМОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Пусть дано уравнение

$$P(x) \equiv x - \Phi(x) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(x)$ — нелинейный оператор, переводящий линейное нормированное пространство $X$ в себя. В дальнейшем используем следующие обозначения:

$$P(x', x''), \quad \Phi(x'; x''), \quad P(x', x'', x'''), \quad \Phi(x', x'', x''')$$

— аналоги разделенных разностей [3, 5] соответственно первого и второго порядков для операторов $P(x)$ и $\Phi(x)$;

$E$ — единичный оператор пространства $X$;

$$u_n = \Phi(x_n); \qquad v_n = \Phi(u_n) = \Phi(\Phi(x_n));$$

$$\Delta_n = [P(x_n, u_n)]^{-1} = [E - \Phi(x_n, u_n)]^{-1};$$

$$V_n = \Delta_n P(x_n, u_n, v_n) = -\Delta_n \Phi(x_n, u_n, v_n); \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

$$y_n = x_n - \Delta_n P(x_n) = x_n + [E - \Phi(x_n, u_n)]^{-1} (u_n - x_n).$$

Для построения класса итерационных методов допустим, что нам известно приближение $x_n$ к решению $x^*$ уравнения (1). Используем аналог интерполяционной формулы Ньютона [3] в следующем виде:

$$P(x) = P(x_n) + P(x_n, u_n)(x - x_n) + P(x_n, u_n, v_n)(x - x_n)(x - u_n) + R_n, \tag{2}$$

где

$$R_n = [P(x, x_n, u_n) - P(x_n, u_n, v_n)](x - x_n)(x - u_n). \tag{3}$$

Отбрасывая в формуле (2) остаточный член $R_n$, рассмотрим вместо уравнения (1) приближенное уравнение

$$P(x_n) + P(x_n, u_n)(x - x_n) + P(x_n, u_n, v_n)(x - x_n)(x - u_n) = 0. \tag{4}$$

Введем в уравнение (4) вещественный параметр $\alpha$ и выпишем это уравнение в виде

$$P(x_n) + [P(x_n, u_n) - \alpha P(x_n, u_n, v_n)(x - x_n)](x - x_n) + (1 + \alpha) P(x_n, u_n, v_n)(x - x_n)^2 + P(x_n, u_n, v_n)(x - x_n)(x_n - u_n) = 0. \tag{5}$$

Заменим в уравнении (5) элемент $x-x_n$ в квадратных скобках и в третьем и четвертом слагаемых элементом

$$y_n - x_n = -\Delta_n P(x_n). \tag{6}$$

Отметим, что элемент $y_n$ является приближением к решению $x^*$ уравнения (1) по методу Стеффенсена.*

Вместо уравнения (5) получается теперь следующее линейное уравнение:

$$P(x_n) + [P(x_n, u_n) - \alpha P(x_n, u_n, v_n)(y_n - x_n)](x - x_n) + \\ + (1+\alpha) P(x_n, u_n, v_n)(y_n - x_n)^2 + P(x_n, u_n, v_n)(y_n - x_n)(x_n - u_n) = 0 \tag{7}$$

или (применив к уравнению (7) слева оператор $\Delta_n$)

$$-(y_n - x_n) + [E - \alpha V_n(y_n - x_n)](x - x_n) + \\ + (1+\alpha) V_n (y_n - x_n)^2 + V_n(x_n - u_n)(y_n - x_n) = 0. \tag{8}$$

Решив уравнение (8) относительно $x$, берем найденное решение в качестве нового приближения $x_{n+1}$ к решению $x^*$ уравнения (1).

Итак, мы приходим к следующему классу итерационных методов для приближенного решения уравнения (1):

$$x_{n+1} = x_n + [E - \alpha V_n(y_n - x_n)]^{-1}[E - (1+\alpha) V_n(y_n - x_n) - \\ - V_n(x_n - u_n)](y_n - x_n), \tag{9}$$

где $n = 0, 1, \ldots$; $x_0$ — начальное приближение к решению $x^*$ уравнения (1).

Докажем теорему, дающую качественную характеристику о скорости сходимости методов класса (9). Интересно было бы доказать более точные теоремы о сходимости методов (9). Обозначим:

$$m = [1 - |\alpha| BHd_0(1 + BHMd_0)]^{-1/2}[BKM^3 + \\ + |1+\alpha| B^2H^2M(1 + BHMd_0) + B^2H^2M^2]^{1/2};$$

$$\beta_1 = \max\{m^2 d_0^2; M\}; \qquad \beta_2 = \max\{m^2 d_0^2; M; M^2\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема: *Пусть*

1° *уравнение* (1) *имеет решение* $x^*$ *в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant d_0; \tag{10}$$

2° *для каждого* $x', x''$ *из сферы*

$$\|x - x_0\| \leqslant (1 + \beta_1) d_0 \tag{11}$$

* О методе Стеффенсена для решения алгебраических и трансцендентных уравнений см. [2, 6].

*справедливы оценки:*

$$\|[P(x', x'')]^{-1}\| = \|[E - \Phi(x', x'')]^{-1}\| \leqslant B; \qquad \| \Phi(x', x'')\| \leqslant M;$$

3° *для каждого* $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{\text{IV}}$ *из сферы*

$$\|x - x_0\| \leqslant (1 + \beta_2)\, d_0 \tag{12}$$

*справедливы оценки:*

$$\|P(x', x'', x''')\| = \|\Phi(x', x'', x''')\| \leqslant H;$$

$$\|P(x', x'', x''') - P(x'', x''', x^{\text{IV}})\| = \|\Phi(x', x'', x''') - \Phi(x'', x''', x^{\text{IV}})\| \leqslant$$
$$\leqslant K\|x' - x^{\text{IV}}\|;$$

4° $$|\alpha|\, BHd_0 + BM[M^2K + BH^2(M + |1+\alpha| + |\alpha|)]d_0^2 +$$
$$+ |1 + \alpha|\, B^3H^3M^2d_0^3 < 1.$$

*Тогда последовательность* (9) *сходится к решению* $x^*$ *уравнения* (1) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{m}\,(md_0)^{3^n} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Доказательство. Используем принцип полной индукции. На основании условия 1° оценка (13) справедлива при $n = 0$. Покажем, что при переходе от индекса $n$ к индексу $n+1$ оценка (13) остается справедливой. Обозначим

$$G_n^{-1}(\alpha) = [E - \alpha V_n(y_n - x_n)]^{-1}.$$

Тогда по формуле (9)

$$x^* - x_{n+1} = x^* - x_n - G_n^{-1}(\alpha)[E - (1+\alpha)\, V_n(y_n - x_n) -$$
$$- V_n(x_n - u_n)](y_n - x_n) = G^{-1}(\alpha)\{[E - \alpha V_n(y_n - x_n)](x^* - x_n) -$$
$$- [E - (1+\alpha)\, V_n(y_n - x_n) - V_n(x_n - u_n)](y_n - x_n)\} =$$
$$= G_n^{-1}(\alpha)[x^* - x_n - \alpha V_n(y_n - x_n)\,(x^* - x_n) - (y_n - x_n) +$$
$$+ (1+\alpha)\, V_n(y_n - x_n)^2 + V_n(x_n - u_n)\,(y_n - x_n)] =$$
$$= G_n^{-1}(\alpha)[x^* - y_n - \alpha V_n(y_n - x_n)\,(x^* - x_n) +$$
$$+ (1+\alpha)\, V_n(y_n - x_n)^2 + V_n(x_n - u_n)\,(y_n - x_n)] =$$
$$= G_n^{-1}(\alpha)[x^* - y_n - (1+\alpha)\, V_n(y_n - x_n)\,(x^* - y_n) +$$
$$+ V_n(x^* - u_n)\,(y_n - x_n)]. \tag{14}$$

На основании интерполяционной формулы Ньютона

$$0 = \Delta_n P(x^*) = \Delta_n P(x_n) + x^* - x_n + V_n(x^* - x_n)\,(x^* - u_n) + R \tag{15}$$

и

$$0 = \Delta_n P(x^*) = \Delta_n P(x_n) + x^* - x_n + Q_n^*, \tag{16}$$

где

$$R_n^* = \Delta_n[P(x^*, x_n, u_n) - P(x_n, u_n, v_n)](x^* - x_n)(x^* - u_n) \quad (17)$$

и

$$Q_n^* = \Delta_n P(x^*, x_n, u_n)(x^* - x_n)(x^* - u_n). \quad (18)$$

Поскольку $\Delta_n P(x_n) = x_n - y_n$, то на основании формул (15) и (16) получим

$$x^* - y_n = -V_n(x^* - x_n)(x^* - u_n) - R_n^*; \quad (19)$$

$$x^* - y_n = -Q_n^*; \quad (20)$$

$$y_n - x_n = x^* - x_n + Q_n^*. \quad (21)$$

Заменяя в формуле (14) $x^* - y_n$ и $y_n - x_n$ по формулам (19), (20) и (21), получим

$$\begin{aligned} x^* - x_{n+1} &= [E - \alpha V_n(x^* - x_n) - \alpha V_n Q_n^*]^{-1}[-V_n(x^* - x_n)(x^* - u_n) - \\ &- R_n^* + (1+\alpha) V_n(x^* - x_n + Q_n^*) Q_n^* + V_n(x^* - u_n)(x^* - x_n + Q_n^*)] = \\ &= [E - \alpha V_n(x^* - x_n) - \alpha V_n Q_n^*]^{-1}[-R_n^* + (1+\alpha) V_n(x^* - x_n) Q_n^* + \\ &+ (1+\alpha) V_n Q_n^{*2} + V_n(x^* - u_n) Q_n^*]. \end{aligned} \quad (22)$$

По условиям 2° и 3°

$$\|V_n\| \leqslant BH; \quad (23)$$

$$\|R_n^*\| \leqslant BK\|x^* - x_n\| \, \|x^* - u_n\| \, \|x^* - v_n\|; \quad (24)$$

$$\|Q_n^*\| \leqslant BH\|x^* - x_n\| \, \|x^* - u_n\|. \quad (25)$$

Обозначим $\|x^* - x_i\| \leqslant d_i$. Так как

$$\begin{aligned} \|x^* - u_n\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x_n)\| = \|\Phi(x^*, x_n)(x^* - x_n)\| \leqslant \\ \leqslant M\|x^* - x_n\| = Md_n \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} \|x^* - v_n\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(u_n)\| = \|\Phi(x^*, u_n)(x^* - u_n)\| \leqslant \\ \leqslant M\|x^* - u_n\| = M^2 d_n, \end{aligned} \quad (27)$$

то по (24), (25), (26) и (27)

$$\|R_n^*\| \leqslant BKM^3 d_n^3 \quad (28)$$

и

$$\|Q_n^*\| \leqslant BHMd_n^2. \quad (29)$$

По теореме Банаха

$$\begin{aligned} \|[E - \alpha V_n(x^* - x_n) - \alpha V_n Q_n^*]^{-1}\| \leqslant (1 - |\alpha| BHd_n - |\alpha| B^2H^2Md_n^2)^{-1} \leqslant \\ \leqslant (1 - |\alpha| BHd_0 - |\alpha| B^2H^2Md_0^2)^{-1} = A_0(\alpha), \end{aligned} \quad (30)$$

поскольку по условию 4°

$$|\alpha|\, BHd_0 + |\alpha|\, B^2H^2Md_0^2 < 1.$$

Следовательно, на основании формулы (22), используя оценки (23), (28), (29) и (30), получим

$$d_{n+1} \leqslant A_0(\alpha)\,(BKM^3 + |1+\alpha|\, B^2H^2M + |1+\alpha|\, B^3H^3M^2d_n + B^2H^2M^2)\, d_n^3 \leqslant$$

$$\leqslant m^2 d_n^3 \leqslant \frac{1}{m}\,(md_0)^{3^n} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{31}$$

т. е. оценка (13) справедлива при индексе $n+1$. Так как по условию 4° $md_0 < 1$, то, переходя в формуле (31) к пределу $(n \to \infty)$, найдем, что $x_n \to x^*$.

Нам осталось еще показать принадлежность элементов $x_n$, $u_n$, $v_n$ к требуемым сферам (11) или (12). Это обстоятельство следует из неравенств

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|x_n - x^*\| + \|x^* - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m}\,(md_0)^{3^n} + d_0 \leqslant m^2 d_0^3 + d_0 = d_0\,(1 + m^2 d_0^2)$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{32}$$

$$\|u_n - x_0\| \leqslant \|\Phi(x_n) - \Phi(x^*) + x^* - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi(x^*, x_n)\,(x^* - x_n)\| + \|x^* - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant Md_0 + d_0 = (1+M)\, d_0$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{33}$$

$$\|v_n - x_0\| = \|\Phi(\Phi(x_n)) - \Phi(x^*) + x^* - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi(x^*, u_n)\,(x^* - u_n)\| + \|x^* - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi(x^*, u_n)\|\, \|\Phi(x^*, x_n)\|\, \|x^* - x_n\| + \|x^* - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant M^2 d_0 + d_0 = (1 + M^2)\, d_0 \tag{34}$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Теорема доказана.

Для приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений

$$f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0 \tag{35}$$

методы (9) имеют вид

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n, u_n) - (1+\alpha)\, f(x_n, u_n, v_n)\,(y_n - x_n) - f(x_n, u_n, v_n)\,(x_n - u_n)}{f(x_n, u_n) - \alpha\, f(x_n, u_n, v_n)\,(y_n - x_n)}\,(y_n - x_n), \tag{36}$$

где

$$y_n - x_n = -\frac{f(x_n)}{f(x_n, u_n)}, \qquad u_n = \varphi(x_n), \qquad v_n = \varphi(u_n).$$

Методы класса (9, 36) имеют тот же порядок сходимости, что и дифференциальные методы, рассмотренные в работах Р. Людвига [4] и Ю. Каазика [1]. Зато их практическое применение часто удобнее, так как на каждом шагу итеративного цикла требуется только вычисление трех значений функции (методы [1, 4] требуют на каждом шагу вычисления $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f''(x_n)$). Отметим еще, что методы (9, 36) обобщают метод Стеффенсена для улучшения итерации [2, 6].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Каазик Ю. А., Докл. АН СССР, **112**, № 4, 579—582 (1957).
2. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, 1963.
3. Сергеев А. С., Сибирский матем. ж., **2**, № 2, 282—289 (1961).
4. Ludvig R., Z. angew. Math. und Mech., **34**, H. 6, 210—225 (1954).
5. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., **43**, H. 1/2, 1—8 (1963).
6. Steffensen J. F., Skand. Aktuar. Tidskr., **16**, 64—72 (1933).


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
29/IX 1964

*S. ULM*

## ÜHEST KOLMANDAT JÄRKU KOONDUVUSKIIRGUSEGA ITERATSIOONMENETLUSTE KLASSIST

Kasutades üldistatud Newtoni interpolatsioonivalemit [3], tuletatakse mittelineaarse operaatorvõrrandi (1) lahendamiseks operaatori esimest ja teist järku diferentssuhteid ning reaalset parameetrit $\alpha$ sisaldav iteratsioonmenetluste klass (9, 36). Tõestatakse teoreem klassi (9, 36) menetluste koonduvusest võrrandi (1) lahendiks.

Vaadeldud menetlused üldistavad Steffenseni menetlust [2, 6] harilike iteratsioonide koonduvuse parandamiseks.

*S. ULM*

## ÜBER EINE KLASSE VON ITERATIONSVERFAHREN MIT DER KONVERGENZSCHNELLIGKEIT DRITTER ORDNUNG

Es wird mittels der verallgemeinerten Newtonschen Interpolationsformel [3] für die Lösung einer nichtlinearen Operatorgleichung (1) eine Klasse von Iterationsverfahren (9, 36), die die ersten und zweiten Steigungen des Operators und einen reellen Parameter $\alpha$ enthalten, abgeleitet.

Es wird ein Satz über die Konvergenz von Iterationsverfahren (9, 36) bewiesen. Diese Verfahren sind Verallgemeinerungen des Verfahrens von Steffensen [2, 6] zur Konvergenzverbesserung von Iterationen.