EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 4

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ МАКСИМУМА НА ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. ЯГЕЛЬ

В настоящей статье изучаются свойства функции $\Phi(t)=\max\limits_{\vec{x}(t)\in\Omega_t}\vec{c}\cdot\vec{x}(t)$, где $\Omega_t=\{\vec{x}(t):(\vec{a}_1+t\vec{d})\,x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\vec{a}_jx_j=\vec{b},\ \vec{x}\geqslant 0\}$, на определенном подмножестве множества вещественных чисел. Рассматривается приближенное построение функции $\Phi(t)$ на этом подмножестве. По содержанию данная работа является продолжением статьи автора [1] и работы Карабегова [2].

§ 1. Введение и основные понятия

Параметрическая задача рассматриваемого класса ставится следующим образом: для каждого числа t из заданного множества вещественных чисел $T(t)$ требуется определить $\max\limits_{\vec{x}(t)\in\Omega_t}\vec{c}\cdot\vec{x}(t)$, где $\Omega_t=\{\vec{x}(t):(\vec{a}_1+t\vec{d})\,x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\vec{a}_jx_j=\vec{b},\ \vec{x}\geqslant 0\}$. Для большинства задач, возникающих из практики, множество $T(t)$ является сегментом, но в целях более содержательного исследования этой задачи в первой стадии множество $T(t)$ примем равным множеству вещественных чисел (последнее обозначим через R), а затем переходим на определенное подмножество множества R, которое естественным образом соответствует природе поставленной параметрической задачи.

Определим функцию максимума $\Phi(t)$ следующим образом:

$$\Phi(t)=\begin{cases} +\infty & \text{, если } \max\limits_{\vec{x}\in\Omega_t}\vec{c}\cdot\vec{x}(t) \text{ неограничен на множестве } \Omega_t \\ \max\limits_{\vec{x}\in\Omega_t}\vec{c}\cdot\vec{x}(t) & \text{, если } \max\limits_{\vec{x}\in\Omega_t}\vec{c}\cdot\vec{x}(t) \text{ существует на множестве } \Omega_t \\ -\infty & \text{, если } \Omega_t=\Theta \quad (\Theta \text{ — символ пустого множества}). \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\Phi(t)$ определена для всякого $t \in R$, хотя некоторые ее значения могут быть и бесконечны. Таким образом, если для заданной задачи построена функция $\Phi(t)$, то при любом множестве $T(t) \subset R$, получение решения соответствующей задачи не представляет труда.

Введем следующие множества:

$$L_t = \{t : \Omega_t \neq \Theta\}$$

$$O_t = \{t : \Omega_t \neq \Theta, \sup_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \vec{c} \cdot \vec{x}(t) < +\infty\}$$

$$\Psi_t = \{\vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + t\vec{d})x_1 + \sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{0}, \vec{c} \cdot \vec{x} = 1, \vec{x} \geqslant \vec{0}\}$$

$$N_t = \{t : \Psi_t \neq \Theta\}.$$

В статье [1] доказывается, что множества L_t и N_t связные, и множество $O_t = L_t \setminus N_t$ (теоретико-множественная разность).

Рассмотрим более общую задачу параметрического программирования, где $\vec{c}(t) = (c_1 + ct, c_2, \ldots, c_n)$, т. е. при $c = 0$ имеем вышеприведенную задачу. Аналогично определению множеств O_t, Ψ_t, N_t определяем соответствующие множества O_t^*, Ψ_t^* и N_t^*. Из доказательств теорем 1, 3 и 4 статьи [1] видно, что множество N_t^* связное и $O_t^* = L_t \setminus N_t^*$. Так как эти задачи в основных чертах не отличаются друг от друга, то в дальнейшем не будем их различать, опускаем верхний индекс у $\Phi^*(t)$, O_t^*, N_t^* и имеем в виду, что $\Phi(t) = \max_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \vec{c}(t) \cdot \vec{x}(t)$ при $t \in O_t$.

Из сказанного следует, что параметрическую задачу вышеуказанного класса естественно рассмотреть на множестве O_t, и по существу $\Phi(t)$ надо построить на этом множестве. Корректность постановки параметрической задачи тем и определяется, насколько совпадают множества $T(t)$ и O_t. Для корректно поставленной задачи всегда должен быть $T(t) \subset O_t$. Именно последнее обстоятельство является одной из причин сопоставления параметрической задачи на множестве O_t с параметрической задачей на множестве $T(t)$.

Отметим, что множество O_t не всегда связное, ограниченное и замкнутое. По двум последним причинам мы не исследуем поведение функции $\Phi(t)$ на всем множестве O_t, а на некотором его «стандартном» подмножестве O_{tC}, которое определим ниже.

Характеристикой некоторого множества $G \subset R$ называем минимальное число связных множеств, теоретико-множественной суммой которых является множество G; характеристику множества G обозначим $H(G)$, если $G = \Theta$, то считаем $H(G) = 0$. Очевидно, что $H(O_t) \leqslant 2$ для всех параметрических задач рассматриваемого класса.

Замкнутое и ограниченное множество $G \subset O_t$ называем стандартным множеством, если $H(G) = H(O_t)$. Как уже сказано, обозначим стандартное множество через O_{tC}.

Если при фиксированном t координаты $x_{i_1}(t), \ldots x_{i_m}(t)$ есть базисное решение системы

$$\begin{cases} (\vec{a}_1 + t\vec{d})\, x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b} \\ \vec{x} \geqslant 0, \end{cases} \tag{0}$$

то соответствующие базисные индексы, соответствующую матрицу и обратную матрицу, соответствующие координаты вектора $\vec{c}(t)$ обозначим через $J, A_J(t), A_J^{-1}(t)$ и соответственно через $\vec{c}_J(t)$.

Пусть $\omega_j(t) = c_j(t) - \vec{c}_J(t) A_J^{-1}(t) \vec{a}_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Если существует оптимальное решение задачи линейного программирования, то всегда существует такое оптимальное базисное решение, что при $j \epsilon \mid J \omega_j(t) \leqslant 0$ (для $j \in J$ всегда $\omega_j(t) = 0$). Так как при вырожденных задачах может существовать базисное оптимальное решение, не удовлетворяющее условию $\omega_j(t) \leqslant 0$ для $j \in \mid J$, то в дальнейшем оптимальность базисного решения будем понимать именно в смысле вышеуказанной критерии.

В дальнейшем нам понадобится приведенная в статье [1]

Лемма 1: Если система $\sum\limits_{j=1}^{s} \vec{a}_j y_j = \vec{b}$, $\vec{y} \geqslant 0$ не совместна, то найдется $\mu > 0$ такое, что при любом $\vec{\Delta}$, где $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m'} |\Delta_i| \leqslant \mu$, не совместна и система $\sum\limits_{j=1}^{s} \vec{a}_j y_j = \vec{b} + \vec{\Delta}$, $\vec{y} \geqslant 0$.

Пусть t_1, $t_2 \in L_t$ такие, что $\vec{x}(t_1) \in \Omega_{t_1}$, $\vec{x}(t_2) \in \Omega_{t_2}$, $x_1(t_1) > 0$ и $x_1(t_2) > 0$, тогда из доказательства теоремы 1 статьи [1] видно, что для любого $t \in [t_1; t_2]$

$$x_j(t) = \frac{\lambda \cdot x_1(t_2) \cdot x_j(t_1) + (1-\lambda) \cdot x_2(t_1) \cdot x_j(t_2)}{\lambda \cdot x_1(t_2) + (1-\lambda) \cdot x_1(t_1)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

$\vec{x}(t) \in \Omega_t$, $x_1(t) > 0$, где $\lambda \in [0; 1]$ такое, что $t = \lambda \cdot t_1 + (1 - \lambda) \cdot t_2$.

Из формул (1) вытекает справедливость следующих соотношений:

При любом $t \in [t_1; t_2]$

$$\max\{x_j(t_1);\, x_j(t_2)\} \geqslant x_j(t) \geqslant \min\{x_j(t_1);\, x_j(t_2)\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

и если $x_j(t_1) \neq x_j(t_2)$, то при каждом $t \in (t_1; t_2)$

$$\max\{x_j(t_1);\, x_j(t_2)\} > x_j(t) > \min\{x_j(t_1);\, x_j(t_2)\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

Через Q обозначим выпуклый многогранный конус, который получается при помощи ограничений параметрической задачи следующим образом: $Q = \{\vec{y} : \vec{y} = \sum\limits_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_j \geqslant 0\}$.

§ 2. Приведенная форма параметрической задачи

В начале покажем, что на любом O_{tC} целевая функция $\vec{c}(t)\cdot\vec{x}(t)$ можно привести к виду $\vec{c}'(t)\cdot\vec{x}(t)$, где либо $\vec{c}'(t)=(0,1,0,\ldots,0)$, либо $\vec{c}'(t)=(c_1+ct,0\ldots0)$. Для этого, прежде всего, необходима следующая

Теорема 1: *Если* $H(O_t)\neq 0$, *то при любом* O_{tC} $\inf\limits_{t\in O_{tC}}\Phi(t)>-\infty$.

Доказательство: Если $\vec{b}\in Q$, то справедливость теоремы очевидна. Пусть $\vec{b}\,\bar{\in}\,Q$. По определению множества O_{tC} $\min\limits_{t\in O_{tC}}(t)$ и $\max\limits_{t\in O_{tC}}(t)$ существуют, обозначим эти значения через t_1 и соответственно через t_2. Так как $\vec{b}\,\bar{\in}\,Q$, то можем применить соотношения (1) и (2), из последних вытекает, что $\inf\limits_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\Phi(t)>-\infty$. Из соотношения $O_{tC}\subset[t_1;t_2]$ следует, что $\inf\limits_{t\in O_{tC}}\Phi(t)\geqslant\inf\limits_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\Phi(t)$. Теорема доказана.

Примечание: Если $\vec{b}\in Q$, то очевидно $\inf\limits_{t\in O_t}\Phi(t)>-\infty$, если только $O_t\neq\Theta$. Но для $\vec{b}\,\bar{\in}\,Q$ такое утверждение не верно. Пусть A регулярная матрица. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{d}$ можем выбирать так, что $A^{-1}\vec{b}>0$, $(A^{-1}\vec{d})_i<0$ $(i=2,3,\ldots,m)$ и $(A^{-1}\vec{d})_1=0$; $A=A(t)|_{t=0}$; пусть $\vec{c}=(-1,-1,\ldots,-1)$. $A^{-1}(t)\vec{b}=$

$$=A^{-1}(0)\vec{b}-\frac{t}{1+t\cdot[A^{-1}(0)\vec{d}]_1}\cdot[A^{-1}(0)\vec{b}]_1\cdot A^{-1}(0)\vec{d}=\vec{x}(0)-t\cdot x_1(0)\cdot\vec{d}',$$

где $\vec{d}'=A^{-1}(0)\vec{d}$.

Очевидно, что при $t>0$ имеем $t\in O_t$ и $\inf\limits_{t>0}\Phi(t)=-\infty$, тем более и $\inf\limits_{t\in O_t}\Phi(t)=-\infty$.

Далее рассмотрим два случая, где в первом в целевой функции $c_2=\ldots=c_n=0$ и во втором — по крайней мере одно $c_j\neq 0$, $j\geqslant 2$, можем считать, что $c_2\neq 0$.

А. Координата $c_2\neq 0$.

Обозначим $\inf\limits_{t\in O_{tC}}\Phi(t)-1=a$. Произведем замену переменных, полагая, что $y(t)=\vec{c}(t)\cdot\vec{x}-a$. Очевидно, что при любом $t\in O_{tC}$ $\max y(t)>0$.

Из условия $c_2 \neq 0$ имеем $x_2 = \dfrac{y + a - \sum\limits_{j=3} c_j x_j - (c_1 + tc)x_1}{c_2}$. Подставляем x_2 в систему (0), добавляем условие $x_2 \geqslant 0$ (в новых переменных) и переменную x_{n+1} для получения равенства, тогда новая система имеет такой же вид, как система (0), а целевая функция $\vec{c}'(t) \cdot \vec{x}(t) = = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_{n+1}$.

Не введя новых обозначений, мы в дальнейшем под задачей (A) подразумываем следующее: для любого $t \in O_{tC}$ найти $\max\limits_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} x_2(t)$ (т. е. $\Phi(t) = \max\limits_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} x_2(t)$, если $t \in O_{tC}$).

Для задачи (A) всегда в оптимальном базисном решении $x_2(t) > 0$, т. е. $2 \in J$. Если $j \in\!\!| \, J$, то имеем $\omega_j(t) = 0 - 1 \cdot [A_J^{-1}(t)\vec{a}_j]_2 = -a'_{2j}(t)_j$; следовательно, при условии $a'_{2j}(t) \geqslant 0$, $j \in\!\!| \, J$, базисное решение задачи (A) оптимальное.

Отметим, если задача (A) получена из задачи, где $c_j \neq 0$ $(j \geqslant 2)$, то на множестве O_{tC} $\Phi(t) = \Phi'(t) - a$, где $\Phi'(t)$ функция максимума исходной задачи.

В. Координаты $c_j = 0$, $(j = 2, 3, \ldots, n)$

В данном случае мы соответствующую задачу параметрического программирования обозначим (B):

Отметим, что $1 \in\!\!| \, J$ может быть только при условиях $\vec{b} \in Q$ и $c_1 + tc \leqslant 0$. В этом случае оптимальным решением задачи (B) является для всех $t \in O_{tC} \cap \{t : c_1 + tc \leqslant 0\}$ любое решение системы (0), в котором $x_1(t) = 0$.

Д. Урезанная задача

Урезанной задачей (D) называем следующую задачу: найти

$$\max \sum_{j=2}^{n} c_j x_j \quad \text{при условиях} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b} \\ &x_j \geqslant 0 \; (j = 2, \ldots, n). \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Эту задачу придется рассмотреть при условии $\vec{b} \in Q$. Будем считать, что задача (D) имеет оптимальное решение с оптимальным значением r, ибо в противном случае множество $O_t = \Theta$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2: *Параметрическая задача линейного программирования вышеуказанного класса на множестве O_{tC} либо задача (B), либо приводится к задаче (A).*

Задачи (A) и (B) называем приведенными задачами на множестве O_{tC}, в дальнейших параграфах мы рассмотрим только эти задачи. Если в дальнейшем целевая функция имеет вид $\vec{c}(t) \cdot \vec{x}$, то мы понимаем либо $\vec{c}(t) = (c_1 + tc, 0, \ldots, 0)$, либо $\vec{c}(t) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$; сказанное относится и к урезанной задаче соответствующей приведенной задачи.

§ 3. Ограниченность и непрерывность функции $\Phi(t)$

Нам необходима следующая

Лемма 2: *Если* $\vec{b} \overline{\in} Q$ *и* $O_t \neq \Theta$, *то* $\inf\limits_{t \in O_{tC}} x_1^{(0)}(t) > 0$,

где $x_1^{(0)}(t) = \min\limits_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} x_1(t)$.

Доказательство: Из $\vec{b} \overline{\in} Q$ следует, что

$\varrho(Q, \vec{b}) = \inf\limits_{\vec{y} \in Q} \| \vec{y} - \vec{b} \| > 0$.

При любом допустимом решении $x_1(t)\,(\vec{a}_1 + t\vec{d}) = \vec{b} - \sum\limits_{j=2}^{n} x_j(t)\,\vec{a}_i$ и

$\|x_1(t)(\vec{a}_1 + t\vec{d})\| = \|\vec{b} - \sum\limits_{j=2}^{n} x_j(t) \cdot \vec{a}_j\| \geqslant \varrho(Q, \vec{b})$. Следовательно,

$x_1(t) \geqslant x_1^{(0)}(t) \geqslant \dfrac{\varrho(Q, \vec{b})}{\|\vec{a}_1 + t\vec{d}\|} > 0$ при каждом $t \in O_t$. Из ограниченности множества O_{tC} вытекает справедливость полученного неравенства для всех $t \in [\min\limits_{t \in O_{tC}}(t);\ \max\limits_{t \in O_{tC}}(t)]$. Этим и завершается доказательство леммы.

Теперь мы в состоянии доказать следующую

Теорему 3 (теорема ограниченности). *Если* $O_t \neq \Theta$, *то при любом* O_{tC} $\sup\limits_{t \in O_{tC}} \Phi(t) < +\infty$.

Доказательство: Если O_{tC} конечное множество, то справедливость теоремы очевидна. Пусть O_{tC} бесконечное множество и существует $t_0 \in O_{tC}$ такое, что в некоторой ее окрестности $U(t_0)$ $\sup\limits_{t \in U(t_0)} \Phi(t) = +\infty$, где под окрестностью точки t_0 понимаем любое связное множество, содержащееся эту точку. Можем считать, что $U(t_0)$ является бесконечным множеством и $U(t_0) \subset O_{tC}$. Найдется последовательность $\{t_k\} \subset U(t_0)$ такая, что $\Phi(t_k) \geqslant k$ для любого натурального k и $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = t_0$. Начиная с некоторого k_0, должно быть, что при $k \geqslant k_0$ координата $x_1(t_k) > 0$; если $\vec{b} \overline{\in} Q$, то это следует из леммы 2; если же $b \in Q$, то имели бы $\sum\limits_{j=2}^{n} x_j(t_k)\,c_j \leqslant r$. Пусть $\{t_k\} = \{t_k^+\} \cup \{t_k^-\}$, где $t_k^+ > t_0$ и $t_k^- < t_0$.
Покажем, что подпоследовательности $\{t_k^+\}$ и $\{t_k^-\}$ не могут быть одновременно бесконечными. Предполагаем противоположное. Выбираем $t_{k_1}^+$ и $t_{k_2}^-$ такие, что $k_1 \geqslant k$ и $k_2 \geqslant k$, где $k \geqslant k_0$ произвольное фиксированное натуральное число. Пусть соответствующие оптимальные решения $\vec{x}(t_{k_1}^+)$ и $\vec{x}(t_{k_2}^-)$. Так как $x_1(t_{k_1}^+) > 0$ и $x_1(t_{k_2}^-) > 0$, то применение соотношений (1) и (2) для задачи (A) дает, что $x_2(t) \geqslant k$ при любом $t \in [t_{k_2}^-;\ t_{k_1}^+]$. Очевидно, для задачи (B) $\sup\limits_{t \in O_{tC}} \Phi(t) = +\infty$

только в области $\{t : c_1 + tc > 0\}$. Поэтому можем требовать, что $c_1 + c \cdot t^+_{k_1} > 0$ и $c_1 + c \cdot t^-_{k_2} > 0$, но тогда применение (1) и (2) дает, что

$$(c_1 + c \cdot t)\, x_1(t) \geqslant (c_1 + ct) \cdot \min\{x_1(t^+_{k_1});\ x_1(t^-_{k_2})\} \geqslant$$
$$\geqslant k \cdot \min\{c_1 + c \cdot t^+_{k_1};\ c_1 + c \cdot t^-_{k_2}\}.$$

Значит должен быть $\Phi(t_0) = +\infty$. Из полученного противоречия вытекает, что бесконечным может быть только одна подпоследовательность.

Рассмотрим последовательность $\{t^-_k\}$. Пусть $\{J\}$ множество, элементами которого являются такие множества базисных индексов, при которых $1 \in J$ и для некоторого t существует $A_J^{-1}(t)$. Очевидно, найдется $t' < t_0$ такое, что для любого $J \in \{J\}$ существует $A_J^{-1}(t')$ и сегмент $[t'; t_0] \subset O_{tC}$. Пусть $\{J\}_0 \subset \{J\}$ такое подмножество, что:

1° Для каждого $J \in \{J\}_0$ существует $t_J \in [t'; t_0)$ такое, что при любом $t \in [t_J; t_0)$ решение $A_J^{-1}(t) \cdot \vec{b}$ оптимальное.

2° При $t = t_0$ не существует $A_J^{-1}(t_0)$.

3° Если $J \,\bar{\in}\, \{J\}_0$, то для него не выполняются 1° и 2°.

Множество $\{J\}_0 \neq \Theta$, так как $U(t_0)$ бесконечное множество. Обозначим $\max\limits_{J \in \{J\}_0} t_J = t^*$, очевидно $t^* < t_0$. Можем считать, что при $k \geqslant k_0$ $t_k \in [t^*; t_0)$. Из формул 8 [1] следует:

$$x_i(t) = \begin{cases} [A_J^{-1}(t)\vec{b}]_i = x_i(t^*) - \gamma \dfrac{x_1(t^*) d_i'}{1 + \gamma d_1'}, & \text{если } i \in J, \\ 0, & \text{если } i \,\bar{\in}\, J, \end{cases}$$

где $d_i' = [A_J^{-1}(t^*)\vec{d}]_i$ и $t = t^* + \gamma$.

Так как $J \in \{J\}_0$ и $\sup\limits_{t < t_0} \Phi(t) = +\infty$, то должен быть: $x_1(t^*) > 0$, при $\gamma = 0$ решение допустимое, $d_1' < 0$ и $-\dfrac{1}{d_1'} = t_0 - t^*$. Для задачи (A) имеем дополнительно, что $d_2' < 0$; эту задачу и рассмотрим.

Нас интересует соотношение $\dfrac{x_1(t^* + \gamma)}{x_2(t^* + \gamma)}$, где $\gamma \in [0; t_0 - t^*]$.

$\dfrac{x_1(t^* + \gamma)}{x_2(t^* + \gamma)} = \dfrac{x_1(t^*)}{h(\gamma)}$, где $h(\gamma) = x_2(t^*) + \gamma \cdot [x_2(t^*) d_1' - x_1(t^*) d_2']$,

$h(0) = x_2(t^*) > 0$ и $h\left(-\dfrac{1}{d_1'}\right) = \dfrac{d_1'}{d_2'} > 0$. Из линейности $h(\gamma)$ следует,

$$\text{что } \left|\frac{x_1(t^*)}{h(\gamma)}\right| \leqslant \max\left\{\frac{x_1(t^*)}{x_2(t^*)};\ \frac{d_1'}{d_2'}\right\} = h \text{ для любого } \gamma \in [0; t_0 - t^*].$$

Так как $\Phi(t_0) < +\infty$, то из теоремы 3 [1] следует, что система

$$\begin{cases} (\vec{a}_1 + t_0\vec{d})\, y_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \vec{a}_j y_j = 0 \\ y_2 > 0 \\ \vec{y} \geqslant \vec{0} \end{cases} \tag{5}$$

несовместна. Применение леммы 1 дает, что и система

$$\begin{cases} (\vec{a}_1 + t_0\vec{d})\, y_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \vec{a}_i y_i = \vec{\Delta} \\ y_2 > 0 \\ \vec{y} \geqslant 0, \end{cases}$$

несовместима при достаточно малом $\|\vec{\Delta}\|$. Пусть $\vec{y}(t_k) = \dfrac{\vec{x}(t_k)}{x_2(t_k)}$ и

$$\vec{\Delta}_k = \frac{\vec{b}}{x_2(t_k)} + \frac{\varepsilon_k \cdot x_1(t_k)}{x_2(t_k)}\,\vec{d}, \text{ где } \varepsilon_k = t_0 - t_k \text{ и } \vec{x}_J(t_k) = A_J^{-1}(t_k)\,\vec{b}.$$

Очевидно, что при $k \to \infty$ также $\|\vec{\Delta}_k\| \to 0$, так как $\dfrac{x_1(t_k)}{x_2(t_k)} \leqslant h$.

Следовательно, несовместна и система

$$\begin{cases} (\vec{a}_1 + t_0\vec{d})\, \dfrac{x_1(t_k)}{x_2(t_k)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \vec{a}_j \dfrac{x_j(t_k)}{x_2(t_k)} = \dfrac{\vec{b}}{x_2(t_k)} + \dfrac{\varepsilon_k \cdot x_1(t_k)}{x_2(t_k)}\,\vec{d} \\ x_2(t_k) > 0 \\ \vec{x}(t_k) \geqslant \vec{0}, \end{cases}$$

при достаточно больших $k \geqslant k_0$. Из полученного противоречия вытекает, что для задачи (A) в случае последовательности $\{t_k^-\}$ теорема верна; для последовательности $\{t_k^+\}$ доказательство аналогично.

Для задачи (B) рассмотрим последовательность $\{t_k^+\}$. В данном случае в системе (5) вместо $y_2 > 0$ надо взять $y_1 > 0$ и полагать, что $\vec{y}(t_k) = \dfrac{\vec{x}(t_k)}{(c_1 + c \cdot t_k)\cdot x_1(t_k)}$. Если $c_1 + ct_0 > 0$, то полагаем, что $\varepsilon_k = t_k - t_0$; если же $c_1 + ct_0 = 0$, то полагаем, что $\varepsilon_k = (c_1 + c \cdot t_k)\cdot(t_k - t_0)$. В остальном доказательство аналогично доказательству для задачи (A). Так как задачами (A) и (B) все случаи изчерпываются, то теорема доказана полностью.

$$\text{Пусть } r_0 = \begin{cases} \text{оптимальному значению задачи } (D) \text{ соответствующей приведенной задачи}, & \text{если } \vec{b} \in Q, \\ \inf\limits_{t \in O_{tC}} \Phi(t), & \text{если } \vec{b} \notin Q. \end{cases}$$

Свойства $\Phi(t)$ для задачи (B) рассмотрим на множестве $O_{tC} \cap \{t : c_1 + tc \geqslant 0\} = O_{tC}^+$. Для задачи (A) считаем, что $O_{tC}^+ = O_{tC}$.

Лемма 3. Если $t_1; t_2 \in O_{tC}^+$ и $\min\{\Phi(t_1); \Phi(t_2)\} > r_0$, то для любого $t \in [t_1; t_2]$ найдется $\vec{x}(t) \in \Omega_t$ такой, что $\inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \vec{c}(t)\cdot\vec{x}(t) > r_0$ и координата $x_1(t) > 0$.

Доказательство:

Пусть $\vec{b} \in\!| Q$. Из условий леммы следует, что $x_1(t_1) > 0$ и $x_1(t_2) > 0$. Применение формул (1) и (2) дает, что для любого $t \in [t_1; t_2]$ $x_1(t) > 0$, и для задачи (A) $x_2(t) \geqslant \min\{\Phi(t_1); \Phi(t_2)\}$. Для задачи (B) имеем $\Phi(t) \geqslant (c_1 + tc) \cdot x_1(t) = (c_1 + [\lambda t_1 + (1-\lambda) \cdot t_2] \cdot c) \cdot \frac{x_1(t_1) \cdot x_1(t_2)}{\lambda x_1(t_2) + (1-\lambda) \cdot x_1(t_1)} = f(\lambda)$, где $t = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2$.

Вычисляя $\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \frac{(c_1 + ct_1) x_1(t_1) - (c_1 + ct_2) x_1(t_2)}{[\lambda \cdot x_1(t_2) + (1-\lambda) \cdot x_1(t_1)]^2}$, видно, что при каждом $\lambda \in [0; 1]$ $\frac{df(\lambda)}{d\lambda}$ соблюдает знак. Следовательно, $f(\lambda)$ либо возрастающая, либо убывающая на сегменте $[0; 1]$. Из сказанного следует справедливость леммы и для задачи (B). Лемма доказана.

Лемма 4: Пусть выполнены условия леммы 3 и кроме того $[t_1; t_2] \subset O_{tc}^{+}$. Если $\vec{x}(t)$ оптимальное решение параметрической задачи на сегменте $[t_1; t_2]$, то $\inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} x_1(t) > 0$.

Доказательство: Если $\vec{b} \in\!| Q$, то доказательство вытекает из леммы 2; предполагаем, что $\vec{b} \in Q$. Пусть последовательность $\{t_k\} \subset [t_1; t_2]$ и $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = t_0$. Предполагаем, что $\inf\limits_{t \in \{t_k\}} x_1(t) = 0$. Рассмотрим задачу (A).

Очевидно, что система

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{n} a_j x_j = \vec{b} \\ x_2 - \xi = \inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \Phi(t) \\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \ \xi \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

не может быть совместной, но тогда применение леммы 1 дает, что предположение $\inf\limits_{t \in \{t_k\}} x_1(t) = 0$ неверное для задачи (A). Для задачи (B) в системе (6) вместо $x_2 - \xi = \inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \Phi(t)$ надо взять $(c_1 + c \cdot t) x_1 - \xi = \inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \Phi(t)$ и индекс $j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что при всех $t \in [t_1; t_2]$ $c_1 + ct > 0$. Так как $\inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \Phi(t) > r_0 = 0$, то начиная с некоторого k_0, должен быть при $k \geqslant k_0$ $(c_1 + ct_k) x_1(t_k) < \inf\limits_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \Phi(t)$.

Последний результат в противоречии с леммой 3. Отсюда вытекает справедливость леммы и для задачи (B). Лемма доказана.

Обозначим $X_1(t, r_0) = \{t : \Phi(t) > r_0, \ \min\limits_{t \in O_{tc}^{+}}(t) \leqslant t \leqslant \max\limits_{t \in O_{tc}^{+}}(t)\}$. Если множество O_{tc}^{+} связное, то $X_1(t, r_0) \subset O_{tc}^{+}$, но это обстоятельство не всегда имеет место, так как множество O_{tc}^{+} иногда может быть и несвязным. Таким образом, принимая во внимание лемму 3 и лемму 4, нами доказана следующая

Теорема 4: *Множество* $X_1(t, r_0)$ связное, и если $t' \in X_1(t, r_0)$ такое, *что* $\Phi(t') < +\infty$, *то* $\min x_1(t') > 0$, *где минимум берется по всем оптимальным решениям параметрической задачи при значении параметра* $t = t'$.

Очевидно, что при $\vec{b} \in\!\!| Q$ множество $X_1(t, r_0) = [\min_{t \in O_{tc}^{+}}(t);\ \max_{t \in O_{tc}^{+}}(t)]$, значит множество $X_1(t, r_0)$ фактически определяется заданием множества O_{tc}^{+}. Но если $\vec{b} \in Q$, то придется множество $X_1(t, r_0)$ определить независимо от множества O_{tc}^{+}.

Из доказанного следует, что для построения функции $\Phi(t)$ основное значение имеет множество $X_1(t, r_0) \cap O_{tc}^{+}$.

В заключении параграфа рассмотрим несколько характерных свойств функции $\Phi(t)$ на множестве $X_1(t, r_0)$. Имеет место следующая

Теорема 5: *Если множество* O_{tc}^{+} *связное, то на множестве* $X_1(t, r_0)$ *функция* $\Phi(t)$ *разрывная не более чем в двух точках этого множества.*

Доказательство: Если $X_1(t, r_0)$ состоит из одной точки, то доказать нечего. Пусть $X_1(t, r_0)$ бесконечное множество и в точке $t_0 \in X_1(t, r_0)$ $\Phi(t)$ разрывная. Найдутся оптимальный базис $A_{J_1}(t)$ и $t_1^* < t_0$ такие, что при любом $t \in [t_1^*;\ t_0)$ $A_{J_1}^{-1}(t)\vec{b}$ оптимальное решение; или найдутся $A_{J_2}(t)$ и $t_2^* > t_0$ такие, что при любом $t \in (t_0;\ t_2^*]$ $A_{J_2}^{-1}(t)\vec{b}$ оптимальное решение. Пусть $t_1^* < t_0$. Для задачи (A) имеем $x_2(t) = x_2(t_1^*) - \gamma \dfrac{x_1(t_1^*) d'_2}{1 + \gamma d'_1}$, где $t = t_1^* + \gamma$. Из теоремы 3 следует, что $d'_2 = 0$. Следовательно, $\Phi(t)$ является константной функцией на множестве $[t_1^*;\ t_0)$. Если одновременно осуществляется случай $t_2^* > t_0$, то из соотношений (2) и (3) легко видно, что $\Phi(t_1^*) = \Phi(t_2^*) = \Phi(t_0)$, значит в точке разрыва либо $t_1^* < t_0$, либо $t_2^* > t_0$. Из соотношения (3) следует также, что при любом $t \in X_1(t, r_0)$ $\Phi(t) \leqslant \Phi(t_1^*)$. Так как множество параметров связное, при которых $\Phi(t) = \Phi(t_1^*)$, то $\Phi(t)$ имеет не более двух точек разрыва. Если мы допустим в третьей точке $t_0' \in X_1(t, r_0)$ разрыв $\Phi(t)$, то имеем другое бесконечное связное подмножество множества $X_1(t, r_0)$, где $\Phi(t)$ постоянная, но тогда из соотношений (3) следует несправедливость такого допущения. Для задачи (B) имеем $x_1(t) = \dfrac{x_1(t^*)}{1 + \gamma d_1'}$, отсюда видно, если для любого $t \in [t_1^*;\ t_0)$ базис оптимальный, то он оптимален и для $t = t_0$, за исключением случая

$$\frac{(c_1^* + \gamma c^*)\, x_1(t_1^*)}{1 + \gamma d_1'} = c_1^*\, x_1(t_1^*) \cdot \frac{1 + \gamma \dfrac{c^*}{c_1^*}}{1 + \gamma d_1'} = c_1^* x_1(t_1^*),$$

где $c_1^* = c_1 + c t_1^*$ и $c^* = c$.

(Из теоремы 3 вытекает, что $1+\gamma\frac{c^*}{c_1^*}=1+\gamma d_1'$, следовательно, для $t\in[t_1^*;t_0)$ $\Phi(t)=c_1^*\cdot x_1(t_1^*))$. Следовательно, для задачи (B) разрыв $\Phi(t)$ может быть только в точке t_0, если $c_1+ct_0=0$.

При $t_2^*>t_0$ рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Лемма 5: Если $N_t\cap L_t\neq\Theta$, то $\Phi(t)$ не может быть ни на одном бесконечном связном подмножестве множества $X_1(t,r_0)$ константной функцией.

Доказательство вытекает из определения множества N_t и из соотношения (3).

Пусть $N_t\cap L_t\neq\Theta$ и $t_0'\in N_t\cap L_t$, определяем следующие множества:

$$X_1^+(t,r_0)=\{t: t\in X_1(t,r_0),\ t>t_0',\ t\,\bar{\in}\, N_t\},$$
$$X_1^-(t,r_0)=\{t: t\in X_1(t,r_0),\ t<t_0',\ t\,\bar{\in}\, N_t\}.$$

Теорема 6: *Пусть $N_t\cap L_t\neq\Theta$. На множествах $X_1^+(t,r_0)$ и $X_1^-(t,r_0)$ функция $\Phi(t)$ непрерывна, строго убывающая и соответственно строго возрастающая.*

Доказательство. Приводим доказательство только для множества $X_1^+(t,r_0)$, так как для множества $X_1^-(t,r_0)$ это аналогично. Очевидно, что $X_1^+(t,r_0)$ связное множество. Если $\Phi(t)$ разрывна на этом множестве, то по теореме 5 она на некотором связном бесконечном подмножестве множества $X_1^*(t,r_0)$ является константной функцией. Последний результат противоречит лемме 5. Непрерывность доказана. При помощи соотношения (3) легко доказать, что если $t_1<t_2$, t_1, $t_2\in X_1^+(t,r_0$, то $\Phi(t_1)>\Phi(t_2)$. Теорема доказана.

Следствие 1: *Если множество $N_t\cap L_t\neq\Theta$, то функция $\Phi(t)$ непрерывна на множестве $X_1(t,r_0)\cap O_{tC}^+$.*

Теорема 7: *Если $O_{tC}^+\neq\Theta$, то* $\sup\limits_{t\in O_{tC}^+}\Phi(t)=\max\limits_{t\in O_{tC}^+}\Phi(t)$.

Доказательство: Если множество O_{tC}^+ несвязное или $\Phi(t)$ разрывна на множестве $X_1(t,r_0)\cap O_{tC}^+$, то справедливость теоремы очевидна. Пусть O_{tC}^+ связное множество, $\Phi(t)$ непрерывна на множестве $X_1(t,r_0)$ и это множество незамкнуто. Пусть t_0 граничная точка множества $X_1(t,r_0)$ и $t_0\,\bar{\in}\, X_1(t,r_0)$. Интерес представляет случай, когда $\Phi(t)$ разрывна в точке t_0 относительно множества O_{tC}^+. Пусть для определенности t_0 правая граничная точка. Существует $t^*<t_0$ ($t^*\in X_1(t,r_0)$) и $A_J(t)$ такие, что для любого $t\in[t^*;t_0)$ решение $A_J^{-1}(t)\vec{b}$ оптимально. Из доказательства теоремы 5 видно, что на множестве $[t^*,t_0)$ $\Phi(t)$ является константной функцией и $\Phi(t)\leqslant\Phi(t^*)$ при $t\in X_1(t,r_0)\setminus[t^*;t_0)$. Следовательно, и в этом случае $\sup\limits_{t\in O_{tC}^+}\Phi(t)=\max\limits_{t\in O_{tC}^+}\Phi(t)$. Если t_0 левая граничная точка множества $X_1(t,r_0)$, то доказательство аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2: *Если $X_1(t, r_0) \cap O_{tc}^{+} \neq \Theta$, то найдется такое связное подмножество множества $X_1(t, r_0)$ с граничными точками $t_1^{(M)} \leqslant t_2^{(M)}$, что при $t < t_1^{(M)}$ и $t \in X_1(t, r_0)$ функция $\Phi(t)$ непрерывна и строго возрастающая; при $t > t_2^{(M)}$ и $t \in X_1(t, r_0)$ функция $\Phi(t)$ непрерывна и строго убывающая.*

Доказательство вытекает из теорем 5 и 7, из следствия 1 и соотношения (3).

Следствие 3: *Множество $X_1(t, r_0)$ открыто тогда и только тогда, когда $O_{tc} \setminus X_1(t, r_0) \neq \Theta$. Функция $\Phi(t)$ разрывна на множестве O_{tc} не более чем в двух точках для задачи (A) и для задачи (B) — не более чем в одной точке этого множества.*

Доказательство: Если $O_{tc} \setminus X_1(t, r_0) \neq \Theta$, то необходимо, чтобы $\vec{b} \in Q$, но в этом случае легко доказать, что в граничных точках множества $X_1(t, r_0)$, которые принадлежат множеству O_{tc}, оптимальное значение r_0. Из полученного результата и доказательства теоремы 5 вытекает справедливость следствия для задач класса (A). Для задач класса (B) отметим, что $\Phi(t)$ может быть разрывна только в точке t, удовлетворяющая условию $c_1 + tc = 0$.

Следствие 4: *Если множество $N_t \neq \Theta$, то функция $\Phi(t)$ непрерывна на множестве O_{tc}.*

Доказательство вытекает из теоремы 6 и из следствия 3.

§ 4. Свойства параметрической задачи на множестве $X_1(t, r_0)$

Отметим, что не всегда множество O_{tc} связное. Этот недостаток мы устраняем следующим образом:

Пусть

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{если } t \in O_{tc}^{+}. \\ \sup\limits_{t \in O_{tc}^{+}} \Phi(t), & \text{если } t \in X_1(t, r_0), \text{ но } t \overline{\in} O_{tc}^{+}. \end{cases}$$

Обозначим $\sup\limits_{t \in O_{tc}^{+}} \Phi(t) = M$ и добавим к условиям параметрической задачи неравенство $\vec{c}(t) \cdot \vec{x}(t) \leqslant M$; соответствующее стандартное множество обозначим O_{tc_0}; очевидно, что O_{tc_0} связное и $O_{tc}^{+} \subset O_{tc_0}^{+}$. Ясно, что для функции $\Phi_0(t)$ справедливы все результаты предыдущих параграфов и решение новой задачи на множестве $O_{tc_0}^{+}$ является решением и исходной задачей на множестве O_{tc}^{+}. Не вводя новых обозначений, будем в дальнейшем предполагать, что $H(O_{tc}^{+}) = 1$. Все дальнейшие результаты относятся к задачам класса (A), так как эти задачи более важны. Для задач класса (B) справедливо следующая теорема:

Теорема 8. *Задача класса (B) на множестве $X_1(t, r_0)$ сводится к задаче параметрического линейного программирования, где вектор ограничений линейно зависит от параметра, при этом $\Phi(t) = \dfrac{c_1 + tc}{\Phi_1(t)}$, где для любого $t \in X_1(t, r_0)$*

$$\Phi_1(t)=\begin{cases}\min\limits_{\vec{z}(t)\in P_t} z_1(t), & \text{если } c_1+tc>0\\ +\infty, & \text{если } c_1+tc=0\\ \max\limits_{\vec{z}(t)\in P_t} z_1(t), & \text{если } c_1+tc<0\end{cases}$$

$$\text{и } P_t=\{\vec{z}(t): z_1\vec{b}-\sum_{j=2}^{n} z_j\vec{a}_j=\vec{a}_1+t\vec{d},\ \vec{z}\geqslant\vec{0}\}.$$

Доказательство: Так как t $X_1(t, r_0)$, то в оптимальном решении $x_1(t)>0$, обозначим $\frac{x_j(t)}{x_1(t)}=z_j(t)$, $j=2, 3, \ldots, n$ и $\frac{1}{x_1(t)}=z_1(t)$. Очевидно, что $\vec{z}(t)\in P_t$ и

$$\max_{\vec{x}(t)\in\Omega_t}[(c_1+tc)\,x_1(t)]=\begin{cases}(c_1+tc)\cdot\max\limits_{\vec{x}(t)\in\Omega_t} x_1(t), & \text{если } c_1+ct>0\\ 0, & \text{если } c_1+ct=0\\ (c_1+tc)\cdot\min\limits_{\vec{x}(t)\in\Omega_t} x_1(t), & \text{если } c_1+ct<0.\end{cases}$$

Нахождение $\max x_1(t)$ и $\min x_1(t)$ эквивалентно нахождению $\min\limits_{\vec{z}(t)\in P_t} z_1(t)$ и соответственно $\max\limits_{\vec{z}(t)\in P_t} z_1(t)$. Пусть $\vec{z}^*(t)$ оптимальное решение одной из этих задач; легко доказать, что $z_1^*(t)>0$ и $\vec{x}^*(t)$ оптимальное решение задачи (B), где $x_1^*(t)=\frac{1}{z_1^*(t)}$, $x_j^*(t)=\frac{z_j^*(t)}{z_1^*(t)}$, $j=2, 3, \ldots, n$.

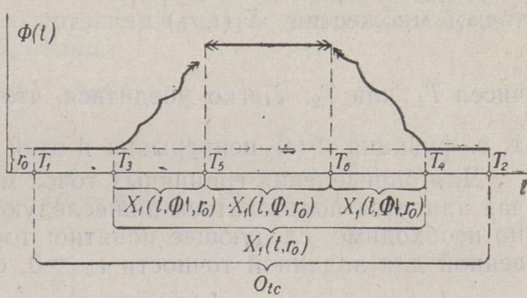
Если обозначить

$$\Phi_1(t)=\begin{cases}\min\limits_{\vec{z}(t)\in P_t} z_1(t), & \text{если } c_1+tc>0\\ +\infty, & \text{если } c_1+tc=0\\ \max\limits_{\vec{z}(t)\in P_t} z_1(t), & \text{если } c_1+tc<0,\end{cases}$$

то очевидно $\Phi(t)=\frac{c_1+tc}{\Phi_1(t)}$. Теорема доказана.

В предыдущих параграфах мы спределили множество O_{tc}^{+}; так как для задач класса (A) $O_{tc}^{+}=O_{tc}$, то в дальнейшем индекс «$+$» опускаем. Как следует из результатов статьи [1] и из предположения $H(O_{tc})=1$, можем $X_1(t, r_0)$ разбить на три связные подмножества следующим образом:

$X_1(t, r_0) = X_1(t, \Phi\uparrow, r_0) \cup X_1(t, \Phi, r_0) \cup X_1(t, \Phi\downarrow, r_0)$, где $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0) = \{t : t \in X_1(t, r_0)$ и $\Phi(t)$ строго растущая$\}$; $X_1(t, \Phi, r_0) = \{t : t \in X_1(t, r_0)$ и значения $\Phi(t)$ максимальные$\}$; и $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0) = \{t : t \in X_1(t, r_0)$ и $\Phi(t)$ строго убывающая$\}$. Отметим, что для некоторых задач может быть $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0) = \Theta$ или $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0) = \Theta$, но если $X_1(t, r_0) \neq \Theta$, то всегда $X_1(t, \Phi, r_0) \neq \Theta$. Для наглядности представим принципиальный график функции $\Phi(t)$ на множестве O_{tc}. Двойные стрелки означают, что в некоторой окрестности точки T_i $(i = 5, 6)$ график не вычерчен, так как в общем случае мы не можем утверждать непрерывность и разрывность $\Phi(t)$ в этих точках.



Граничные точки множеств O_{tc}, $X_1(t, r_0)$, $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$, $X_1(t, \Phi, r_0)$ и $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0)$ мы в дальнейшем обозначим в соответствии с графиком. Отметим, что T_3 и T_4 или T_6 и T_5 могут и совпадать.

Обозначим точку максимума $\Phi(t)$ через $t_{\max}$, покажем, что нахождение одной из таких точек может быть осуществлено при помощи решения некоторой задачи линейного программирования.

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 9: *Если* $H(O_{tc}) = 1$ и $X_1(t, r_0) \neq \Theta$, *то* $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2) = \Phi(t_{\max})$ *и* $t_{\max} = \dfrac{y^{(0)}}{x_1^{(0)}}$, *где* $(\vec{x}^{(0)}, y^{(0)})$ *оптимальное решение задачи* $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2)$, $G(y) =$

$$= \{(\vec{x}, y) : \sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j x_j + \vec{d} y = \vec{b},\ \vec{x} \geqslant \vec{0},\quad -T_1 x_1 + y \geqslant 0,\ T_2 x_1 - y \geqslant 0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: По теореме 7 и из условий имеем, что $\Phi(t_{\max}) = \max\limits_{T_1 \leqslant t \leqslant T_2} \Phi(t)$ и $\Phi(t_{\max}) > r_0$. Очевидно, что $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2) \geqslant \Phi(t_{\max})$.

Следовательно, в оптимальном решении задачи $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2)$ координата $x_1^{(0)} > 0$, в противном случае имели бы $x_1^{(0)} = y^{(0)} = 0$, откуда следовало $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2) \leqslant r_0$, что уже неверно. Если $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2) > \Phi(t_{\max})$, то мы могли бы указать такое значение параметра $t' \in X_1(t, r_0)$, что $\Phi(t') > \Phi(t_{\max})$. Из полученного противоречия вытекает, что $\max\limits_{(\vec{x}, y) \in G(y)} (x_2) = \Phi(t_{\max})$. Так как в оптимальном решении $x_1^{(0)} > 0$, то можем принимать $\frac{y^{(0)}}{x_1^{(0)}} = t_{\max}$. Теорема доказана.

Граничные точки множества $X_1(t, r_0)$ определяются сравнительно легко в том случае, если мы имеем невырожденное оптимальное опорное решение задачи (D), которое является оптимальным решением параметрической задачи при некотором $t_0 \in O_{tC}$. При этом мы должны иметь: $\omega_1(t) = c_1 - \vec{c}_{J_0} A_{J_0}^{-1} (\vec{a}_1 + t\vec{d}) = 0 - 1 \cdot a'_{21} - td'_2 = - a'_{21} - td'_2 \leqslant 0$. Если $d'_2 = 0$, то очевидно $X_1(t, r_0) = \Theta$. Если же $d'_2 \neq 0$, то одной граничной точкой множества $X_1(t, r_0)$ является $t = -\frac{a'_{21}}{d'_2}$, а другой — одно из чисел T_1 или T_2. Легко убедиться, что в этом случае $-\frac{a'_{21}}{d'_2} \in\!| X_1(t, r_0)$, т. е. функция $\Phi(t)$ непрерывна в этой точке.

Для определения граничных точек множества $X_1(t, r_0)$ в общем случае придется пользоваться нижеследующей теоремой 10; предварительно необходимо следующее понятие: точку $t \in O_{tC}$ называем несущественной для заданной точности $\varepsilon_0 > 0$, если $|\Phi(t) - r_0| \leqslant \varepsilon_0$.

Теорема 10. *Пусть* $\Phi(t_{\max}) \geqslant r_0 + \varepsilon_0$, $\max\limits_{(t, \vec{v}) \in V(t, \vec{v})} (t) = \tilde{t}$ *и* $\min\limits_{(t, \vec{v}) \in V(t, \vec{v})} (t) = \underset{\sim}{t}$,

где $V(t, \vec{v}) = \{(t, \vec{v}) : t \cdot \vec{d} + \sum\limits_{j=2}^{n} \vec{a}_j v_j - v_1 \vec{b} = -\vec{a}_1,\ \vec{v} \geqslant \vec{0},$

$$-v_1 \cdot (r_0 + \varepsilon_0) + v_2 - v_{n+1} = 0, \qquad T_1 \leqslant t \leqslant T_2\}.$$

Если точка $\tilde{t}$ *(соответственно* $\underset{\sim}{t}$*) не является граничной точкой множества* $X_1(t, r_0)$, *то все точки множества* $[\tilde{t}; T_4]$ *(соответственно* $[T_3; \underset{\sim}{t}]$*) несущественны.*

Доказательство: Если $X_1(t, r_0) \neq \Theta$, то и $V(t, \vec{v}) \neq \Theta$, так как $(t_{\max}, \vec{v}(t_{\max})) \in V(t, \vec{v})$, где $v_1(t_{\max}) = \frac{1}{x_1(t_{\max})}$, $v_j(t_{\max}) = \frac{x_j(t_{\max})}{x_1(t_{\max})}$, $j = 2, \ldots, n$, $v_{n+1}(t_{\max}) = \frac{x_2(t_{\max}) - r_0 - \varepsilon_0}{x_1(t_{\max})}$. Рассмотрим точку $\tilde{t}$, соответствующее оптимальное решение обозначим $(\tilde{t}, \vec{v}(\tilde{t}))$. Очевидно, что для любого $\lambda \in (0; 1)$ имеем $(1 - \lambda) \cdot (\tilde{t}, \vec{v}(\tilde{t})) + \lambda \cdot (t_{\max}, \vec{v}(t_{\max})) \in V(t, \vec{v})$, $(1 - \lambda) \cdot v_1(\tilde{t}) + \lambda \cdot v_1(t_{\max}) > 0$ и $(1 - \lambda) \cdot \tilde{t} + \lambda \cdot t_{\max} \in (t_{\max}; \tilde{t})$, следовательно, точка $\tilde{t}$ принадлежит к замыканию множества $X_1(t, r_0)$. Если для любого $t \in X_1(t, r_0)$ имеем $\Phi(t) \leqslant r_0 + \varepsilon_0$, то все точки множества O_{tC} несущественны. Пусть точка $\tilde{t}$ внутренняя для множества $X_1(t, r_0)$, т. е. $\tilde{t} < T_4$. Если для некоторого $t' \in (\tilde{t}; T_4)$ $\Phi(t') > r_0 + \varepsilon_0$, то очевидно $(t', \vec{v}(t')) \in V(t, \vec{v})$, где $\vec{v}(t')$ получается из оптимального решения $\vec{x}(t')$ аналогичным образом как $\vec{v}(t_{\max})$. Из полученного противоречия следует, что $\Phi(t) \leqslant r_0 + \varepsilon_0$, если $t \in (\tilde{t}; T_4)$. При помощи следствий 2 и 3 легко убедиться, что $\Phi(\tilde{t}) \leqslant r_0 + \varepsilon_0$ и $\Phi(T_4) \leqslant r_0 + \varepsilon_0$. Для точки $\underset{\sim}{t}$ доказательство аналогичное. Теорема доказана.

Следствие 5. *Все точки множества $O_{tC} \setminus [\underset{\sim}{t}; \tilde{t}]$ несущественны.*

Доказательство вытекает непосредственно из соответствующих определений и доказательства теоремы 10.

Для граничных точек множества $X_1(t, \Phi, r_0)$ справедлива следующая теорема:

Теорема 11. *Пусть $H(O_{tC}) = 1$ и $X_1(t, r_0) \neq \Theta$. Граничными точками множества $X_1(t, \Phi, r_0)$ являются оптимальные значения следующих задач линейного программирования:*

$$\max_{(t, \vec{y}) \in M(t, \vec{y})} (t) = \bar{t} \quad \text{и} \quad \min_{(t, \vec{y}) \in M(t, \vec{y})} (t) = \underline{t}, \quad \text{где}$$

$$M(t, \vec{y}) = \{(t, \vec{y}) \colon t\vec{d} + \sum_{j=3}^{n} \vec{a}_j y_j - (\vec{b} - \Phi(t_{\max}) \cdot \vec{a}_2) y_2 =$$

$$= -\vec{a}_1, \; T_1 \leqslant t \leqslant T_2, \; \vec{y} \geqslant \vec{0}\}.$$

Доказательство: Из условий теоремы следует, что $T_1 \leqslant t_{\max} \leqslant$

$\leqslant T_2$ и $x_1(t_{\max}) > 0$. Если принимать $y_j(t_{\max}) = \dfrac{x_1(t_{\max})}{x_1(t_{\max})}$, $\quad j = 3, \ldots, n$

и $y_2(t_{\max}) = \dfrac{1}{x_1(t_{\max})}$, то очевидно $(t_{\max}, \vec{y}(t_{\max})) \in M(t, \vec{y})$. Оптимальные решения обозначим $(\bar{t}, \vec{y}(\bar{t}))$ и $(\underline{t}, \vec{y}(\underline{t}))$. Очевидно, что для любого $\lambda \in (0; 1)$ имеем $(1 - \lambda) \cdot (\bar{t}, \vec{y}(\bar{t})) + \lambda \cdot (t_{\max}, \vec{y}(t_{\max})) \in M(t, \vec{y})$ и $\lambda \cdot y_2(t_{\max}) + (1 - \lambda) \cdot y_2(\bar{t}) > 0$. Из полученного неравенства легко видно, что для любого $t \in [t_{\max}; \bar{t})$ решением системы

$$(\vec{a}_1 + t\vec{d}) x_1 + \sum_{j=3}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b} - \Phi(t_{\max}) \vec{a}_2, \; \vec{x} \geqslant \vec{0} \text{ являются}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{(1 - \lambda) \cdot y_2(\bar{t}) + \lambda \cdot y_2(t_{\max})}, \; x_j(t) = \frac{(1 - \lambda) \cdot y_j(\bar{t}) + \lambda \cdot y_j(t_{\max})}{(1 - \lambda) \cdot y_2(\bar{t}) + \lambda \cdot y_2(t_{\max})},$$

$$j = 3, \ldots, n,$$

где $t = (1 - \lambda) \cdot \bar{t} + \lambda \cdot t_{\max}$. Из доказанного следует, что $\bar{t}$ граничная точка множества $X_1(t, \Phi, r_0)$. Для точки $\underline{t}$ доказательство аналогичное. Теорема доказана.

Для множества $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$ справедлива следующая теорема:

Теорема 12а. *Пусть t_0 внутренняя точка множества $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$ и $\delta_0 > 0$ такое, что $t_0 + \delta_0 \in X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$. Решением параметрической задачи в точке $t_0 + \delta_0$ является решение следующей задачи: найти $\max(x_2)$ при условиях*

$$\begin{cases} \vec{a}_1(t_0)x_1 + \vec{d}y + \sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b} \\ \delta_0 x_1 - y \geqslant 0 \\ \vec{x} \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\vec{a}_1(t_0) = \vec{a}_1 + t_0 \cdot \vec{d}$.

Доказательство. Очевидно, что оптимальные решения параметрической задачи при $t = t_0$ и $t = t_0 + \delta_0$ являются допустимыми, если при t_0 полагать, что $y(t_0) = 0$ и при $t_0 + \delta_0$ полагать, что $y(t_0 + \delta_0) = \delta_0 \cdot x_1(t_0 + \delta_0)$. Пусть $(\vec{x}^*, y^*)$ оптимальное решение рассматриваемой задачи. Так как $\Phi(t_0 + \delta_0) > \Phi(t_0) > r_0$, то очевидно $\overset{*}{x_2} \geqslant \Phi(t_0 + \delta_0)$ и $\overset{*}{x_1} > 0$. Если бы $\overset{*}{x_2} > \Phi(t_0 + \delta_0)$, то мы могли бы указать точку $t^* \in [t_0; t_0 + \delta_0]$ такую, в которой $\Phi(t^*) > \Phi(t_0 + \delta_0)$. Из полученного противоречия вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Примечание: Под теоремой 12*b* мы подразумываем в дальнейшем теорему, аналогичную теореме 12*a*, которая сформулирована относительно множества $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0)$. Разница только в том, что вместо $\vec{d}$ надо в теореме 12*b* взять $-\vec{d}$, т. е. по существу движение происходит в направлении возрастания $-t$.

Теорема 13. *Пусть t_0 внутренняя точка множества $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$ (соответственно множеству $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0)$) и существует $t' \in L_t$, $t' < t_0$ (соответственно $t' > t_0$) такое, что $\Phi(t_0) - \varepsilon_0 > \Phi(t')$.* Если t^* оптимальное значение задачи $\min(t)$ (соответственно $\max(t)$) при условиях

$$\begin{cases} \vec{a}_1 + t\vec{d} + \sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j u_j = \vec{b} \cdot u_1 \\ u_2 \geqslant (\Phi(t_0) - \varepsilon_0) \cdot u_1 \\ \vec{u} \geqslant \vec{0}, \end{cases}$$

то при значении параметра t^* оптимальным решением задачи (A) *является* $x_1(t^*) = \frac{1}{u_1(t^*)}$, $x_j(t^*) = \frac{u_j(t^*)}{u_1(t^*)}$, $j = 2, 3, \ldots, n$, *где* $(t^*, \vec{u}(t^*))$ *оптимальное решение рассмотренной задачи.*

Доказательство опускаем из-за аналогичности доказательств предыдущих теорем данного параграфа.

§ 5. Вычислительные схемы приближенного построения $\Phi(t)$ на ограниченном, замкнутом и связном множестве параметров

Как уже было сказано в § 1, в большинстве практических применений область параметров является сегментом, которую мы обозначим через $T(t)$. Хотя мы можем $\Phi(t)$ построить на сколько угодно широком стандартном множестве, но, как правило, в практических задачах ясен вопрос о существовании ограниченной $\Phi(t)$ на множестве $T(t)$ дело состоит только в фактическом нахождении $\Phi(t)$, поэтому в предлагаемой схеме мы занимаемся вычислением граничных точек областей L_t и O_t по мере надобности.

Граничные точки множества $T(t)$ обозначим, как и у стандартного множества, через T_1 и T_2, где $T_1 < T_2$. Приближенную функцию обозначим через $\tilde{\Phi}(t)$; значит, если $\varepsilon_0 > 0$ заданная точность, то на множестве $T(t)$ должен быть $|\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t)| \leqslant \varepsilon_0$ с исключением достаточно малой окрестности точек T_5 и T_6 (если только $T_5, T_6 \in T(t)$) в случае разрыва $\Phi(t)$ в одной или в обеих из этих точек при условии, что $|\Phi(t_{\max}) - \Phi(t_i)| > \varepsilon_0$ ($i = 5$, или $i = 6$, или $i = 5, 6$). Отметим, если в граничной точке T_i ($i = 5, 6$) множества $X_1(t, \Phi, r_0)$ функция $\Phi(t)$ разрывная, то эта точка не принадлежит множеству $X_1(t, \Phi, r_0)$. Точки $\underset{\sim}{t}$ и $\tilde{t}$ в теореме 10 называем ε-граничными точками множества $X_1(t, r_0)$ и в дальнейшем обозначим через $t_3(\varepsilon_0)$ и соответственно через $t_4(\varepsilon_0)$. Пусть δ^* диаметр выбранных окрестностей точек T_5 и T_6; точки $T_5 + \delta^*$ и $T_6 - \delta^*$ называем δ-граничными точками множества $X_1(t, \Phi, r_0)$ и в дальнейшем обозначим их через $t_5(\delta^*)$ и соответственно через $t_6(\delta^*)$.

Основная схема.

При этом предполагаем, что $T(t) \subset O_t$. Схема состоит из следующих этапов:

1) Решение исходной параметрической задачи при значениях параметров T_1 и T_2.

2) Пусть $\min\{\Phi'(T_1); \Phi'(T_2)\} = \Phi'(T_{i_0})$ ($i_0 = 1$, или $i_0 = 2$).

Вычисляем $\min x_1(T_{i_0})$ при условиях:

$$\begin{cases} (\vec{a}_1 + T_{i_0}\vec{d})x_1 + \sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b} \\ (c_1 + T_{i_0}c)x_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j x_j = \Phi'(T_{i_0}) \\ \vec{x} \geqslant \vec{0}. \end{cases}$$

Если $\overset{*}{x}_1(T_{i_0}) = 0$, то $\vec{b} \in Q$; если же $\overset{*}{x}_1(T_{i_0}) > 0$, то $\vec{b} \,\bar{\in}\, Q$.

3) Приведем параметрическую задачу к виду $\Phi(t) = \max\limits_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} x_2(t)$ (см. § 2, пункт A).

Отметим, что для приведенной задачи класса (A) всегда $r_0 = 1$, независимо от условия $\vec{b} \in Q$ или $\vec{b} \,\bar{\in}\, Q$.

4) Вычислим $t_{\max}$ и соответствующее оптимальное решение при помощи теоремы 9; если при этом $x_1^{(0)} = 0$ или $\Phi(t_{\max}) \leqslant r_0 + \varepsilon_0$, то очевидно все точки множества $[T_1; T_2]$ несущественны, в этом случае вычисления заканчиваются и принимается $\tilde{\Phi}(t) = r_0$.

5) Если $\Phi(t_{max}) > r_0 + \varepsilon_0$, то граничные точки множества $X_1(t, \Phi, r_0)$ и оптимальное решение $\vec{x}(t)$ на множестве $[t_5(\delta^*); t_6(\delta^*)]$ вычислим по теореме 11.

6) Вычислим ε-граничные точки множества $X_1(t, r_0)$ по теореме 10.

7) Построение $\tilde{\Phi}(t)$ на множестве $[t_3(\varepsilon_0); T_5]$. Вычислим оптимальное решение (базисное) в точке $t_3(\varepsilon_0)$ и при помощи теоремы 17 статьи [1] определим множество $K_\gamma^+ \cap V_\gamma^+$. Правую граничную точку этого множества обозначим через t_3; очевидно, что $t_3 \in [t_3(\varepsilon_0); T_5]$ и данный базис не оптимален ни для одного $t \in [t_3; T_5]$. Точку t_3 преодолеем при помощи расширенной теоремы 12*a*, которая состоит в том, что к условиям рассмотренной там задачи линейного программирования добавлено неравенство $x_2 \leqslant \Phi(t_0) + \varepsilon_0$; аналогичным образом получим расширенную теорему 12*b*. Полученную новую точку обозначим через t_4 и оптимальное решение в этой точке через $\vec{x}(t_4)$. Для построения $\tilde{\Phi}(t)$ и соответствующего допустимого решения на множестве $[t_3; t_4]$ пользуемся формулой (1). На множестве $[t_3(\varepsilon_0); t_3]$ принимаем $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)$. В зависимости от обстановки, в точке t_4 пользуемся либо теоремой 17 статьи [1], либо расширенной теоремой 12*a*. Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута точка T_5.

8) Построение $\tilde{\Phi}(t)$ на множестве $[T_6; t_4(\varepsilon_0)]$. Поступаем аналогично предыдущему пункту, разница только в том, что пользуемся расширенной теоремой 12*b* и движение происходит в направлении от $t_4(\varepsilon_0)$ к точке T_6.

9) На множествах $[T_5; T_5 + \delta^*]$ и $[T_6 - \delta^*; T_6]$ функция $\tilde{\Phi}(t)$ и соответствующее допустимое решение вычислим при помощи формулы (1).

10) Переход к исходным переменным.

Усложнения применения основной схемы

В этих ситуациях мы имеем дело с вычислением граничных точек множеств L_t и N_t; вычисление этих параметров рассмотрено в пунктах 3 и 4 статьи [1] (там они называются критическими параметрами и вообще параметр обозначен через ε).

I. T_1; $T_2 \in O_t$, а $N_t \cap [T_1; T_2] \neq Q$.

В этом случае к исходной задаче добавляем неравенство $\vec{c}(t) \cdot \vec{x} \leqslant M$, где M достаточно большая константа. Если представляет интерес область параметров, где параметрическая задача поставлена некорректно, то вычислим N_t.

II T_1; $T_2 \in N_t$, т. е. $\Phi(T_1) = \Phi(T_2) = +\infty$.

Параметрическая задача поставлена некорректно на всей области $[T_1; T_2]$.

III $T_1; T_2 \overline{\in} L_t$.

Вычислим L_t и за новые T_1 и T_2 берем граничные точки множества L_t или ε-граничные точки (в зависимости от обстановки). Если $\Phi(t_{max}) = +\infty$, то найдем множество N_t или добавляем условие $\vec{c}(t) \cdot \vec{x} \leqslant M$, а затем переходим к основной схеме.

IV $T_1 \in O_t$, $T_2 \in N_t \cap L_t$ $(T_1 \in N_t \cap L_t,\ T_2 \in O_t)$.

Добавим условие $\vec{c}(t) \cdot \vec{x} \leqslant M$. При необходимости вычислим N_t.

V $T_1 \in O_t$, $T_2 \,\overline{\in}\, L_t$ $(T_1 \,\overline{\in}\, L_t,\ T_2 \in O_t)$.

Вычислим N_t и при необходимости добавим условие $\vec{c}(t) \cdot \vec{x} \leqslant M$.

VI $T_1 \in N_t \cap L_t$; $T_2 \,\overline{\in}\, L_t$ $(T_1 \,\overline{\in}\, L_t;\ T_2 \in N_t \cap L_t)$.

Вычислим L_t и N_t, затем определим интересующее стандартное множество.

Дополнительные схемы

При всех этих схемах предполагаем, что условия основной схемы выполнены.

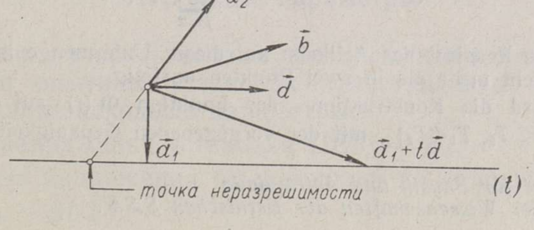
a) Дополнительные схемы отличаются от основной схемы тем, что в пунктах 7) и 8) не пользуемся теоремой 17 статьи [1], а движение происходит все время на основе расширенных теорем 12*a* и 12*b*. Эта схема удобна тогда, когда требуемая точность $\tilde{\Phi}(t)$ не очень большая или $|\Phi(t_{\max}) - \varepsilon_0|$ сравнительно мала; можно еще рекомендовать следующую оценку: $\dfrac{|\Phi(t_{\max}) - r_0|}{T_2 - T_1} \ll 1$.

b) На множестве $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$ пользуемся предыдущей схемой, а на множестве $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0)$ — теоремой 13. По этой схеме движение происходит либо в направлении возрастания t, либо в направлении убывания t; в последнем случае роли множеств $X_1(t, \Phi\uparrow, r_0)$ и $X_1(t, \Phi\downarrow, r_0)$ меняются.

c) Смешанная схема. На одних участках множества $[T_1; T_2]$ пользуемся основной схемой, а на других участках этого же множества — схемой a) или b). Эту схему рекомендуется применять тогда, когда t случайная величина с известным законом распределения и нас интересуют математические ожидания $\Phi(t)$ и соответствующего решения $\vec{x}(t)$. Подобные задачи рассмотрены в [3].

Отметим, что во всех схемах мы получали приближенную $\tilde{\Phi}(t)$, которая владеет свойством $\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t) \geqslant 0$, последнее свойство очевидно присуще для всех таких схем, где соответствующее $\vec{x}(t)$ допустимо.

В заключение отметим, что сравнение вычислительных схем данной статьи с *M*-методом, предложенным в статье [2], можно провести на основе решения большого количества задач по обоим методам на электронной вычислительной машине. По поводу статьи [2] отметим еще, что доказываемая там лемма 2 в такой формулировке не верна, так как легко можно привести пример, где множество точек неразрешимости является замкнутым лучом. Проиллюстрируем сказанное геометрически:



ЛИТЕРАТУРА

1. Ягель А. Ю., Некоторые вопросы параметрического линейного программирования, Труды Института физики и астрономии АН ЭССР, № 24, 1964, стр. 46—65.
2. Карабегов В.-К. И., Журнал вычислительной математики и математической физики, 3, № 3, 547—558 (1963).
3. Bereanu B., Revue de Mathematiques Pures et Appliquées, Academie de la Republique Populaire Roumaine, 8, Nr. 4, 683—699 (1963).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9 III 1964

MAKSIMUMFUNKTSIOONI PÕHIOMADUSED ÜHE KLASSI PARAMEETRILISE LINEAARSE PROGRAMMEERIMISE PROBLEEMI PUHUL

A. Jägel

Resümee

Töös uuritakse funktsiooni $\Phi(t)$ omadusi, kus $\Phi(t) = \max\limits_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \vec{c} \cdot \vec{x}(t)$ ja

$\Omega_t = \left\{ \vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + \vec{d}\, t) x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b}, \vec{x} \geqslant \vec{0} \right\}$ reaalarvude teataval alamhulgal.

Põhilised uurimistulemused:

1. Vaadeldaval alamhulgal on $\Phi(t)$ tõkestatud ja katkev ülimalt kahes punktis.
2. Funktsioonil $\Phi(t)$ on teatavad monotoonsusomadused.
3. Funktsiooni $\Phi(t)$ saab ligikaudselt leida etteantud lõigul $[T_1; T_2]$ vajaliku täpsusega $\varepsilon_0 > 0$ sellekohaste arvutusskeemide abil.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Füüsika ja Astronoomia Instituut

Saabus toimetusse
9. III 1964

GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN DER MAXIMUMFUNKTION AN EINER KLASSE DER PARAMETRISCHEN LINEAREN PROGRAMMIERUNGSPROBLEME

A. Jägel

Zusammenfassung

Es werden die Eigenschaften der Funktion $\Phi(t)$ auf der bestimmten Untermenge der reellen Zahlen betrachtet, wo $\Phi(t) = \max\limits_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \vec{c} \cdot \vec{x}(t)$ und

$$\Omega_t = \left\{ \vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + \vec{d}t) x_1 + \sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b},\ \vec{x} \geqslant 0 \right\}.$$

Das wichtigste Resultat des Artikels: auf dieser Untermenge ist die Funktion $\Phi(t)$ beschränkt und nicht mehr als in zwei Punkten unstetig.

Betrachtet wird die Konstruktion der Funktion $\Phi(t)$ auf der Menge $T(t)$, wo $T(t) = \{t : T_1 \leqslant t \leqslant T_2,\ T_1 < T_2\}$, mit der vorgegebenen Genauigkeit $\varepsilon_0 > 0$.

Institut für Physik und Astronomie
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen S.S.R.

Eingegangen
am 9. März 1964